

新概念模拟电路

New Concept Analog Circuits

运放电路的频率特性
和滤波器



西安交通大学电工电子中心 杨建国

代理权声明

Analog Devices, Inc.（简称“ADI 公司”）为经本书作者授权的在中国（含港、澳、台地区）唯一享有电子版代理权的主体。未经许可，任何第三方公司、团体及个人不可对该书籍电子版在以上地区做营利性使用，也不可对电子版书籍版面设计、公司标识、文字、图表等内容进行删减修改。特此声明。

亚德诺半导体技术（上海）有限公司

Analog Devices, Inc.

2018 年 6 月

作者简介

杨建国，河南长垣人，乌鲁木齐出生，铁路子弟。1986 年西安交通大学信控系生物医学电子工程专业毕业，获工学学士；1991 年西安交通大学电信学院电磁测量专业毕业，师从何金茂教授，获工学硕士。2005 年西安交通大学电气工程专业毕业，师从王兆安教授，获工学博士。1999 年晋升副教授，2007 年晋升教授，2008 年任博士生导师。



主要教学工作：模拟电子技术，电子技术实验。

代表作：科学出版社 2015 年《你好，放大器》。此书理论扎实严谨，内容先进、实用性强，先以网络下载方式传播，广受好评。后由科学出版社出版。

目前研究方向

- 1) 小信号精细检测。以低噪声、低失真度、低功耗为主要研究方向，对生物电信号、地震信号等实施高质量检测。熟悉模拟前端。
- 2) 新型 ADC 研究。持有转置型 ADC 发明专利 2 项。
- 3) 精细信号产生。宽频范围低噪声信号发生，频率和幅度控制。定频率超低失真度波形发生。

自序

这是一套什么样的书呢？我也在问自己。

先说名字。本书称之为《新概念模拟电路》，仅仅是为了起个名字，听起来好听些的名字，就像多年前我们学过的新概念英语一样。谈及本书有多少能拿到桌面上的新概念，确实不多，但读者会有评价，它与传统教材或者专著还是不同的。

再说内容。原本是想写成模电教材的，对每一个主题，写成一个 Section。但写着写着，就变味了，变成了多达 148 个 Section 的，包罗万象的知识汇总。

但，本书绝不会如此不堪：欺世盗名的名字，包罗万象的大杂烩。本书具备的几个特点，让我有足够的信心将其呈现在读者面前。

内容讲究。本书的内容选择完全以模拟电子技术应涵盖的内容为准，且包容了大量最新知识。不该涵盖的，绝不囊括。比如，模数和数模转换器，虽然其内容更多与模电相关，但历史将其归属到了数电，我就没有在本书中涉及。新的且成熟的，必须纳入。比如全差分运放，信号源中的 DDS，无源椭圆滤波器等，本书就花费大量篇幅介绍。

描写和推导细致。对知识点的来龙去脉、理论基础，甚至细到如何解题，本书不吝篇幅，连推导的过程都不舍弃。如此之细，只为一个目的：读书就要读懂。看这本书，如果看不懂，只有一种可能，就是你没有好好看。要做到这一点，作者得懂，这很难。

类比精妙。类比是双刃剑：一个绝妙的类比，强似万语千言，而一个蹩脚的类比，将毁灭读者的思维。书中极为慎重的，给出了一些精妙的类比，不是抄的，全是我自己想出来的。这源自作者对知识的爱——爱则想，想则豁然开朗。晶体管中的洗澡器，反馈中的发球规则，魔鬼实验，小蚂蚁实现的蓄积翻转方波发生器，水圈子形成的开关电容滤波器等，不知已经让多少读者受益。

有些新颖。反馈中的 MF 法，滤波器中基于特征频率的全套分析方法，中途受限现象，都是作者深思熟虑后提出的。这些观点或者方法，也许在历史文献中可以查到，也许是我独创，我不想深究这个，唯一能够保证的是，它们都是我独立想出来的。

