Финансовый университет при правительстве Российской Федерации

Шамраева Виктория Викторовна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры
математики и анализа данных

Теория вероятностей и математическая статистика

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ: «Прикладная математика - ПМ»

КВАЛИФИКАЦИЯ (СТЕПЕНЬ): бакалавр

Дискретные случайные векторы

Пример 3. Игральная кость и 29 монет подбрасываются до тех пор, пока в очередном броске не выпадет ровно 7 ″орлов″. Пусть S – суммарное число очков, выпавших на игральной кости при всех бросках. Найдите:

1) математическое ожидание $E(S)$;

2) стандартное отклонение σ_S.

Решение.

Дискретные случайные векторы

Пример 4. Имеется 12 игральных костей.
В первый раз бросаются все игральные кости, во второй раз – только те, на которых в первый раз выпало четное число очков. Пусть S – сумма очков при втором броске.
Найдите $E(S)$ и $Var(S)$.

Решение.

Дискретные случайные векторы

Ковариацией с.в. X **и** Y называется математическое ожидание произведения отклонений X и Y от их математических ожиданий:

$$\boxed{\boldsymbol{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)(Y - E(Y)].}$$

Дискретные случайные векторы

Свойства ковариации с.в. X и Y :

1. $\boldsymbol{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$.

2. Если X и Y независимы, $\boldsymbol{Cov}(X, Y) = 0$.

3. $\boldsymbol{Cov}(X, Y) = \boldsymbol{Cov}(Y, X)$

4. $\boldsymbol{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \boldsymbol{Cov}(X, Y)$, если a, b, c, d – константы.

5. $\boldsymbol{Cov}(X + Y, Z) = \boldsymbol{Cov}(X, Z) + \boldsymbol{Cov}(Y, Z)$.

6. $\boldsymbol{Cov}(X, X) = \boldsymbol{Var}(X)$

Дискретные случайные векторы

Условной ковариацией с.в. X и Y относительно с.в. Z называется с.в.

$$\boxed{\boldsymbol{Cov}(X,Y\,|Z) = E[(X - E(X\,|Z)(Y - E(Y\,|Z)|Z].}$$

Свойства:

1. $\mathbf{Cov}(X,Y\,|Z) = E(XY\,|Z) - E(X\,|Z)\cdot E(Y\,|Z).$

2. $\mathbf{Cov}(X,E(Y\,|X)) = \mathbf{Cov}(X,Y).$

3. $\mathbf{Cov}(X,Y) = E[\mathbf{Cov}(X,Y\,|Z)] + \mathbf{Cov}(E(X\,|Z),E(Y\,|Z))$ –

формула полной ковариации.

Дискретные случайные векторы

Пример. Дано $P(X=30)=0{,}9$, $P(X=60)=0{,}1$,
$E(Y\,|X=30)=3$ *и* $E(Y\,|X=60)=2.$
Найдите $\boldsymbol{Cov}(X\,,Y\,)$ и $Var[E(Y\,|X\,)]$.

Решение.

Дискретные случайные векторы

Коэффициент корреляции

Дискретные случайные векторы

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется величина

$$\rho_{xy} = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Дискретные случайные векторы

Свойства коэффициента корреляции

1. $\rho_{xy} = \rho_{yx}$.

2. $|\rho_{xy}| \leq 1$ для любых случайных величин X и Y.

3. $\rho_{xy} = 0$ для независимых случайных величин X и Y.

4. Если X и Y связаны линейной зависимостью, то есть

$$Y = a + bX, \qquad b \neq 0,$$

то $|\rho_{xy}| = 1$, причём $\rho_{xy} = 1$ при $b > 0$, $\rho_{xy} = -1$ при $b < 0$.

5. Если $|\rho_{xy}| = 1$, то случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.

Дискретные случайные векторы

Пример 1. Распределение случайного вектора (X,Y) задается таблицей:

	X=0	X=1
Y=0	-1/3+(2/3)α	2/3-(2/3)α
Y=1	2/3-(2/3)α	(2/3)α

Найдите значение параметра α при котором коэффициент корреляции между X и Y равен $-1/4$.

Решение.

