

Entregable 2: Propagación de ondas acústicas en medios inhomogéneos de 2 dimensiones.

Andrés Vicente Arévalo

Resumen

Desarrollo y comprensión de un código para la solución de las ecuaciones de la hidrodinámica en dos dimensiones. Para comprobar el código se han realizado pruebas con ondas sonoras simples y varias perturbaciones arbitrarias. A continuación, se ha introducido una inhomogeneidad en la densidad del medio y se ha calculado la propagación de paquetes de ondas en estas condiciones. Adicionalmente se han introducido las condiciones iniciales de un choque y algunas otras.

1. Introducción

Las ecuaciones hidrodinámicas que se van a resolver son las equivalentes a las del primer entregable pero generalizadas para 2 dimensiones:

$$\left. \begin{array}{l} u_m = \rho \quad ; \quad f_m^i = \rho v_i \\ u_p^i = \rho v_i \quad ; \quad f_p^{i,j} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ u_e = \rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) ; \quad f_e = \left(\rho \epsilon + \rho \frac{v^2}{2} + p \right) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_m}{\partial t} = -\nabla f_m = - \left(\frac{\partial f_m^x}{\partial x} + \frac{\partial f_m^z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u_e}{\partial t} = -\nabla f_e = - \left(\frac{\partial f_e^x}{\partial x} + \frac{\partial f_e^z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u_p^x}{\partial t} = -\nabla f_p = - \left(\frac{\partial f_p^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial f_p^{xz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u_p^z}{\partial t} = -\nabla f_p = - \left(\frac{\partial f_p^{zz}}{\partial z} + \frac{\partial f_p^{zx}}{\partial z} \right) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Donde se pone claramente de manifiesto el carácter vectorial de la velocidad antes no tenido en cuenta, así como el carácter tensorial del flujo de momento convirtiéndose en una matriz (2x2) cuadrada y simétrica.

Esquema numérico

Para el esquema numérico se ha pasado del *Lax-Friedrichs* a el *staggered Lax-Friedrich* de primera generación, donde se dan 2 pasos de $dt/2$ en lugar de 1, calculando los flujos en cada paso para llegar finalmente a $t + dt$. Además es destacable que el nuevo esquema calcula cada paso en los puntos intermedios del *grid*, siendo por tanto un esquema centrado. Al ser en 2 dimensiones los puntos centrales se convierten en los centros geométricos de las celdas, los cuales recibirán la información de sus 4 vértices. Para este procedimiento se han creado diversas rutinas que llevan a cabo las diferentes tareas necesarias para el avance: `advance_fg_2d.pro`, `midval.pro` y `deriv_2d.pro`.

El criterio de estabilidad de este esquema se ha demostrado que es una extensión del de 1 dimensión y se puede escribir como viene en la ec. 2 con el parámetro $f_{CFL} < 1$.

$$\Delta t \leq f_{CFL} \frac{\min(\Delta z, \Delta x)}{\max(|v_i + c_{si}|, |v_i - c_{si}|)} \quad (2)$$

Se han implementado 2 tipos de condiciones de contorno, unas periódicas y otras que anulan la derivada en los extremos.

Pruebas de funcionamiento

Como pruebas iniciales para la estabilidad y funcionamiento del código se han introducido ondas de sonido en ambas direcciones espaciales, así como en una dirección cualquiera dada por las componentes de su vector de ondas $\vec{K} = (K_x, K_z) = 2\pi/\lambda \cdot (N_x, N_z)$ y se ha comprobado que tanto las condiciones de contorno periódicas como la evolución del código es la esperada. También se comprobó la robustez superior del esquema numérico de primera generación comparado con su predecesor. Estas comprobaciones se pueden hacer poniendo los parámetros de `datain_2d_acoustic*.dat` y representando cortes en z y x como muestra la figura 1. Además se han añadido modos para ondas gaussianas, para simular la lluvia y para hacer un choque con diferentes funciones iniciales y números de Mach (figuras 1, 2).

