Финансовый университет
при правительстве Российской Федерации

Шамраева Виктория Викторовна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры
математики и анализа данных

Теория вероятностей и математическая статистика

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ: «Прикладная математика - ПМ»

КВАЛИФИКАЦИЯ (СТЕПЕНЬ): бакалавр

Балльно-рейтинговая система для дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ: **«Прикладная математика - ПМ»**

Форма обучения: **Очная**

№ п/п	Вид учебной деятельности	Баллы	Максимум
			за семестр (модуль)
	Первая половина семестра		
1.	Посещение и ведение конспекта лекций и семинаров	0,25/0,25	1
2.	Выступление у доски или за преподавательским компьютером (активность)	0,2	2
3.	Выполнение ДЗ	0,25/0,25	2
4.	Аудиторная контрольная работа (часть 1)	0-10	10
5.	Аудиторная контрольная работа (часть 2)	0-5	5
			20
	Вторая половина семестра		
1.	Посещение и ведение конспекта лекций и семинаров	0,25/0,25	1
2.	Выступление у доски или за преподавательским компьютером (активность)	0,2	2
3.	Выполнение ДЗ	0,5	2
4.	Аудиторная контрольная работа (часть 3)	0-15	15
			20
	Всего за семестр (модуль)		40

Часть 1 – Теория вероятностей
Раздел 2 – Математическая статистика

Случайные векторы. Независимость дискретных случайных величин. Функция распределения случайного вектора и ее свойства.

Распределение дискретного случайного вектора и его компонент. Числовые характеристики случайного вектора. Ковариация и коэффициент корреляции.

Условные распределения и условные плотности.

Условное математическое ожидание и его свойства.

Формула полного математического ожидания.

Условная дисперсия.

Формула полной дисперсии.

Условная ковариация случайных величин X и Y относительно случайной величины Z.

Формула полной ковариации

Дискретные случайные векторы

Двухмерная случайная величина (X,Y) – совокупность двух одномерных случайных величин, которые принимают значения в результате проведения одного и того же опыта.

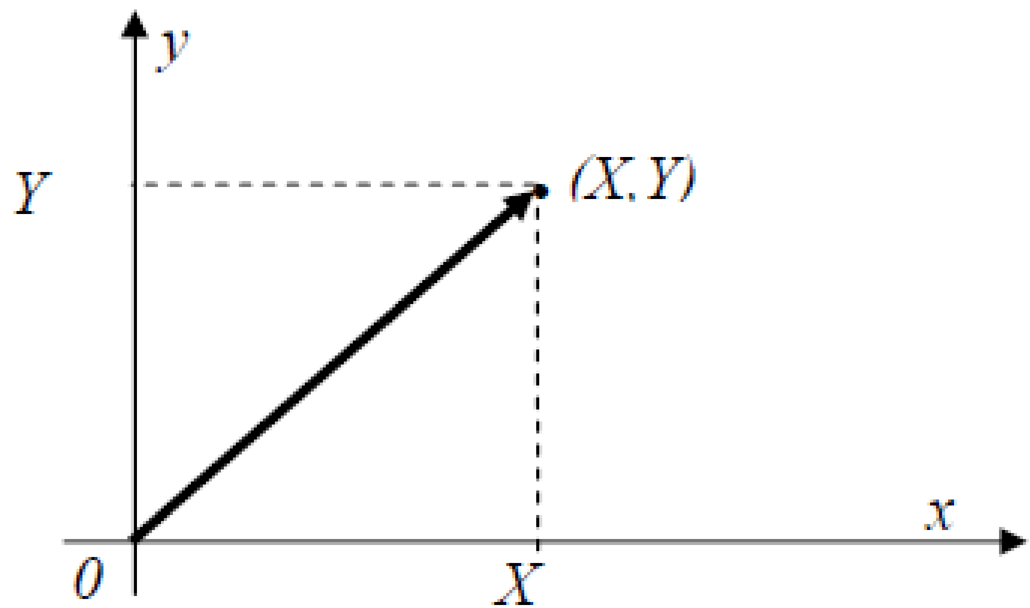
Двухмерные случайные величины характеризуются множествами значений Ω_X , Ω_Y своих компонент и **совместным (двухмерным) законом распределения**.