电路实用。书中除功放和 LC 型振荡器外，其余电路均为我仿真或者实物实验过，是可行的电路。说的天花乱坠，一用就漏洞百出，这事我不干。

有了这几条，读者就应该明白，本书是给谁写的了。

第一，以此为业的工程师或者青年教师，请通读此书。一页一页读，一行一行推导，花上三年时间彻读此书，必有大收益。

第二，学习《模拟电路技术》的学生，可以选读书中相关章节。本书可以保证你读懂知识点，会演算习题，也许能够知其然，知其所依然。

第三，参加电子竞赛的学生，可以以第三册运放和负反馈、第六、七册信号处理电路为主阅读。书中大量实用电路，对实施设计是有用的。

此书写到现在，已经近 4 年，我能保证自己是认真的，但无法保证书中没有错误。老杜说，书是改不完的，我听从了，就提交了，且读且改着吧。

读者所有修改建议，可以发信给我的电子邮箱：yjq@xjtu.edu.cn。

声明

书中出现的凌力尔特公司(Linear Technology)于 2017 年被 ADI 公司收购，这是一项战略合并，ADI 公司和凌力尔特公司的合并打造了最具规模的领先模拟技术公司。此书大部分章节写作完成于这项收购发生之前，故书中涉及到的 Linear 产品，仍然沿用原产品名称。特此声明。

杨建国

2018 年 6 月 18 日星期一，于西安

感谢

1000 余页的书稿，共五册，我花费了近 4 年的时间。因为急着给电子竞技的学生用，才匆忙交付印刷，书中难免有遗漏和错误。

本书绝大部分内容都是我亲手实验或者仿真过的，只有功率放大、LC 型正弦波发生器是我较为生疏的，因此也没有给出举例什么像样的实例。有些遗憾，但万事没有十全的。

感谢我的夫人，在此喧嚣社会中，能一如既往支持我。其实她压根就不懂模拟电路，但她清楚什么是正经事，这就够了。对我来讲，人生一世有此知音足矣。感谢我的儿子，年轻人充满正能量，阳光一样的笑容吸引着我，也督促着我。

感谢西安交通大学、西安交通大学电气工程学院，以及电工电子教学实验中心，给了我良好的工作平台，也给了我足够的施展空间。还有很多支持我工作的领导、同事，还有那些可爱的学生。

感谢 ADI 公司(Analog Devices, Inc.)对本书写作的支持。

2017 年 6 月 14 日

致应劼立

应劼立，是我 2015 年秋季教过的医电专业本科生，于 2016 年夏季不幸因病去世。读书的时候，他就喜欢上我的课，也与其父分享了我们师生之间的快乐。我也一样，喜欢他。想起他的笑容，想起他追问我的样子，又欣慰，又惋惜。

中年丧子，实实彻骨心痛。能为学校再做些什么，以告慰逝者，是其父应先生愿望之一。知此书完稿，应先生全额资助印刷，也替应劼立给母校做一些贡献。

此段文字，写于 2017 年 6 月 25 日，纪念应劼立。

关于 ADI

ADI 公司（纳斯达克代码：ADI）又名亚德诺半导体技术（上海）有限公司是高性能模拟、混合信号和数字信号处理(DSP)集成电路(IC)设计、制造和营销方面世界领先的企业，产品涉及几乎所有类型的电子电器设备。自 1965 年成立以来，我们一直专注于积极应对电子设备中信号处理的相关工程挑战。全世界有超过 100,000 家客户在使用我们的信号处理产品，这些产品在转换、调节、处理物理现象时发挥着十分重要的作用，例如将温度、压力、声音、光、速度和运动转换为电信号以用于各种电子设备。我们关注重要的战略市场，在这些市场我们的信号处理技术经常是帮助客户产品实现差异化的关键因素，如工业、汽车、通信和消费电子市场等。

我们生产各种创新产品——包括数据转换器、放大器和线性产品、射频(RF) IC、电源管理产品、基于微机电系统(MEMS)技术的传感器、其他类型传感器以及信号处理产品，包括 DSP 和其他处理器——全部是为满足广大客户的需求而设计。