Дискретные случайные векторы

Пример 2. Распределение случайного вектора (X,Y) задается таблицей:

	Y=0	Y=1	Y=3
X=0	0,15	0,05	0,3
X= -1	0	0,15	0,1
X= -2	0,15	0	0,1

Найдите коэффициент корреляции ρ_{xy} и функцию регрессии X на Y.

Решение.

Условное математическое ожидание $E(X\,|Y = y)$, как функция от y называется **функцией регрессии** X на Y, то есть $g(y) = E(X\,|Y = y)$ – функция регрессии X на Y.

Дискретные случайные векторы

Корреляционное отношение

Дискретные случайные векторы

Корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ вводится на основе условного математического ожидания $E(X|Y)$ и условной дисперсии $\boldsymbol{Var}(X|Y)$.

Дискретные случайные векторы

Для случайных величин X и Y **корреляционное отношение $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$** задается формулой

$$\boxed{\eta_{X|Y} = \frac{\sigma(E(X|Y))}{\sigma(X)},}$$

где $\sigma(.)$ – стандартное отклонение.

Заметим, что во многих случаях удобнее иметь дело с квадратом корреляционного отношения

$$\boxed{\eta_{X|Y}^2 = \frac{\boldsymbol{Var}(E(X|Y))}{\boldsymbol{Var}(X)},}$$

который называют **коэффициентом детерминации**.

Дискретные случайные векторы

Свойства корреляционного отношения

1. $0 \le \eta_{X|Y} \le 1$.
2. $\eta_{X|Y} = 0$, если X и Y – независимые случайные отношения.
3. $\eta_{X|Y} = 1$, если X – функция от $Y, X = \varphi(Y)$.
4. $\eta_{X|Y} \ge \left|\rho_{X,Y}\right|$, где $\rho_{X,Y}$ - коэффициент корреляции X и Y.
5. $\eta_{X|Y} = |\rho_{X,Y}|$ в том и только в том случае, если найдутся константы α и $\beta \neq 0$, для которых с вероятностью 1 выполняется соотношение $\mathrm{E}(X|Y) = \alpha + \beta Y$.

Замечание. Свойства 1-3 позволяют интерпретировать корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ как характеристику степени функциональной зависимости X от Y.
Аналогично корреляционное отношение $\eta_{Y|X}$ можно трактовать как «**силу**» функциональной зависимости Y от X.

Дискретные случайные векторы

Если, **например**, $\eta_{Y|X} = 1$, а $\rho_{X,Y} = 0$, то можно говорить о **полной функциональной зависимости** Y от X.

При этом характер зависимости Y от X является, очевидно, **нелинейным**, поскольку $\rho_{X,Y} = 0$.

1. $0 \leq \eta_{X|Y} \leq 1$.
2. $\eta_{X|Y} = 0$, если X и Y – независимые случайные отношения.
3. $\eta_{X|Y} = 1$, если X – функция от $Y, X = \varphi(Y)$.
4. $\eta_{X|Y} \geq |\rho_{X,Y}|$, где $\rho_{X,Y}$ - коэффициент корреляции X и Y.
5. $\eta_{X|Y} = |\rho_{X,Y}|$ в том и только в том случае, если найдутся константы α и $\beta \neq 0$, для которых с вероятностью 1 выполняется соотношение $\mathrm{E}(X|Y) = \alpha + \beta Y$.

Пример. Распределение случайного вектора (X,Y) задается таблицей:

	$\boldsymbol{Y}$**=1**	$\boldsymbol{Y}$**=2**	$\boldsymbol{Y}$**=3**
$\boldsymbol{X}$**=0**	0,2	0,2	0,1
$\boldsymbol{X}$**= 4**	0,3	0	?

Найдите коэффициент детерминации $\eta^2_{X|Y}$.

Решение.

$$\boxed{\eta^2_{X|Y} = \frac{\boldsymbol{Var}(E(X|Y))}{\boldsymbol{Var}(X)},}$$

Дискретные случайные векторы

Сделаем добавочное предположение относительно вида регрессии.

Пусть $\varphi(x)$ **линейная** (линия регрессии графически изображается прямой). То есть

$$E(Y\,|X = x) = \varphi(x) = ax + b$$

Рассмотрим

$$F(a, b) = Var(Y\,|X = x) = E[(Y - aX - b)^2].$$

Условное математическое ожидание $E(Y\,|X = x_i) = \varphi(x_i)$, как функция от x_i называется **функцией регрессии** Y на X.