Закон распределения случайного вектора (X,Y) (двумерной случайной величины) называется **совместным распределением** с.в. X и Y.

В зависимости от типа компонент X, Y различают **дискретные**, **непрерывные** и **смешанные** двухмерные случайные величины.

Дискретные случайные векторы

Двухмерную случайную величину (X, Y) геометрически можно представить как случайную точку (X, Y) на плоскости xOy либо как случайный вектор, направленный из начала координат.



Дискретные случайные векторы

Совместной функцией распределения случайных величин X и Y или двумерного случайного вектора (X, Y) назовём функцию двух аргументов $F(x,y)$, равной вероятности события $\{X \le x,\ Y \le y\}$, то есть

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}.$$

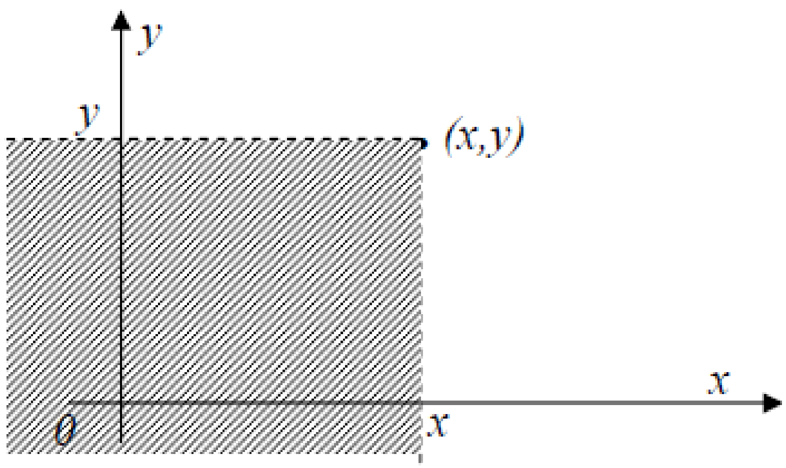
Эта функция называется также **двумерной функцией распределения**.

Частными функциями распределения называются функции распределения составляющих X и Y:

$$F_X(x) \quad \text{и} \quad F_Y(y).$$

Дискретные случайные векторы

Геометрически двухмерная функция распределения $F(x,y)$ - это вероятность попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x,y), лежащей левее и ниже ее.



Компонента X приняла значения, меньшие действительного числа x – это функция распределения $F_X(x)$, а компонента Y – меньшие действительного числа y – это функция распределения $F_Y(y)$.

Дискретные случайные векторы

Двумерные функции распределения обладают **свойствами**, аналогичными свойствам одномерных:

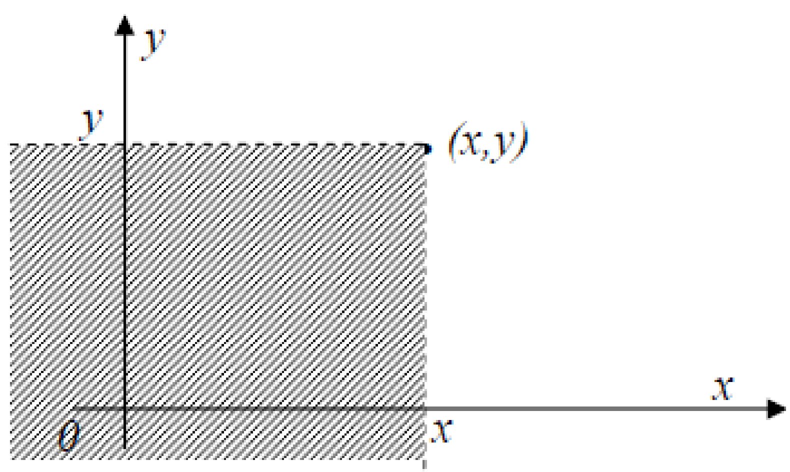
1. $0 \le F(x, y) \le 1$;

2. $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов;

3. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из аргументов;

4. $F(x, y)$ удовлетворяет соотношениям:

$$F(+\infty,+\infty)=1 \text{ и } F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty)= 0.$$



Закон распределения двумерной дискретной случайной величины

Дискретные случайные векторы

Двухмерная случайная величина (X, Y) является **дискретной**, если множества значений ее компонент Ω_X и Ω_Y представляют собой **счетные** множества.