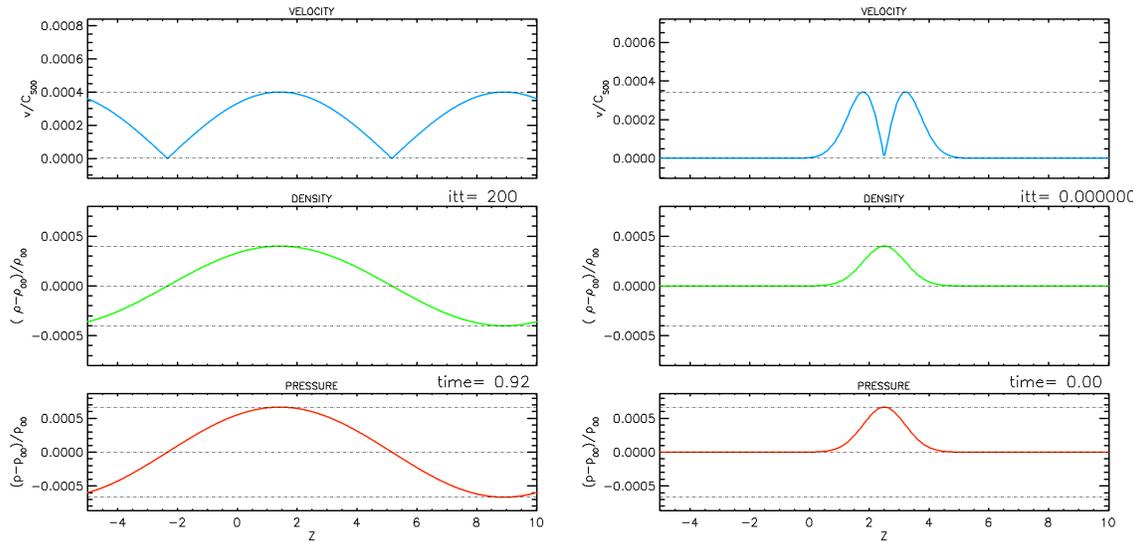


Figura 1: Cortes de una onda sonora y una onda con condiciones iniciales gaussianas. v/c_s muestra el módulo del vector velocidad normalizado.

Aunque en el código se han implementado y analizado numerosas condiciones iniciales que se exponen en las instrucciones del mismo, en este informe se comentarán solo aquellas relacionadas con paquetes de ondas y medios inhomogéneos. Dejando al lector la posibilidad de explorar todas las experiencias que el código ofrece.

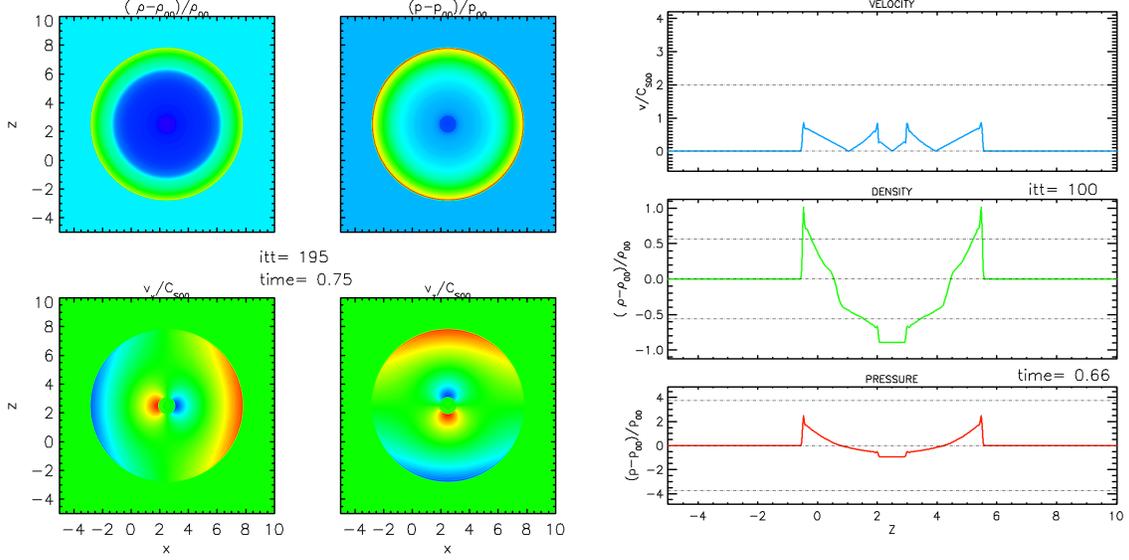


Figura 2: Choque con condiciones iniciales de tangente hiperbólica.