Дискретные случайные векторы

Задача. Найти такие значения a и b, при которых

$$F(a,b) = Var(Y\,|X\ = x) = E[(Y - aX - b)^2]$$

достигает **минимума**.

Решение.

Условное математическое ожидание $E(Y\,|X\ = x_i) = \varphi(x_i)$, как функция от x_i называется **функцией регрессии** Y на X.

Пусть $\varphi(x)$ **линейная** (линия регрессии графически изображается прямой). То есть

$$E(Y\,|X\ = x) = \varphi(x) = ax + b.$$

Дискретные случайные векторы

$$a = \rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X};$$

$$b = E[Y] - aE[X] = E[Y] - \rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}E[X].$$

Пусть $\varphi(x)$ **линейная** (линия регрессии графически изображается прямой). То есть

$$E(Y\ |X\ = x) = \varphi(x) = ax + b.$$

Задача. Найти такие значения a и b, при которых

$$F(a,b) = Var(Y\ |X\ = x) = E[(Y - aX - b)^2]$$

достигает **минимума**.

Дискретные случайные векторы

Пример. Рассмотрим инвестиции в два пакета акций. Возможные доходности, выраженные в %, и соответствующие вероятности заданы совместным распределением

	Y=0%	Y=10%
X=10%	0,05	0,15
X= 15%	0,25	0,35
X= 20%	0,15	0,05

Найдите **линейную регрессию** Y по x.

Решение.

Дискретные случайные векторы

Важно знать, каков будет в среднем порядок отклонений значений случайной величины Y от линейной регрессии.

Другими словами, какова **ошибка приближения**.

В качестве меры этой ошибки используется **условная дисперсия**

$$Var(X|Y)=E(X^2|Y)-E(X|Y)^2.$$

Дискретные случайные векторы

Для упрощения дальнейших вычислений предположим, что величины X и Y центрированы, то есть

$$E[X] = 0, \qquad E[Y] = 0.$$

Это равносильно тому, что начало координат смещается в точку $(E[X]; E[Y])$, или производится замена

$$X' = X - E[X];$$

$$Y' = Y - E[Y].$$

Дискретные случайные векторы

$$F(a,b) = Var(Y\,|X\ = x) = E[(Y - aX - b)^2] =$$

$$= E[Y^2 + a^2X^2 + b^2 - 2aXY - 2bY + 2abX] =$$

$$= E[Y^2] - 2aE[XY] + a^2E[X^2] =$$

$$= Var[Y] - 2aCov(X,Y) + a^2Var[X] =$$

$$= \sigma_Y^2 - 2a\rho(X,Y)\sigma_X\sigma_Y + a^2\sigma_X^2 =$$

$$= (a\sigma_X - \sigma_Y\rho(X,Y))^2 + \big(1 - \rho^2(X,Y)\big)\sigma_Y^2 =$$

$$= \big(1 - \rho^2(X,Y)\big)\sigma_Y^2.$$

$$\boxed{a = \rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X};\quad b = E[Y] - aE[X] = E[Y] - \rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}E[X].}$$

Часть 1 – Теория вероятностей
Раздел 2 – Математическая статистика

Абсолютно-непрерывные случайные величины

Условные распределения и условные плотности.
Условное математическое ожидание и его свойства.
Формула полного математического ожидания.
Условная дисперсия.
Формула полной дисперсии.
Условная ковариация случайных величин X и Y относительно случайной величины Z.
Формула полной ковариации.