Для описания вероятностных характеристик таких величин используется двухмерная функция распределения и матрица распределения.

Дискретные случайные векторы

Для дискретных с.в. X и Y с возможными значениями $x_1, . . . ,x_m$ и $y_1, \dots ,y_n$ их **совместное распределение** обычно записывается следующим образом:

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	....	$Y = y_n$
$X = x_1$	p_{11}	p_{12}	......	p_{1n}
......	......	......	......	......
$X = x_m$	p_{m1}	p_{m1}	......	p_{mn}

$$\sum_{i,j}^{n,m} p_{ij} = 1$$

Дискретные случайные векторы

Суммируя в этой таблице вероятности по строкам и столбцам, получаем распределения X и Y (**маргинальные распределения**):

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{x_m}$
$\boldsymbol{P}$	$p_{1\bullet}$	$\ldots$	$p_{m\bullet}$

и

$\boldsymbol{Y}$	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{y_n}$
$\boldsymbol{P}$	$p_{\bullet 1}$	$\ldots$	$p_{\bullet n}$

где

$$p_{i\bullet} = \sum_i p_{ij} \qquad\qquad p_{\bullet j} = \sum_j p_{ij}$$

	$\boldsymbol{Y = y_1}$	$\boldsymbol{Y = y_2}$	**.......**	$\boldsymbol{Y = y_n}$
$\boldsymbol{X = x_1}$	p_{11}	p_{12}	......	p_{1n}
......	......	......	......	......
$\boldsymbol{X = x_m}$	p_{m1}	p_{m1}	......	p_{mn}

Дискретные случайные векторы

Числовые характеристики дискретного случайного вектора

Математическое ожидание $E(Z)$ можно найти двумя способами $(Z = \varphi(X, Y))$:

- непосредственно, по формуле

$$\boxed{E(Z) = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}}$$

- или, предварительно построив распределение

$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{z_1}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{z_s}$
$\boldsymbol{P}$	p_1	$\ldots$	p_s