2. Paquete de ondas en un equilibrio uniforme

Podemos introducir ahora una perturbación consistente en un paquete de ondas como el de la ecuación 3 a nuestro sistema en equilibrio, siendo $e_{\parallel, \perp}$ los vectores unitarios en la dirección paralela y perpendicular al vector de ondas \vec{K}_0 y \vec{x}_c el punto en el cual esta centrado el paquete.

$$q(x, z) = \exp \left[-\frac{(e_{\perp} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c))^2}{W_{\perp}^2} - \frac{(e_{\parallel} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c))^2}{W_{\parallel}^2} \right] \cos(\vec{K}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)) \quad (3)$$

Con esta expresión W_{\perp} y W_{\parallel} nos darán las anchuras del paquete en las respectivas direcciones con respecto al vector de ondas.

Si ponemos el paquete con anchura transversal infinita $W_{\perp} = \infty$ y lo orientamos en la dirección x obtenemos el resultado de la figura 4¹ y una figura equivalente para la dirección z. En este caso podemos observar como el paquete viaja como un frente de ondas, igual que pasaba con la perturbación de tipo pulso en el caso de 1D. Cabe mencionar que si ampliamos la anchura paralela del paquete ($W_{\parallel} \sim 2$) empezamos a ver realmente el carácter de 'paquete de ondas' con una onda modulada por las exponenciales (figura 4), pero debido al valor impuesto por el guión ($W_{\parallel} = 0.15$) solo vemos un pulso (figura 3). Se ha optado por coger un valor mayor para W_{\parallel} y así observar los posibles fenómenos de dispersión dentro del paquete de ondas mas claramente.

¹En las figuras de los paquetes de ondas se ha superpuesto una línea que representa la trayectoria que debería seguir el paquete en un trazado de rayos. Además se ha superpuesto un marcador en el centro del paquete que lo acompaña moviéndose a la velocidad de propagación pero exclusivamente en el eje z.

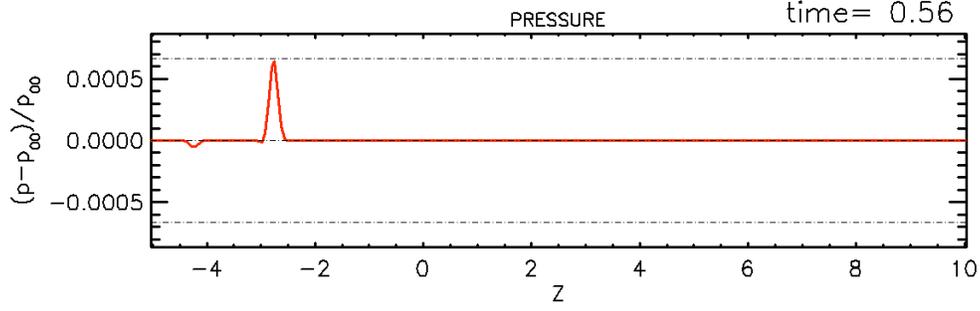


Figura 3: Presión normalizada de un paquete de ondas en la dirección z con $N_{wave} = 15$, $W_{\perp} = \infty$, $W_{\parallel} = 0.15$ y $A = 4 \cdot 10^{-4}$. La densidad y velocidad tienen el mismo perfil pero van subordinadas a la presión, por lo que se han omitido.