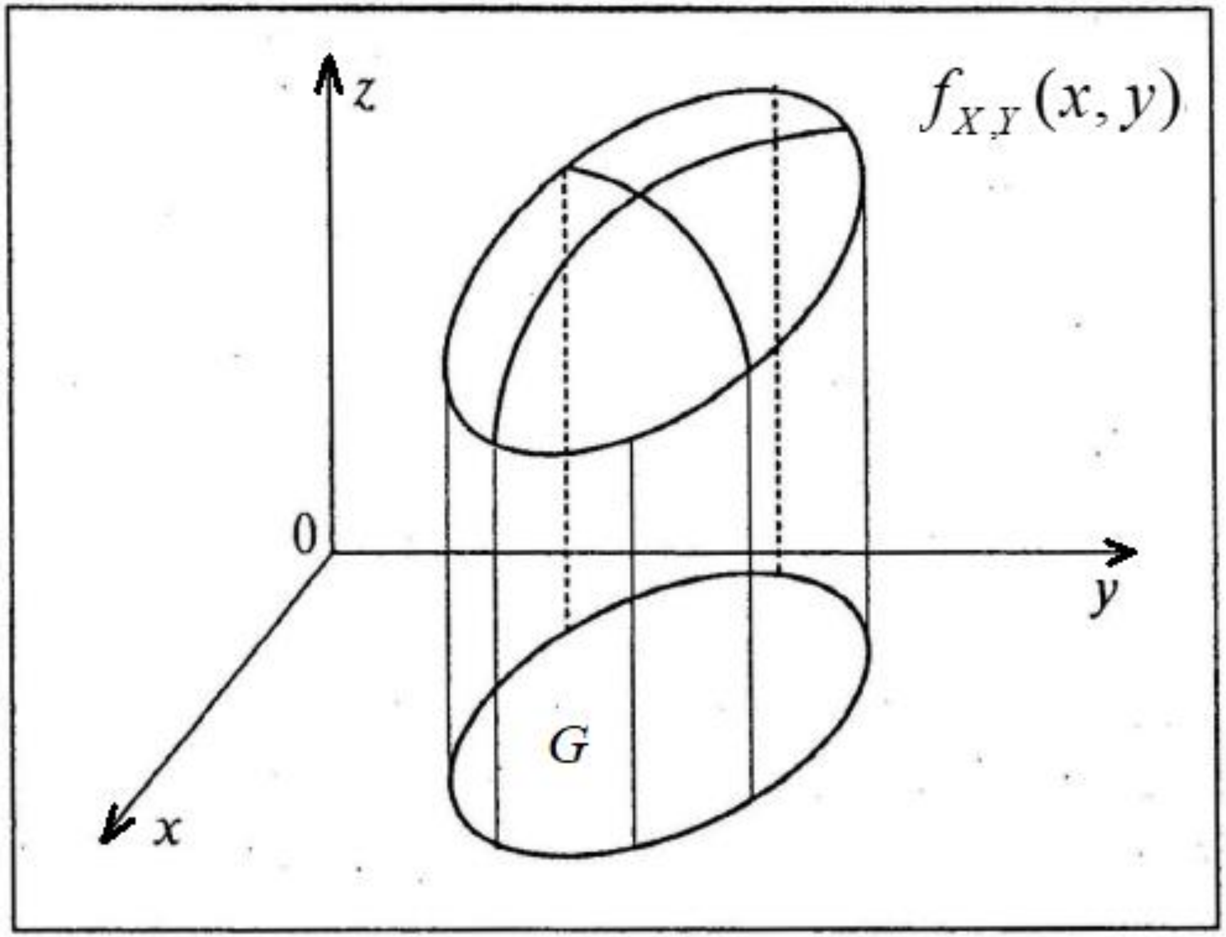
Распределение функций от случайных величин и векторов с абсолютно-непрерывным распределением.

Абсолютно непрерывные случайные векторы

Случайный вектор (X,Y) называется **абсолютно непрерывным**, если найдется неотрицательная функция $f_{X,Y}(x,y)$, называемая **плотностью распределения**, такая, что для любого множества $G \subset \mathbf{R}^2$, которое может служить областью интегрирования, вероятность попадания точки (X,Y) в G находится по формуле

$$\boxed{P((X,Y)\in G) = \iint\limits_G f_{X,Y}(x,y)dxdy,}$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы



$$P((X,Y)\in G)=\iint\limits_G f_{X,Y}(x,y)dxdy,$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Если (X, Y) — **абсолютно непрерывный случайный вектор**, то вероятность попадания точки (X, Y) в какую либо линию (график непрерывной функции) равна 0.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Функция распределения