更多信息请访问：<http://www.analog.com/cn/>，或扫描关注下方二维码。

如需联系 ADI 大学计划，请发邮件至：univ.program.China@analog.com



扫描关注 ADI 官方微信



扫描关注 ADI 校园计划

目录

4. 运放电路的频率特性和滤波器.....	1
4.1. 运放电路的频率特性.....	1
Section74. 从开环到闭环.....	1
Section75. 负反馈放大电路的稳定性分析.....	12
Section76. 频率失真.....	22
Section77. 频率特性的分析方法.....	25
4.2. 滤波器概述.....	27
Section78. 滤波器的一些常识.....	27
Section79. 从运放组成的一阶滤波器入手.....	35
Section80. 思考.....	45
Section81. 二阶滤波器分析——低通和高通.....	53
Section82. 二阶滤波器分析——带通、带阻和全通.....	58
Section83. 群延时——Group Delay.....	64
4.3. 运放组成的低通滤波器.....	66
Section84. 4 元件二阶 SK 型低通滤波器.....	66
Section85. 6 元件二阶 SK 型低通滤波器.....	72
Section86. 易用型二阶 SK 型低通滤波器.....	77
Section87. MFB 型低通滤波器.....	82
Section88. 高阶低通滤波器.....	86
Section89. 单电源低通滤波器.....	92
Section90. 滤波器设计中的注意.....	101
4.4. 运放组成的高通滤波器.....	105
Section91. 4 元件二阶 SK 型高通滤波器.....	105
Section92. 6 元件二阶 SK 型高通滤波器.....	108
Section93. 易用型二阶 SK 型高通滤波器.....	112
Section94. MFB 型高通滤波器.....	119
Section95. 高阶高通滤波器.....	126
Section96. 单电源高通滤波器.....	130
4.5. 运放组成的带通滤波器.....	135
Section97. 双频点带通滤波器——宽带通.....	135
Section98. 单频点选频放大器——窄带通.....	136
4.6. 运放组成陷波器.....	161
Section99. 双频点带阻滤波器——宽带阻.....	161
Section100. 陷波器——窄带阻滤波器.....	162
4.7. 运放组成全通滤波器.....	194
Section101. 二阶全通滤波器.....	194

4.8. 其它类型的模拟滤波器	204
Section102. 状态可变型滤波器分析	204
Section103. Biquad 滤波器分析	217
Section104. Fleischer-Tow 滤波器	230
Section105. 椭圆滤波器——有源	244
Section106. 椭圆滤波器——无源	280
4.9. 开关电容滤波器	328
Section107. 开关电容滤波器- Switched Capacitor Filter	328

4. 运放电路的频率特性和滤波器

所谓的频率特性，是指一个放大电路对不同频率的输入信号，所表现出的不同性能。很显然，任何放大电路内部或者外部，都不可避免的存在人为放置的实体电感、电容，或者固有存在的杂散电感、电容，它们有的并联于部件身旁，有的串联于回路之中，当输入信号频率发生改变时，它们的感抗、容抗就会发生变化，进而对电路性能产生改变。

放大电路的频率特性，就是研究电路性能随频率变化的规律，是电子技术特别是模拟电子技术中一个极为重要的环节。在本书 2.4 节，已经对晶体管放大电路的频率特性进行了深入阐述，本节主要对运放组成的放大电路，研究其频率特性。

而滤波器，就是利用这些规律，主动制作的一个放大电路。其电路性能随频率变化的规律，是人为主动设计的，以达到我们期望的规律，比如滤除低频量，保留高频量等。

4.1. 运放电路的频率特性

Section74. 从开环到闭环

开环增益的简化表达式

实际的开环增益

运算放大器的开环增益，是随频率变化而变化的，一般情况下都是随着频率的升高而降低，如图 Section74-1 所示。在横轴绝大多数区域，这根线是以-20dB/10 倍频下降的，在对数图中是一根直线。但是，我们能够看出，在左图 1MHz 以后，右图 10MHz 以后，即图中的红色区域内，这个直线变得不直了，这通常发生在开环增益低于 20dB 以下的区域。