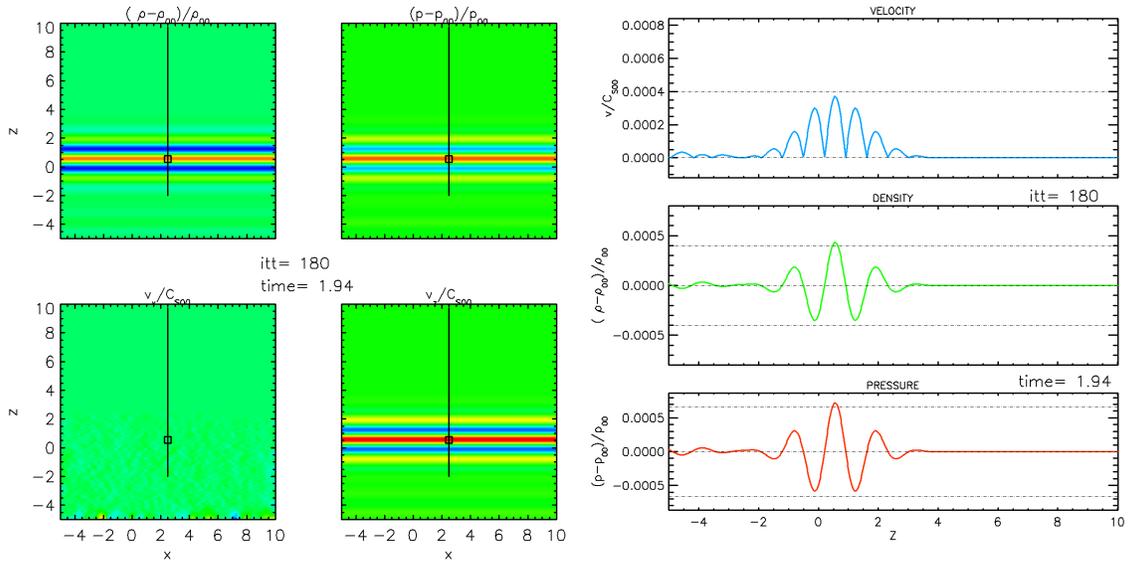


Figura 4: Paquete de ondas en la dirección z en un medio homogéneo y un corte en esa misma dirección ($N_{wave} = 15$, $W_{\perp} = \infty$, $W_{\parallel} = 1.5$ y $A = 4 \cdot 10^{-4}$).

Si reducimos la anchura transversal del paquete y lo orientamos en una dirección que forme $\theta = 45^{\circ}$ con la horizontal obtenemos un paquete de ondas que se propaga extendiéndose y 'des-localizándose' por todo el dominio como se muestra en la figura 5. Esto se puede explicar con el hecho de que una perturbación de este tipo localizada en un punto tiende a extenderse a través de todo el plano a una velocidad constante, formando en el infinito un frente de ondas plano. Esto se puede relacionar con el principio de Huygens, que nos dice que cada punto del frente de ondas se convertirá en una fuente puntual y la envolvente global de todos ellos dará como resultado el nuevo frente de ondas [1]. Este fenómeno hace que el vector de ondas \vec{k}_0 que inicialmente estaba perfectamente determinado, se vaya 'abriendo' en el espacio de k 's dando paso a una suma de distintas componentes alrededor de \vec{k}_0 .

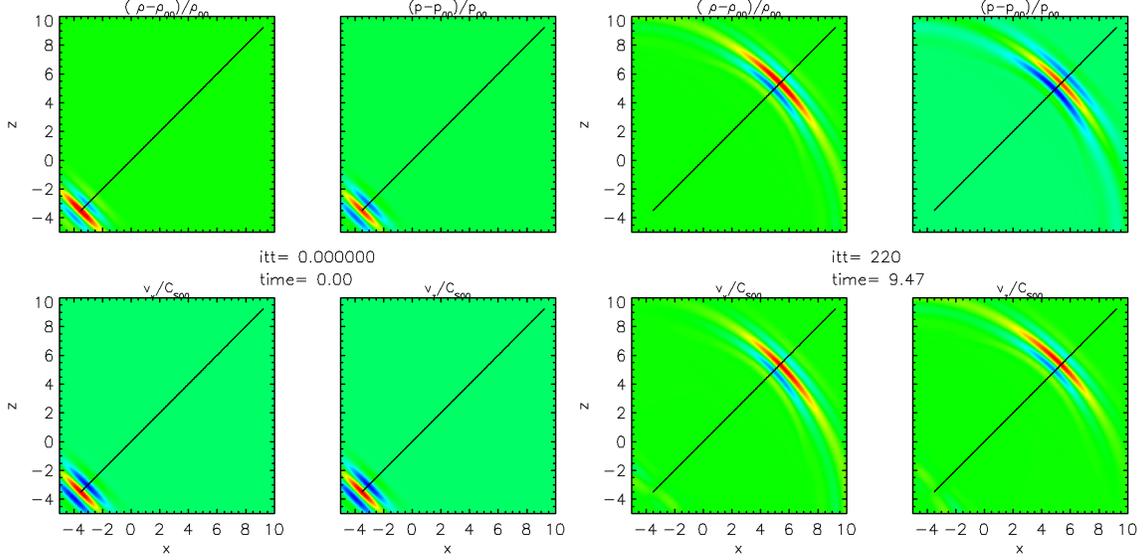


Figura 5: Paquete de ondas orientado a 45° con una anchura de $W_{\parallel} = 1.5$ y $W_{\perp} = 0.25$ en un medio homogéneo. Se ha marcado el rayo que corresponde a este paquete de ondas así como un trazador vertical del movimiento de su máximo en la dirección z .