по формуле

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{s} z_k p_k$$

Дискретные случайные векторы

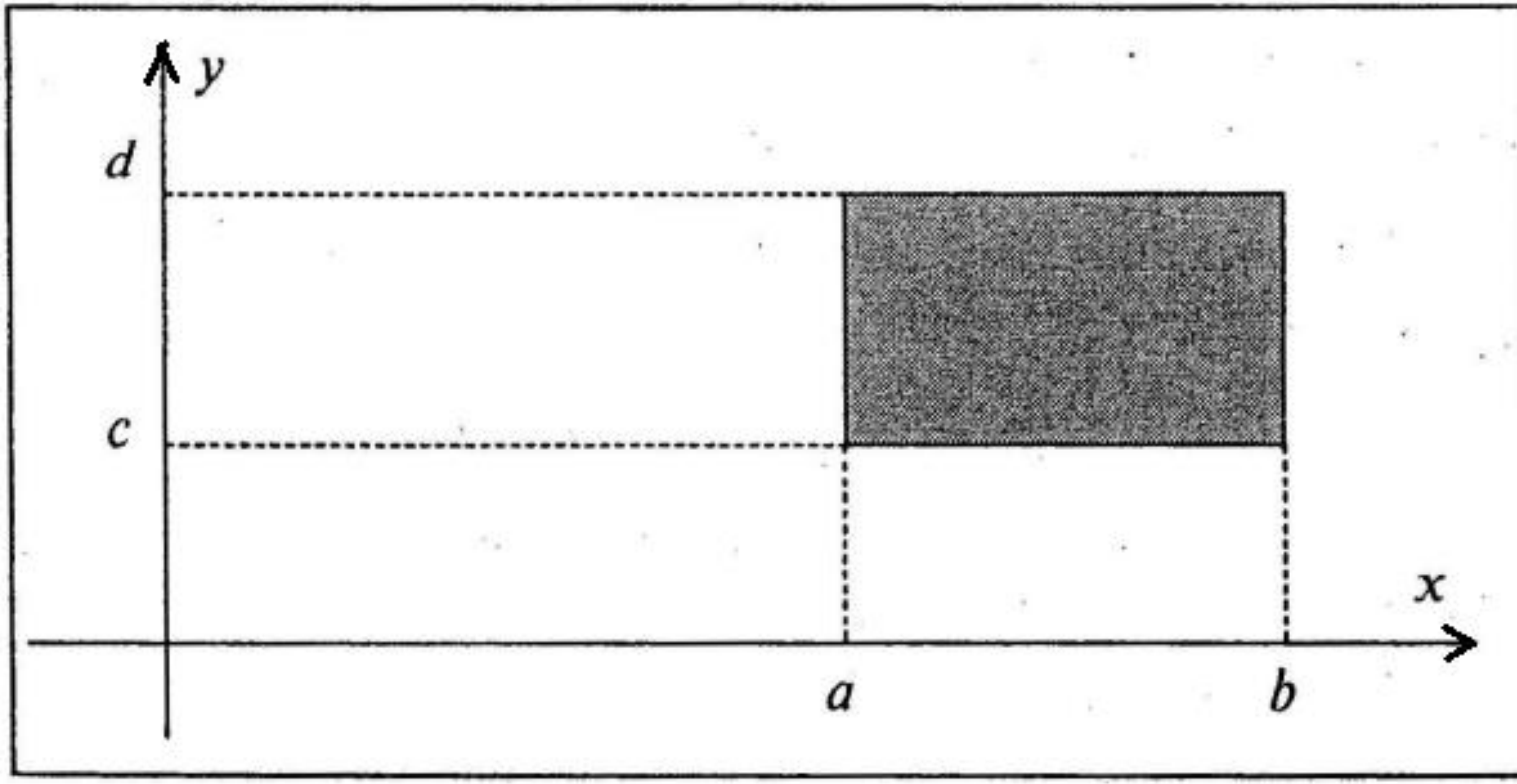
Вероятность попадания в прямоугольник двумерной случайной величины (X, Y) вычисляется следующим образом:

$$
\boldsymbol{P}(\, a < X \leq b, c < Y \leq d) =
$$

$$
= F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - (F_{X,Y}\,(b, c) - F_{X,Y}(a, c))
$$

Данное неравенство называется **неравенством прямоугольника** и отражает тот факт, что вероятность попадания в любой прямоугольник, рассчитанная с помощью совместной функции распределения, должна быть неотрицательной.

Дискретные случайные векторы

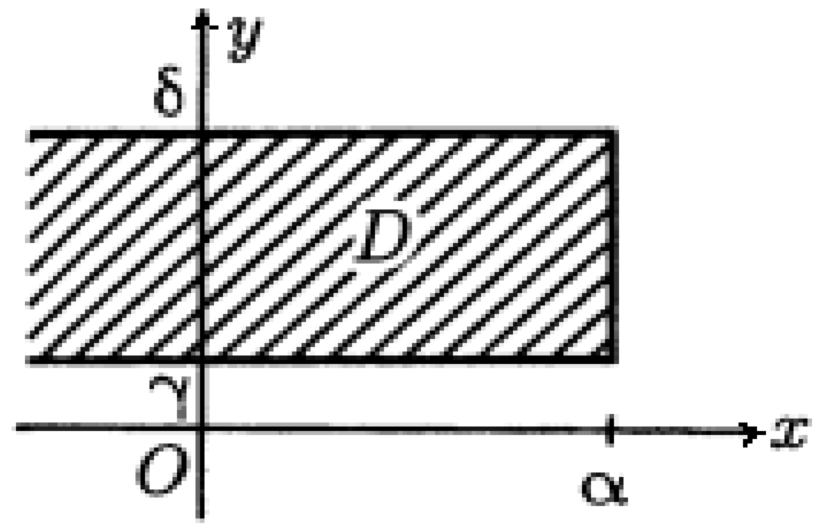


$$\boldsymbol{P}(\,a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - (F_{X,Y}\,(b,c) - F_{X,Y}(a,c))$$

Дискретные случайные векторы

Пример. Функция распределения системы двух случайных величин (X, Y) равна $F(x, y)$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D, ограниченную справа абсциссой α, снизу и сверху ординатами γ, δ.