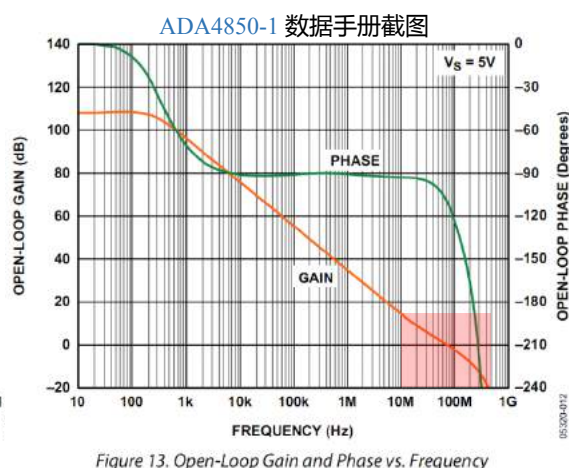
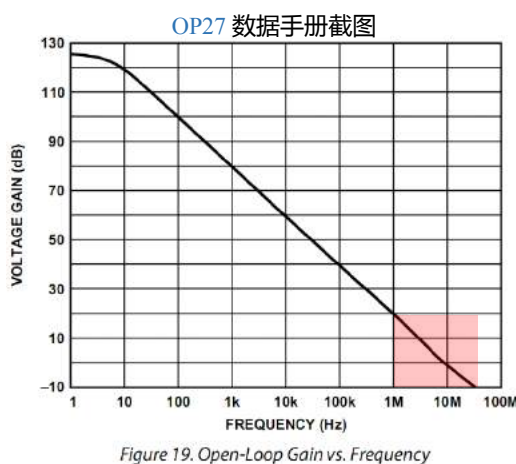


图 Section74-1 实际运放的开环增益曲线

对开环增益的初步简化

如果忽视这一段的异常，运放的开环特性可以用如下简化式表达：

$$A_{uo}(f) = A_{uom} \times \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_H}} \quad (1)$$

这是一个复数表达式，包含模和幅角。模是开环增益的大小，用头顶不带点的 A_{uo} 表示，幅角代表相移，用 φ_{uo} 表示，负值代表滞后相移。式(1)得到的幅频特性曲线——即增益的模，随频率变化的曲线——与实际运放增益曲线非常相似：在 f 远小于 f_H 的超低频率段，有一段平直区域，其值为 A_{uom} ，左图为 125dB，右图为 107dB，这被称为开环中频增益（为什么叫中频，而不叫低频，见图 Section46-1）； f 在截止频率附近，开环增益圆滑下降； f 远大于 f_H 阶段，开环增益开始以 -20dB/10 倍频的速率直线下降（在双对数图中）。

由式(1)可得开环增益的模和相移随频率变化规律如下：

$$A_{uo}(f) = A_{uom} \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_H})^2}} \quad (2)$$

$$\varphi_{uo}(f) = -\arctan(\frac{f}{f_H}) \quad (3)$$

图 Section74-2 是根据式(2)绘制的两个运放的开环增益曲线，分别为图中橙色、蓝色线，运放 1 的 $A_{uom1}=10^7$ ， $f_{H1}=1\text{Hz}$ ，运放 2 的 $A_{uom2}=10^6$ ， $f_{H2}=10\text{Hz}$ 。可以看出，两者的主要差别发生在低频段，随着频率的上升，到 100Hz 处，它们的开环增益已经完全重合，至少肉眼已经无法分辨它们的区别，同时，这两个运放具有相同的单位增益带宽 UGBW——开环增益下降到 1 倍时的频率，均为 10MHz，即 10^7Hz 。