3. Equilibrio no uniforme

Ahora podemos considerar la situación de equilibrio no uniforme introduciendo un gradiente de densidad. Este gradiente en densidad, al ir acompañado de velocidades nulas y presiones constantes, no genera ningún flujo y es independiente del tiempo, como podemos ver en las ecuaciones hidrodinámicas (ec 1).

$$\nabla f_{m,c,p} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u_{m,c,p}}{\partial t} = 0 \longrightarrow u_{m,c,p} = cte$$

Si lo comprobamos dejando evolucionar el sistema con dicho gradiente, vemos que la situación corresponde a una situación de equilibrio independiente del tiempo como se muestra en la figura 6. Se observa que el campo de presión es constante, por lo que el sistema se encuentra en equilibrio. Además se han representado las densidades del gradiente y la velocidad del sonido para comprobar que ninguna cantidad evoluciona en el tiempo.

Podemos calcular también la temperatura teórica del sistema sabiendo la variación de ρ , con lo que de manera general tenemos:

$$c_s = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot k \cdot T}{m}} \longrightarrow T = c_s^2 \frac{m}{\gamma k} \longrightarrow T = \frac{p_0 m}{k \rho(x, z)}$$

Donde m es la masa molecular del fluido, k es la constante de Boltzman y p_0 es la presión del equilibrio (que es constante). Esta relación nos está diciendo que si bajamos la densidad del medio a presión constante estamos aumentando la temperatura del mismo.

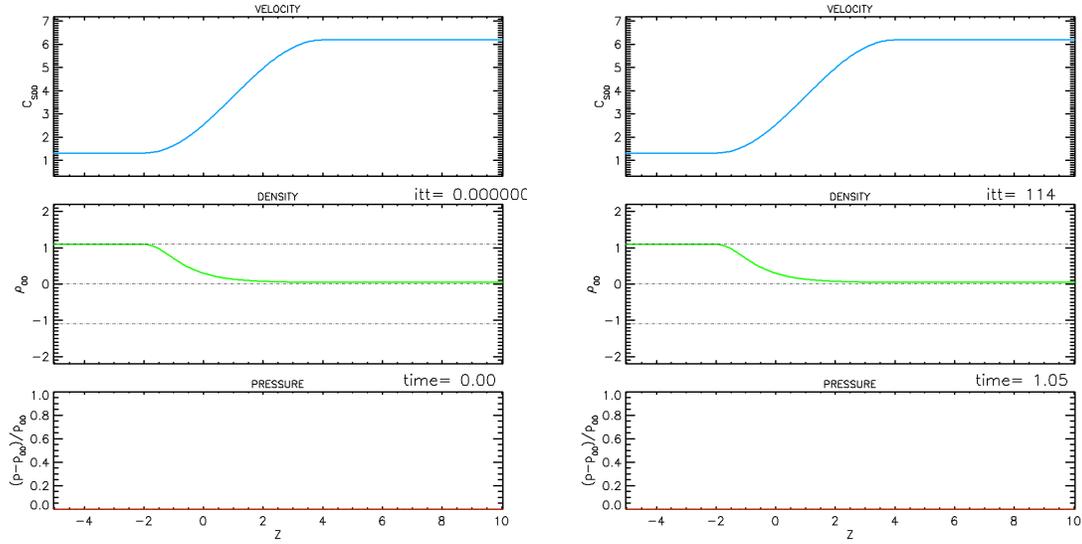


Figura 6: Gradiente en densidad representado junto a su correspondiente velocidad del sonido y dejado evolucionar con el tiempo.

4. Avance de un frente en medios no uniformes

Si miramos las propiedades que tiene un paquete de ondas al propagarse a lo largo de este medio inhomogéneo vemos que su velocidad de propagación cambia como la velocidad del sonido del medio, representada en la figura 6. Si monitorizamos el paquete, veremos que sigue un movimiento con la velocidad del sonido local, independientemente de la parte del paquete que cojamos.