Решение.



$$\boldsymbol{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - (F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,c))$$

Дискретные случайные векторы

В случае $n > 2$ случайных величин это неравенство обобщается с прямоугольника на ***n*-мерный параллелепипед**.

$$\boldsymbol{P}(\, a < X \le b, c < Y \le d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) -(F_{X,Y}\,(b,c) - F_{X,Y}(a,c)$$

Дискретные случайные векторы

Зависимые и независимые случайные величины

Величина X **независима** от величины Y, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величина Y.

Для независимых величин выполняется следующие соотношения, т. е. **критерии независимости**:

1) $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) =$
$= F_X\,(x)F_Y(y), \forall\, x, y;$

2) для **дискретных** - $p_{ij} = p_i p_j$, для $\forall\ i, j$.

Дискретные случайные векторы

В том случае, если критерии не выполняются хотя бы в одной точке, величины X и Y являются **зависимыми**.

Для независимых величин двухмерные формы закона распределения не содержат никакой дополнительной информации, кроме той, которая содержится в двух одномерных законах.

Таким образом, в случае зависимости величин X и Y, переход от двух одномерных законов к двухмерному закону осуществить **невозможно**.

Дискретные случайные векторы

Условные распределения и
условные числовые характеристики

Дискретные случайные векторы

Пусть (X, Y) – **дискретный случайный вектор** с законом распределения

$$f(x_k, y_l) = P(X = x_k, Y = y_l),$$

где x_k и y_l – возможные значения компонент X и Y, соответственно,

$$f_Y(y_l) = P(Y = y_l) = \sum_k f(x_k, y_l)$$

- **распределение случайной величины $\boldsymbol{Y}$**,

$$f_X(x_k) = P(X = x_k) = \sum_l f(x_k, y_l)$$

- **распределение случайной величины $\boldsymbol{X}$** .

Дискретные случайные векторы

Набор вероятностей

$$f_{X|Y}(x_k|y_l) = P(X = x_k|Y = y_l) = \frac{P(X = x_k, Y = y_l)}{P(Y = y_l)} = \frac{f(x_k, y_l)}{f_Y(y_l)}$$

для всех значений y_l, таких, что $f_Y(y_l) > 0$, определяет

условное распределение дискретной случайной величины $\boldsymbol{X}$ при условии, что $\boldsymbol{Y = y_l}$.

$$f(x_k, y_l) = P(X = x_k, Y = y_l),$$

$$f_Y(y_l) = P(Y = y_l) = \sum_k f(x_k, y_l) \qquad f_X(x_k) = P(X = x_k) = \sum_l f(x_k, y_l)$$

Дискретные случайные векторы

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины X при условии, что $Y = y_l$, называется **число**

$$\boxed{E(X|Y = y_l) = \sum_k x_k\, P(X = x_k|Y = y_l) = \sum_k x_k\, f_{X|Y}(x_k|y_l)}$$

Меняя ролями X и Y, получим

$$E(Y|X = x_k) = \sum_l y_l\, f_{Y|X}(y_l|x_k)$$

$$f_{X|Y}(x_k|y_l) = P(X = x_k|Y = y_l) = \frac{P(X = x_k, Y = y_l)}{P(Y = y_l)} = \frac{f(x_k, y_l)}{f_Y(y_l)} -$$

условное распределение дискретной случайной величины X при условии, что $Y = y_l$.