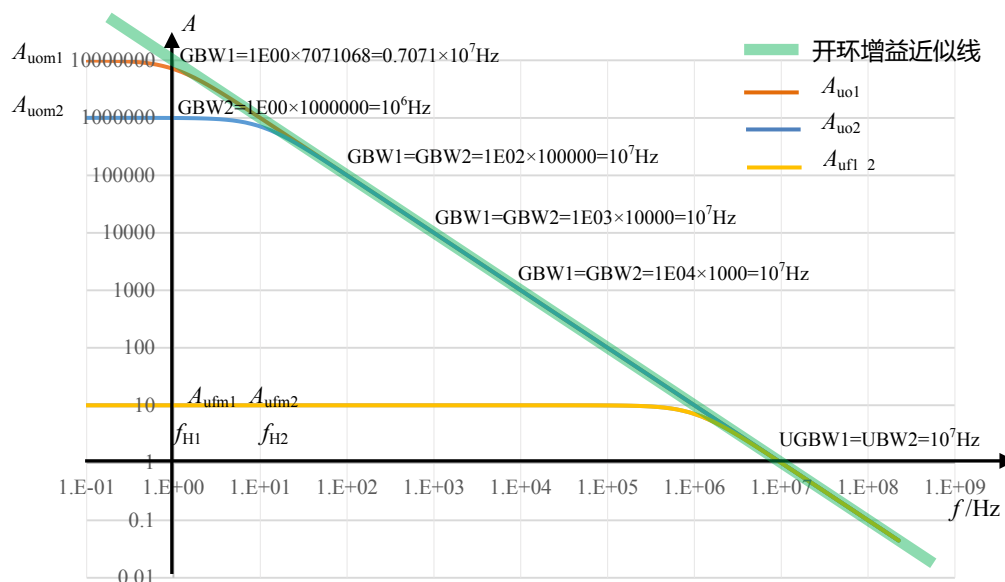


图 Section74-2 开环增益的进一步简化

用这样两个运放分别制作 10 倍同相比例器，产生的闭环增益的模用 $A_{uf1}(f)$ 和 $A_{uf2}(f)$ 表示，它们是随频率变化的，如图黄色曲线所示——两根线是重合的。它们在低频段保持闭环增益等于 10，同样的，这个值被称为闭环中频增益，用 $A_{ufm1}=A_{ufm2}=10$ 表示。随着频率上升，两个运放的开环增益不断下降，但是由它们形成的闭环增益却一直是 10，且一直重

合。这个事实一直坚持到大约 $1E05$ ，即 $10^5\text{Hz}=100\text{kHz}$ 时，肉眼能够看出它开始下降了，在 1MHz 处，已经能够看出来明显的下降，闭环增益变为大约 7.07 倍（当然，肉眼是看不出 7.07 的，我知道，是因为计算过）。这就是闭环上限截止频率，即闭环增益下降为闭环中频增益 A_{ufm} 的 0.707 倍所对应的频率，也称为闭环带宽，用 f_{Hf} 表示。

对开环增益的进一步简化

重温 Section60 内容，可知一个反馈系数为 F ，衰减系数为 M 的闭环放大电路，其闭环增益与运放开环增益之间的关系为：

$$\dot{A}_{uf}(f) = \frac{\dot{u}_o}{u_i} = \frac{M \times \dot{A}_{uo}(f)}{1 + F \times \dot{A}_{uo}(f)} \quad (4)$$

仔细研究式(4)，当 $|F \times \dot{A}_{uo}(f)|$ 远大于 1 时，分母的 1 可以忽略，造成闭环增益就等于 M/F ，与 $\dot{A}_{uo}(f)$ 无关。事实和理论分析都能告诉我们，在低频处开环增益的不同，对闭环增益曲线的带宽 f_{Hf} 几乎没有影响。这为我们提出一个新的开环增益简化模型奠定了基础，我们希望用一个更为简单的公式描述开环增益曲线：

$$\dot{A}_{uo}(f) = A_{uom} \times \frac{1}{0 + j \frac{f}{f_H}} = -j \times A_{uom} \times \frac{f_H}{f} \quad (1a)$$