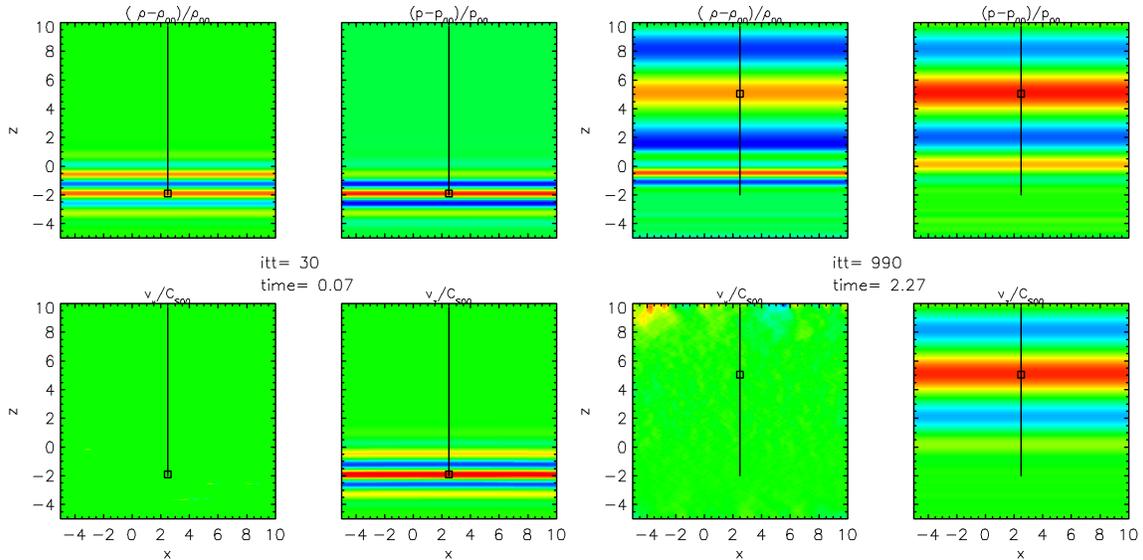


Figura 7: Paquete de ondas evolucionando en un medio inhomogéneo junto con el trazado de rayos y el seguimiento del paquete. Las componentes parásitas de la velocidad en x se deben al ruido numérico y son despreciables frente al equilibrio y la perturbación principal.

Si comparamos la longitud de onda del paquete con la longitud de variación del medio (figuras 6 y 8) vemos que la longitud característica del paquete es menor que el tamaño de variación del gradiente pero no mucho menor, esto es debido a la resolución limitada que tenemos disponible y los parámetros utilizados. Además, la longitud de onda varía al cambiar la onda de un medio a otro, haciéndose más larga en el medio donde la velocidad del sonido es mayor. Esto es debido a que si la frecuencia ha de mantenerse constante y la velocidad ha de aumentar, la longitud de onda se ve forzada a aumentar y así mantener la fase de la onda a lo largo del rayo.

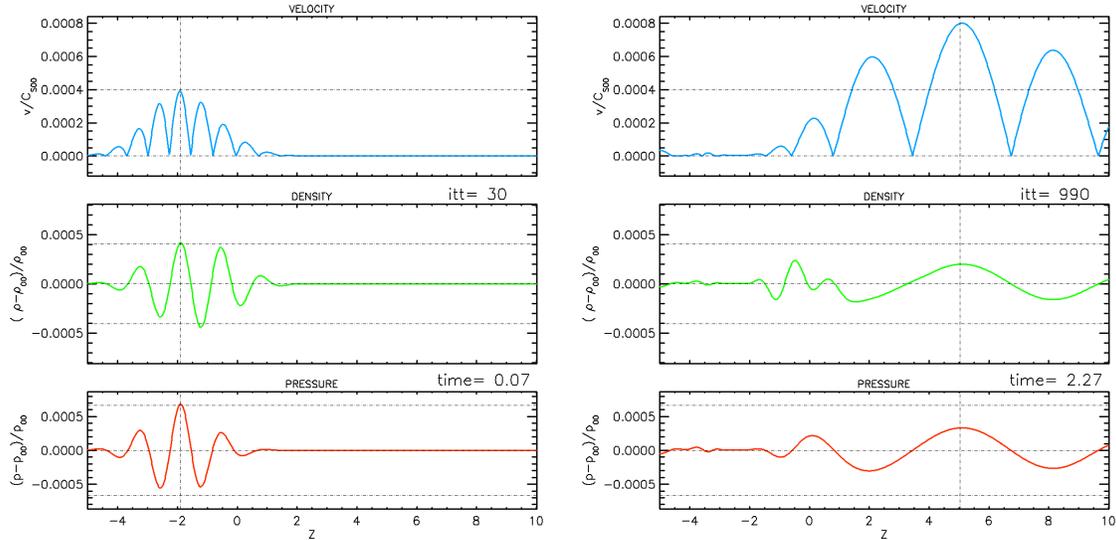


Figura 8: Corte de la figura 7 en la dirección z .