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

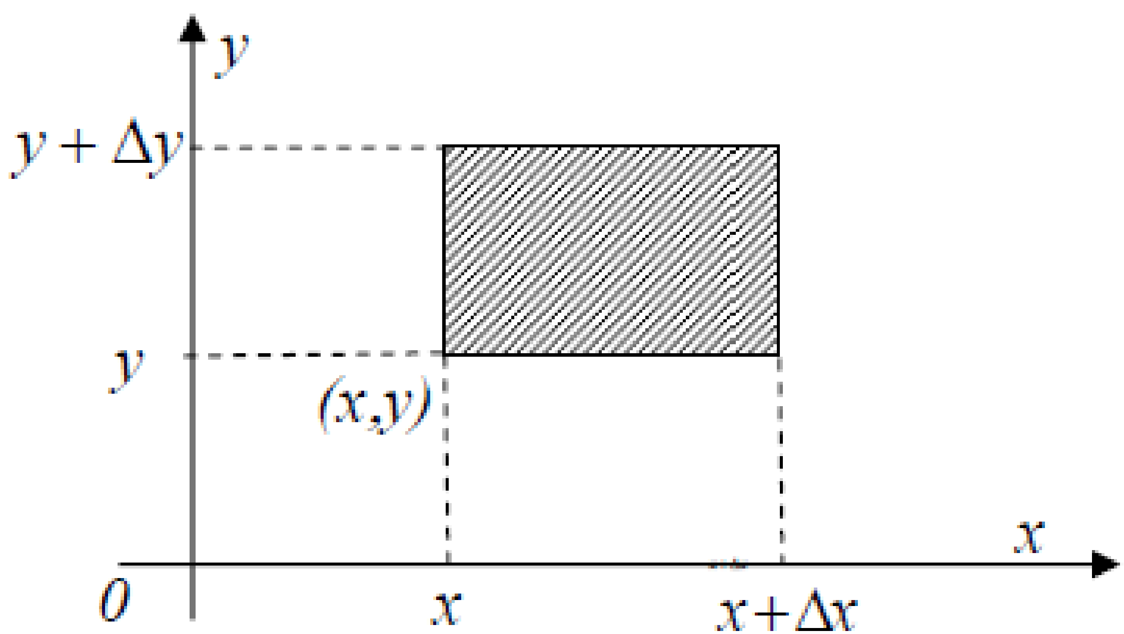
абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) является непрерывной и может быть представлена в виде несобственного интеграла

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = \iint\limits_{s \leq x, t \leq y} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt\,.}$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Геометрически $z = f_{X,Y}(x, y)$ – это некоторая поверхность распределения, она аналогична кривой распределения для одномерной случайной величины.

Аналогично можно ввести понятие элемента вероятности $f_{X,Y}(s, t)dsdt$.



Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Свойства плотности распределения

1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0.$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1.$$

3. $$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

в каждой точке непрерывности $f_{X,Y}(x,y)$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Предположим, что случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X \in \mathcal{X}) = 1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}$, $P(Y \in \mathcal{Y}) = 1$.

Пусть $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

Предположим, что случайный вектор (X, Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

$f_{X,Y}(x,) \geq 0.$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Компоненты X, Y **абсолютно непрерывного случайного вектора** (X, Y) также являются **абсолютно непрерывными**.

Их плотности вероятности можно задать соотношениями:

$$f_X(x) = \int_{\mathcal{X}} f_{X,Y}(x, y)dy\,,$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathcal{Y}} f_{X,Y}(x, y)dx\,.$$

Предположим, что случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X \in \mathcal{X}) = 1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}$, $P(Y \in \mathcal{Y}) = 1$.

Пусть $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

Предположим, что случайный вектор (X, Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

$f_{X,Y}(x,) \geq 0.$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Наконец, предположим, что Y имеет положительную плотность

$$f_Y(y) > 0, \qquad y \in \mathcal{Y}.$$

Последнее условие позволяет по аналогии с условной вероятностью определить **условную плотность распределения** X при условии, что Y приняла значение $y \in \mathcal{Y}$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

Аналогично определяется

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Вероятность попадания в прямоугольник двумерной случайной величины (X, Y) вычисляется следующим образом:

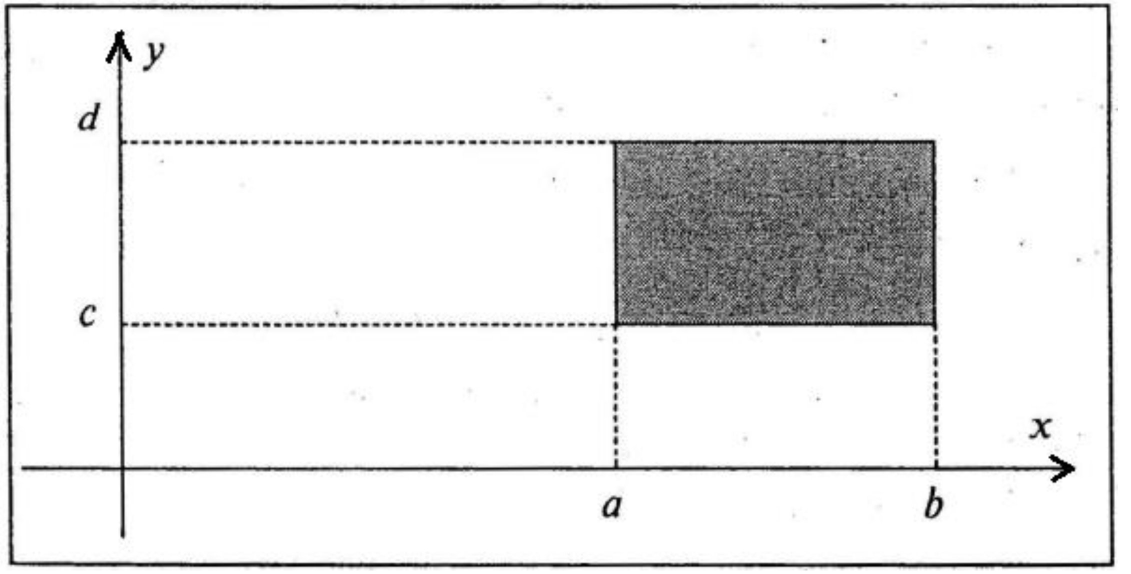
$$\boldsymbol{P}(\,a < X \leq b, c < Y \leq d) =$$

$$= F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - (F_{X,Y}\,(b, c) - F_{X,Y}(a, c))$$

Для **непрерывной случайной величины** вероятность попадания случайного вектора в прямоугольник может быть вычислена по формуле:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\,a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)dxdy}$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы



Если в $\boldsymbol{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)dxdy$ перейти к пределу $a \to -\infty, b \to \infty, c \to -\infty, d \to \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\, a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - (F_{X,Y}\,(b,c) - F_{X,Y}(a,c))}$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Зависимые и независимые случайные величины

Величина X **независима** от величины Y, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величины Y.

Для независимых величин выполняется следующие соотношения, т. е. критерии независимости:

1) $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y) =$
$= F_X\ (x)F_Y(y), \forall\ x, y;$

2) для **непрерывных** - $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall\ x, y;$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

В том случае, если критерии не выполняются хотя бы в одной точке, величины X и Y являются **зависимыми**.

Для независимых величин двухмерные формы закона распределения не содержат никакой дополнительной информации, кроме той, которая содержится в двух одномерных законах.

Таким образом, в случае зависимости величин X и Y, переход от двух одномерных законов к двухмерному закону осуществить невозможно.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Если случайные величины X, Y **независимы**, то условные плотности равны **безусловным**

$$f(x|y) = f_X(x), \qquad f(y|x) = f_Y(y).$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пример. Пусть двумерная случайная величина имеет функцию плотности $f(x, y) = x + y$, сосредоточенная в квадрате

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

Найти **условные плотности** и проверить **независимость** случайных величин X, Y .

Решение.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy,\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx,$$

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}; f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Числовые характеристики абсолютно-непрерывного случайного вектора

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Математическое ожидание функции случайного вектора вычисляется по формуле:

$$E[\varphi(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

от компонент

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x,y)\,dxdy, \quad E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(x,y)\,dxdy,$$

если только интегралы в правой части абсолютно сходятся.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Дисперсия от компонент

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x, y)dxdy, \; D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y)^2 f_Y(x, y)dxdy,$$

если только интегралы в правой части абсолютно сходятся.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Понятие **условного математического ожидания** можно распространить на абсолютно непрерывные случайные величины, при этом сохраняются все перечисленные свойства, которые нами были введены для дискретного случайного вектора.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пусть на одном и том же пространстве элементарных событий Ω заданы две **абсолютно непрерывные случайные** величины X и Y.