此简化开环增益的模，称为开环增益近似线，如图 Section74-2 中绿色曲线，实际它是一条直线。在 100Hz 以后，用它来描述运放 1 的橙色、运放 2 的蓝色线，已经完全吻合。而对于低频段的不吻合，我们又完全不关心。

对开环增益的第三次变形

生产厂家在运放的数据手册中，一般不强调 A_{uom} 和 f_H ，而重点强调 GBW 或者 UGBW。因此，用 A_{uom} 和 f_H 表达的式(1a)不实用，我们需要利用 UGBW 或者 GBW 对其进行变形。

为此，我们需要重温 Section70 的基本概念：

GBW：增益带宽积。在运放的开环增益曲线上，指定频率处增益值与频率值的乘积。理论上说，GBW 是随频率不同而有所不同的，但是在一个很宽范围内，比如图 Section74-2 中 $10\text{Hz}-10\text{MHz}$ 范围内，它们是一个固定值 10^7Hz 。生产厂家给出的这个值，是在满足上述条件下选定一个频率测得的。

UGBW：单位增益带宽。在运放开环增益曲线上，增益等于 1 对应的频率。

从式(1a)，可以求得 GBW 和 UGBW，以 GBW 为例，取频率等于 1 为测试点，则

$$|\dot{A}_{uo}(1\text{Hz})| = A_{uom} \times \frac{f_H}{1\text{Hz}}$$

根据 GBW 定义，它是上式和 1Hz 的乘积：

$$\text{GBW} = A_{uom} \times \frac{f_H}{1\text{Hz}} \times 1\text{Hz} = A_{uom} f_H$$

据此，可以将式(1a)变形为式(1b)，以便于生产厂商的数据手册参数对应起来：

$$\dot{A}_{uo}(f) = -j \times A_{uom} \times \frac{f_H}{f} = -j \times \frac{\text{GBW}}{f} \quad (1b)$$

这样，就完成了对运放开环增益的最终简化，且使用数据手册提供的 GBW 来表示。

闭环增益带宽

重看图 Section46-1，一个放大电路的幅频特性，像一个梯形，有上限截止频率，也有下限截止频率，还有中频增益。因此，严格说，我们应该研究在两个频率变化方向上的增益变化规律——频率越来越高的上限截止频率，以及频率越来越低的下限截止频率。但是，我们知道，运放是一个直接耦合高增益放大器，它对低频或者直流是具有高增益的，不具备下限截止频率。因此本节，我们只研究随频率越来越高，引起的增益下降规律。

很显然，开环增益随频率下降的规律，将影响闭环增益随频率改变的规律。为研究闭环增益变化与开环增益变化之间的规律，需要以下定义。

闭环增益带宽

它是针对一个放大电路定义的，一般指-3dB 带宽，是指随频率升高，闭环增益下降到 A_{ufm} 的 0.707 倍时对应的频率，用 f_{Hf} 表示，也可用 f_{Hf-3dB} 表示。

闭环增益 ydB 平坦带宽

随着频率的上升，闭环增益与闭环中频增益 A_{ufm} 的 dB 差值超过 ydB 所对应的频率值，称为 ydB 平坦带宽，用 $f_{Hf\pm ydB}$ 表示；

闭环增益 ydB 平坦带宽，是对-3dB 带宽的一个普适性补充。比如某个放大电路，其中频增益为 10 倍，-3dB 带宽为 1MHz，是指当输入信号频率为 1MHz 时，其闭环增益刚好是中频增益的 0.707 倍。同时又指出，它的 0.5dB 平坦上限带宽为 100kHz，则说明在输入信号频率小于 100kHz 时，闭环增益和闭环中频增益的 dB 差值的绝对值，不会超过 0.5dB，即在此频率范围内，闭环增益具有 0.5dB 的平坦度，即：

$$|A_{uf}(dB) - A_{ufm}(dB)| < 0.5dB ; f_{in} < 100kHz$$

具体到此例，有：

$$19.5dB < A_{uf}(dB) < 20.5dB ; f_{in} < 100kHz$$

或者用倍数表达，0.5dB 代表 1.059 倍，-0.5dB 代表 0.944 倍：

$$0.944 < \frac{A_{uf}}{A_{ufm}} < 1.059 ; \text{或者} 9.44 < A_{uf} < 10.59 ; f_{in} < 100kHz$$