Se puede ver en la figura 8 como la velocidad del paquete aumenta una vez pasada la discontinuidad así como la densidad disminuye, difundiéndose significativamente al sobrepasar dicho gradiente. Se ve además en el marcador colocado, que el paquete de ondas no presenta dispersión significativa. El trazador puesto en el máximo, se observa que se mantiene aproximadamente en el máximo durante toda la evolución y el aumento de la velocidad es debido al cambio en la velocidad del sonido. Cabe esperar por tanto (como de hecho se ha observado) que ya que el paquete no presenta dispersión significativa, cualquier trazador que se ponga tanto en nodos como en puntos medios mantenga su posición relativa respecto de la fase del paquete.

A parte del gradiente en densidad de la figura 6, se ha implementado un medio con una estratificación mucho más abrupta, consistente en una tangente hiperbólica que genera cambios mucho más rápidos en la dirección de propagación y la velocidad. Este cambio repentino simula una discontinuidad como la de una interfase de dos medios. Todas estas experiencias se pueden realizar cambiando los parámetros `itype` y `shape` del fichero `datain.dat`.

5. Cálculo de la trayectoria de los rayos en medios no uniformes

Conocido el vector de ondas y la posición inicial del paquete, así como la variación de densidad del medio, podemos calcular la trayectoria que seguirá nuestro paquete y dibujarla con el trazado de un rayo resolviendo las ecuaciones 4 y aplicando las condiciones iniciales de cada caso.

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= c_{seq} \vec{e}_k \\ \frac{dk}{dt} &= -k \nabla c_{seq}(r)\end{aligned}\tag{4}$$

En este caso se ha decidido resolver las ecuaciones mediante métodos numéricos como el método de Euler de primer orden, para dar la posibilidad de introducir diferentes inhomogeneidades al medio en el futuro (como la tangente hiperbólica mencionada antes). Para hacer el gradiente se ha usado la rutina creada para hacer las derivadas en 2 dimensiones (`deriv_2d.pro`).

Todo esto permite calcular, dado el medio del apartado anterior, la trayectoria de un rayo que alcanzase el máximo y volviera a bajar en el interior de nuestro dominio, siendo así reflejado hacia abajo de nuevo. Si hacemos este cálculo obtenemos que el ángulo de \vec{k}_0 respecto de x no debe ser mayor de 77° si queremos que retorne, obteniendo la figura 9 para aquel rayo en el que $\theta = 77$.

6. Refracción de ondas sonoras en medios no uniformes

Si realizamos el experimento con los parámetros anteriores obtenemos la figura 9, en la que observamos como el rayo sigue la trayectoria calculada, pero también observamos en el vídeo adjunto (`animacion_refraccion.avi`) como parte de la onda sigue propagándose en el segundo medio.

Cabe esperar que la onda se refleje cuando pasa a un medio con una velocidad del sonido mayor si esta llega con una inclinación no nula respecto del gradiente. Esto se debe a que si el frente de ondas llega con un cierto ángulo, la parte que se encuentra donde c_s es mayor genera un cambio de dirección del frente en dirección opuesta al gradiente de c_s .