Условным законом распределения случайной величины X при условии $Y=y$, так же как и в случае **дискретных случайных величин**, называется любое соотношение, ставящее в соответствие значениям случайной величины X условные вероятности их принятия при условии $Y=y$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Условным математическим ожиданием с.в. X относительно с.в. Y называется с.в. $E(X|Y)$, которая принимает значение

$$E(X\,|Y = y)$$

при $Y = y$.

Условное математическое ожидание $E(X\,|Y = y)$, как функция от y называется **функцией регрессии** X на Y.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины при известном Y вычисляется по формуле:

$$x(y) = E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx .$$

Аналогично,

$$y(x) = E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} dy .$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пример. Задана двумерная случайная величина (X, Y) с плотностью распределения

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{3}(2x + y),$$

где $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$

Найдите функцию регрессии Y по x.

Решение.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Неслучайные условные числовые характеристики X можно получить через подходящую функцию $\varphi(x)$ в виде интеграла

$$E(\varphi(X)\,|Y=y)=\int_{\mathcal{X}}\varphi(X)f_{X|Y}(x|y)\,dx.$$

Случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X\in\mathcal{X})=1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}, P(Y\in\mathcal{Y})=1$, $\mathcal{X}\times\ \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, случайный вектор (X,Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x,y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Случайные условные числовые характеристики X, получаются, если значение y выбирается случайным образом в соответствии с распределением Y. Этот факт можно записать в виде

$$E(\varphi(X)\,|Y) = \int_{\mathcal{X}} \varphi(X) f_{X|Y}(x|Y)\,dx.$$

Случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X \in \mathcal{X}) = 1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}, P(Y \in \mathcal{Y}) = 1$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, случайный вектор (X, Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Таким образом, $E(\varphi(X)\,|Y)$ - случайная величина, которая при каждом элементарном исходе $\omega \in \Omega$, принимает значение

$$E(\varphi(X)|Y)(\omega) = \int_{\mathcal{X}} \varphi(X) f_{X|Y}(x|Y(\omega))dx.$$

Случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X \in \mathcal{X}) = 1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}, P(Y \in \mathcal{Y}) = 1$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, случайный вектор (X, Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Например, **случайный условный момент порядка k** можно представить как

$$E\left(X^k \,\middle|Y\right) = \int_{\mathcal{X}} x^k f_{X|Y}(x|Y)\,dx.$$

Если условная плотность $f_{X|Y}$ совпадает с обычной плотностью некоторого распределения $\mathcal{L}$, то используется обозначение

$$X|Y \sim \mathcal{L}.$$

Случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X \in \mathcal{X}) = 1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}, P(Y \in \mathcal{Y}) = 1$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, случайный вектор (X, Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Например, если, скажем, Y – положительная случайная величина, а условная плотность X имеет вид

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, y]; \\ y^{-1}, & x \in [0, y]; \end{cases}$$

то говорим, что X при фиксированном Y **равномерно распределена на отрезке $[\mathbf{0}, \boldsymbol{Y}]$**, и используем обозначение

$$X|Y \sim \mathrm{Unif}[0, Y].$$

Если условная плотность $f_{X|Y}$ совпадает с обычной плотностью некоторого распределения $\mathcal{L}$, то используется обозначение

$$X|Y \sim \mathcal{L}.$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Случайный вектор (X, Y) называется **равномерно распределённым** в области $G \subset \mathbb{R}^2$, если для него существует плотность распределения вида

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin G, \\ |G|^{-1}, & (x, y) \in G, \end{cases}$$

где $|G|$ - площадь G.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пример. Пусть двумерный случайный вектор (X,Y) **равномерно распределен** внутри треугольника

$$\Delta = \{(x, y): x > 0, y > 0, x + y < 2\}.$$

Найти **условное распределение** X и **условное математическое ожидание** при условии $Y = y$.

Решение.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Условное математическое ожидание $E(X\,|Y)$ обладает следующими **свойствами**:

1. $E(c|Y) = c$, где c- const.