图 Section74-3 是对闭环带宽的示意。图中开环增益如图中橙色线，而蓝色线是其近似线。黄色是利用这个运放组成的 10 倍同相比值器，绿色是 100 倍的。其-3dB 带宽分别为 $f_{Hf1}=1MHz$ ， $f_{Hf2}=0.1MHz$ ，而对电路 2 绘出了-ydB 平坦带宽为 $f_{Hf2}=0.07MHz$ 附近。

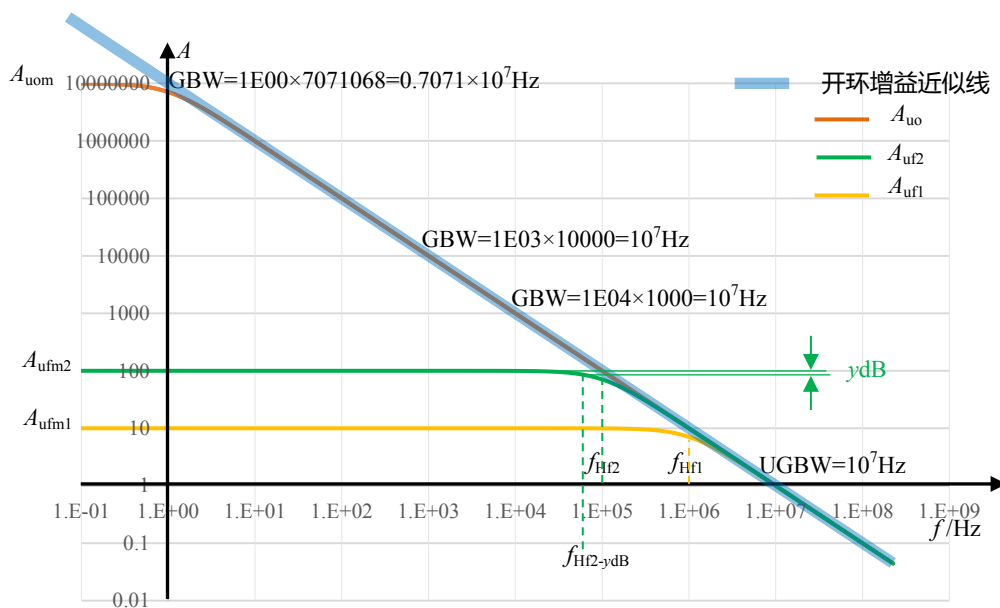


图 Section74-3 闭环带宽

y 问题的正问题

在此基础上，我们提出“y 问题”如下：一个运放的增益带宽积 GBW 已知，用它组成一个放大电路，其反馈系数为 F ，衰减系数为 M [参见本书 Section60]。求该放大电路的 -y dB 上限平坦带宽 f_{Hf-ydB} ，为书写方便，定义： $x = f_{Hf-ydB}$ 。

此问题有普适性，在运放电路中会频繁遇到。其具体物理含义，见图 Section74-3。

解：首先，根据给出的问题，结合本书 Section60 内容，可以得出如下约束：

$$A_{uf}(x) (\text{dB}) = A_{ufm} (\text{dB}) - y \text{ dB}$$

或者写成倍数关系为：

$$20 \times \log\left(\frac{A_{uf}(x)}{A_{ufm}}\right) = -y$$

即：

$$\begin{aligned} \frac{A_{uf}(x)}{A_{ufm}} &= 10^{-\frac{y}{20}} = k \\ A_{uf}(x) &= k \times A_{ufm} \end{aligned}$$