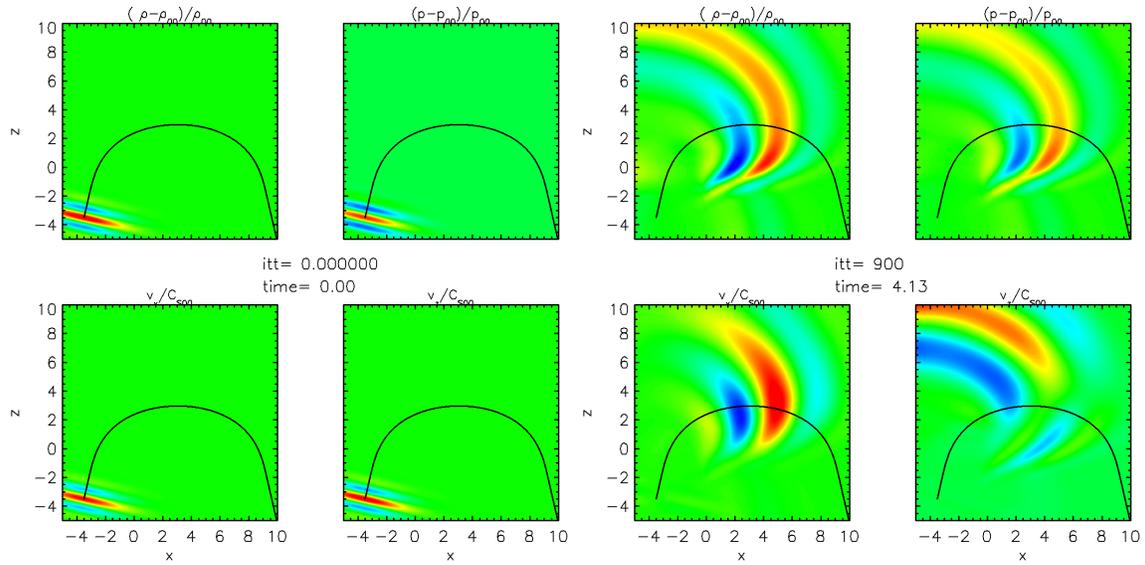


Figura 9: Evolución de un paquete de ondas a través de un medio inhomogéneo con la trayectoria calculada a través de la teoría del trazado de rayos. Simulación realizada con 1024x1024 puntos. Se adjunta una animación con toda la trayectoria de una realización equivalente pero con 512 puntos.

Si vamos más al extremo y creamos una discontinuidad más brusca con una tangente hiperbólica podemos obtener una reflexión total como la de la figura 10.

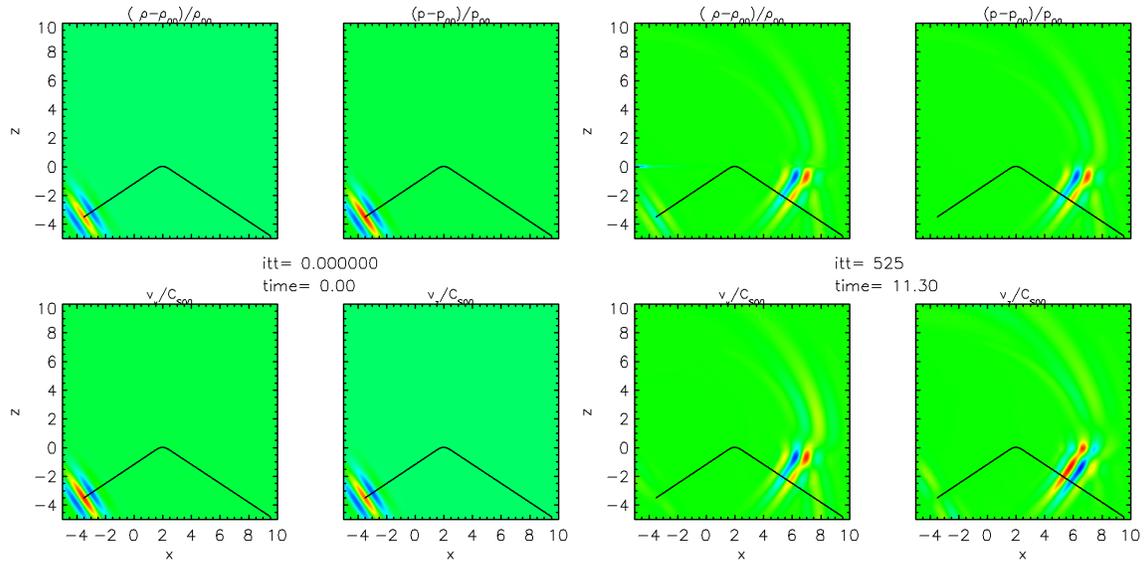


Figura 10: Evolución de un paquete de ondas a través de un medio discontinuo con la trayectoria calculada a través de la teoría del trazado de rayos. Simulación realizada con 512x512 puntos. Se adjunta una animación con toda la evolución.

Referencias

- [1] [Principio de Huygens](#)