2. $E(a\mathrm{X} + b|Y) = a\mathrm{E}\,(X|Y) + b.$

3. $E(X + Y|Z) = E(X|Z) + E(Y|Z).$

4. Если X и Y– независимые с.в., то $E\,(X|Y) = E\,(X).$

5. $E(\varphi(Y) \cdot X|Y) = \varphi(Y) \cdot E\,(X|Y).$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Теорема. Пусть $Geom(p)$ - **геометрическое распределение**, $n \in \mathbb{N}$; $Exp(\lambda)$- **показательное распределение**, $c \in \mathbb{R}_+$.
Тогда:

1) $X \sim Geom(p) \Rightarrow X - n|X > n \sim Geom(p)$;

2) $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X - c|X > c \sim Exp(\lambda)$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пример. Случайная величина распределена по **показательному закону**, $X \sim Exp(\lambda)$. Найти условное математическое ожидание $E(X|X > c)$, где константа $c > 0$.

Решение.

Теорема. Пусть $Geom(p)$ - **геометрическое распределение**, $n \in \mathbb{N}$; $Exp(\lambda)$- **показательное распределение**, $c \in \mathbb{R}_{+}$.
Тогда:
1) $X \sim Geom(p) \Longrightarrow X - n|X > n \sim Geom(p)$;
2) $X \sim Exp(\lambda) \Longrightarrow X - c|X > c \sim Exp(\lambda)$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Теорема (формула полного математического ожидания).

$$E(X)=E(E(X|Y)).$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Понятие условной дисперсии, как и понятие условного математического ожидания, можно распространить на **абсолютно непрерывные случайные величины**, при этом перечисленные свойства также сохраняются.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Условной дисперсией с.в. X относительно с.в. Y называется с. в.

$$D(X|Y) \equiv E[(X - E(X|Y))^2|Y],$$

которая принимает значение $D(X\,|Y = y)$ при $Y = y$.

Для **непрерывного** случайного вектора,

$$D(X\,|Y = y) = \int_{\mathcal{X}} (x - E(X|Y = y))^2\, f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Случайная X величина с вероятностью 1 принимает значения в промежутке $\mathcal{X}$, $P(X \in \mathcal{X}) = 1$, а Y – в промежутке $\mathcal{Y}, P(Y \in \mathcal{Y}) = 1$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ – декартово произведение промежутков $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, случайный вектор (X, Y) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y)$, равную нулю вне области $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Свойства условной дисперсии

1. $D(c|Y)=0$.

2. $D(aX+b|Y)=a^2D(X|Y)$.

3. $D(X|Y)=E(X^2|Y)-E(X|Y)^2$.

4. Если X и Y– независимые с.в., то $D(X|Y)=D(X)$.

5. $D(\varphi(Y)\cdot X|Y)=\varphi^2(Y)\cdot D(X|Y)$.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Теорема (**формула полной дисперсии**).

$$D(X) = E[D(X|Y)] + D[E(X|Y)].$$

$$D(Y) = E[D(Y|X)] + D[E(Y|X)].$$

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пример 1. Ежедневное количество покупателей магазина, совершивших покупку, описывается случайной величиной X, распределенной по **биномиальному закону** с параметрами $n = 500$ и $p = 0.54$. А сумма чека (в рублях) каждого из покупателей описывается случайной величиной Y, распределенной по **нормальному закону** с параметрами $m = 5500$ и $\sigma = 80$.

Оцените **методом Монте-Карло** ежедневную среднюю выручку магазина и ее дисперсию. В поля ответов введите полученные значения для среднего (E), дисперсии (Var) и среднеквадратического отклонения (σ) ежедневной выручки.

Решение.

Абсолютно-непрерывные случайные векторы

Пример 2. Средний ущерб от одного пожара составляет $3{,}2$ млн. руб. Предполагается, что ущерб распределен по **показательному закону**, а число пожаров за год - по **закону Пуассона**. Также известно, что за 10 лет в среднем происходит 19 пожаров.

Найдите:

1) математическое ожидание суммарного ущерба от всех пожаров за один год;
2) стандартное отклонение суммарного ущерба от пожаров за год.

Решение.

Теория вероятностей и математическая статистика

Конец лекции