Дискретные случайные векторы

Аналогичным образом определяется условная вероятность события $\{Y = y_l\}$ при условии, что $X \in B$,

$$P(Y = y_l | X \in B) = \frac{P(Y = y_l,\ X \in B)}{P(X \in B)},$$

а также условное математическое ожидание Y при условии, что $X \in B$,

$$P(Y | X \in B) = \sum_l y_l \frac{P(Y = y_l,\ X \in B)}{P(X \in B)}$$

где

$$P(X \in B) = \sum_{x_k \in B} P(X = x_k)$$

$$P(Y = y_l, X \in B) = \sum_{x_k \in B} P(Y = y_l, X = x_k)$$

Дискретные случайные векторы

Условные распределения удовлетворяют всем свойствам распределения вероятностей, поэтому и условные математические ожидания также удовлетворяют всем свойствам обычных математических ожиданий.

Дискретные случайные векторы

Например, имеют место формулы

1. $E(\varphi(X)|Y=y)=\sum_k \varphi(x_k)\, f_{X|Y}(x_k|y)$.

2. $E[\sum_{k=1}^n X_k\,|Y=y]=\sum_{k=1}^n E[X_k\,|Y=y]$.

Дискретные случайные векторы

Условным математическим ожиданием с.в. $\boldsymbol{X}$ относительно с.в. $\boldsymbol{Y}$ называется **с.в.** $E(X\,|Y)$, которая принимает значение

$$E(X\,|Y = y)$$

при $Y = y$.

Дискретные случайные векторы

Условное математическое ожидание $E(X|Y)$ обладает следующими **свойствами**:

1. $E(c|Y)=c$, где c- const.

2. $E(aX+b|Y)=aE(X|Y)+b$.

3. $E(X+Y|Z)=E(X|Z)+E(Y|Z)$.

4. Если X и Y– независимые с.в., то $E(X|Y)=E(X)$.

5. $E(\varphi(Y)\cdot X|Y)=\varphi(Y)\cdot E(X|Y)$
(аналогично, $E(\varphi(X)\cdot Y|X)=\varphi(X)\cdot E(Y|X)$).

Дискретные случайные векторы

Условное математическое ожидание $E(X|Y=y)$, как функция от y называется **функцией регрессии** X на Y, то есть

$$g(y) = E(X|Y=y)$$ – функция регрессии X на Y.

Аналогично,

$$g(x) = E(Y|X=x)$$ – функция регрессии Y на X.

Функция регрессии характеризует среднее значение одной с.в. при известном значении другой.

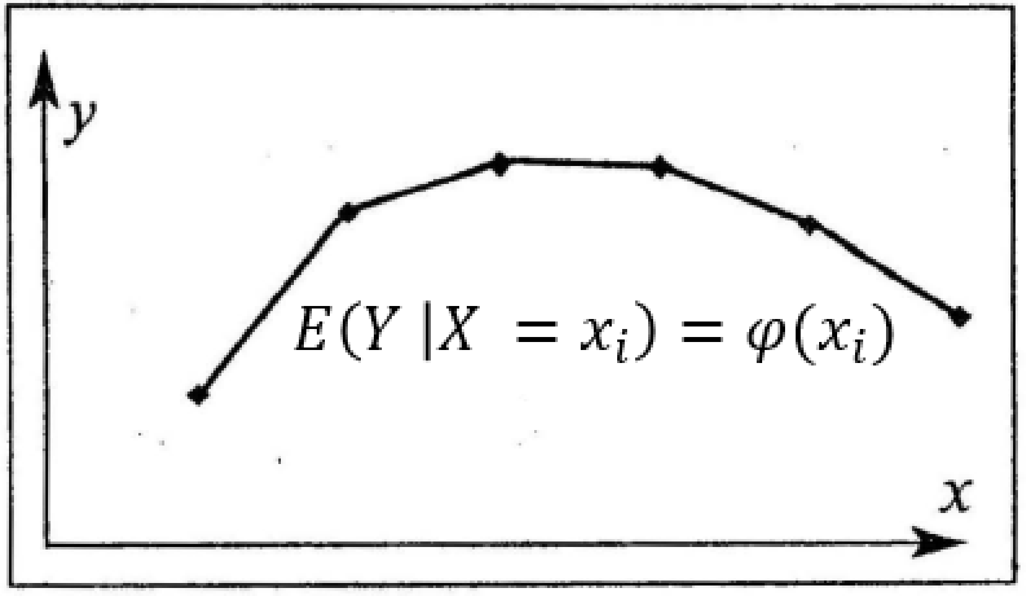
Если разброс невелик, то это может быть информативно!

Дискретные случайные векторы

Итак, условное математическое ожидание дискретного случайного вектора $Z = (X, Y)$, то есть

$$E(Y \mid X = x_i) = \varphi(x_i),$$

как функция от x_i называется **функцией регрессии** Y на X.
Линия регрессии в этом случае сводится к n изолированным точкам на плоскости, которые для наглядности соединяют отрезками прямых.



Дискретные случайные векторы

Аналогично,

условное математическое ожидание

$$E\left(X \,\middle|\, y \;= y_j\right) = \psi(y_j),$$

как функция от y_j называется **функцией регрессии** X на Y.

Дискретные случайные векторы

Теорема (**формула полного математического ожидания**).

$$E(X) = E(E(X|Y)).$$

Если Y – **дискретная случайная величина**, то указанное выше соотношение означает, что выполняется равенство

$$E(X) = \sum_{l} E(X|Y = y_l)\, P(Y = y_l).$$

Дискретные случайные векторы

Пример.

Дано

$P(Y = 20) = 0{,}2,\ P(Y = 70) = 0{,}8,$

$E(X\,|Y = 20) = 1,\ E(X\,|Y = 70) = 4.$

Найдите $E(X)$.

Решение.

Используя формулу полного математического ожидания, находим

$$E(X) = E[E(X\,|Y)] =$$
$$= E(X\,|Y = 20)\cdot P(Y = 20) + E(X\,|Y = 70)\cdot P(Y = 70) =$$
$$= 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}8 = 3{,}4.$$

Дискретные случайные векторы

Условной дисперсией с.в. X **относительно с.в.** Y называется **с. в.**

$$Var(X|Y) \equiv E[(X - E(X|Y))^2|Y],$$

которая принимает значение $Var(X\,|Y = y)$ при $Y = y$.

Значение $Var(X\,|Y = y)$ определяется формулой

$$Var(X\,|Y = y) = E[(X - E(X|Y = y))^2|Y = y] =$$
$$= \sum_k [x_k - E(X|Y = y)]^2 f_{X|Y}(x_k|y)$$

Дискретные случайные векторы

Свойства условной дисперсии

1. $Var(c|Y)$=0.

2. $Var(aX+b|Y)$=a^2 $Var(X|Y)$.

3. $Var(X|Y)$=$E(X^2|Y)$−$E(X|Y)^2$.

4. Если X и Y– независимые с.в., то $Var(X|Y)$= $Var(X)$.

5. $Var(\varphi(Y)\cdot X|Y)$=$\varphi^2(Y)\cdot$ $Var(X|Y)$.

Дискретные случайные векторы

Теорема (**формула полной дисперсии**).

$$Var(X) = E[Var(X \mid Y)] + Var[E(X \mid Y)].$$

$$Var(Y) = E[Var(Y \mid X)] + Var[E(Y \mid X)].$$

Дискретные случайные векторы

Пример 1. Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	Y=10	Y=20	Y=30
X=1	0,1	0,2	0,1
X=3	0,2	?	0,1

Найти $E(X)$, $D(X)$.

Дискретные случайные векторы

Пример 2. В первом броске участвуют 15 несимметричных монет. Во втором броске участвуют только те монеты, на которых в первом броске выпал «орел». Известно, что вероятность выпадения «орла» для данных несимметричных монет равна 0,65. Найдите: 1) математическое ожидание условной дисперсии числа «орлов», выпавших во втором броске, относительно числа «орлов», выпавших в первом броске; 2) дисперсию условного математического ожидания числа «орлов», выпавших во втором броске, относительно числа «орлов», выпавших в первом броске.

Решение.

Теория вероятностей и математическая статистика

Конец лекции