(5)

其中， $k = 10^{-\frac{y}{20}}$ 为题目已知条件中计算获得。

其次，根据方框图法，参见式(4)：

$$A_{uf}(f) = \frac{\dot{u}_o}{u_i} = \frac{M \times \dot{A}_{uo}(f)}{1 + F \times \dot{A}_{uo}(f)}$$

并将开环增益随频率变化的简化式(1b)代入式(4)，得到：

$$A_{uf}(f) = \frac{M \times \dot{A}_{uo}(f)}{1 + F \times \dot{A}_{uo}(f)} = \frac{M \times (-j \times \frac{GBW}{f})}{1 + F \times (-j \times \frac{GBW}{f})} = \frac{M}{F} \times \frac{1}{1 + j \frac{f}{F \times GBW}}$$

(Section74-1)

其模为随频率变化的实数：

$$A_{uf}(f) = |\dot{A}_{uf}(f)| = \frac{M}{F} \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{F \times GBW})^2}} \quad (\text{Section74-2})$$

其相移为随频率变化的实数：

$$\varphi_{uf}(f) = -\arctan(\frac{f}{F \times GBW}) \quad (\text{Section74-3})$$

这两个表达式的含义很清晰，对增益的模来说，当 $f=0$ 时，闭环增益的模具有最大值，即为 M/F ，随着频率 f 的逐渐增大，分母越来越大，即闭环增益的模逐渐变小，在一个关键频率 $F \times GBW$ 处，闭环增益的模变为闭环中频增益的 0.707 倍。因此有：

$$f_{Hf-3dB} = f_{Hf} = F \times GBW \quad (\text{Section74-4})$$

由于-3dB 的特殊性，一般都简写为 f_{Hf} 。

在相移上，随着频率的上升，闭环电路开始出现微弱的相移，到 $0.1f_{Hf}$ 时，相移大约为 -5.7° ，到 f_{Hf} 时，相移是 -45° 。

注意这两个表达式在 f 超过 f_{Hf} 后，最好不要再使用。原因是图 Section74-1 实际运放曲线中，在接近 UGBW 时，已经不在是直线，不能用前述简化模型表达。

根据约束条件式(5)，结合式(Section74-2)，用 x 代表待求解频率，得：

$$A_{uf}(x) = k \times A_{ufm} = \frac{M}{F} \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{x}{F \times GBW})^2}}$$

很显然， A_{ufm} 是中频闭环增益，就是 M/F (参见式 Section60-6)，代入得：

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{x}{F \times GBW})^2}} \quad (8)$$

式(8)已经给出了已知的 k ，与待求解的 x 的关系，解之：

$$\frac{1}{(F \times GBW)^2} x^2 + 1 - \frac{1}{k^2} = 0$$

此为 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一元二次方程标准式，按照中学数学结论即可解得：

$$x = \frac{(F \times GBW)^2}{2} \times \sqrt{4 \times \frac{1 - k^2}{(F \times GBW)^2 \times k^2}} = F \times GBW \times \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} \quad (9)$$

结合前述关于 x 的定义，可得式(Section74-5)：

$$f_{Hf-ydB} = F \times GBW \times \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}, \quad k = 10^{-\frac{y}{20}} \quad (\text{Section74-5})$$

这个表达式就是 y 问题的正问题答案：一个运放的增益带宽积 GBW 已知，用它组成一个放大电路，其反馈系数为 F ，衰减系数为 M ，则该放大电路的-ydB 上限平坦带宽 f_{Hf-ydB} 如式(Section74-5)。

据式(Section74-5)，也可以得到 y 问题的逆问题及其答案：一个放大电路，其反馈系数为 F ，衰减系数为 M ，要求其-ydB 上限平坦带宽为 f_{Hf-ydB} ，求运放的 GBW 。

$$GBW = \frac{f_{Hf-ydB}}{F} \times \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \quad k = 10^{-\frac{y}{20}}$$

(Section74-6)

注意，这两个公式在求解过程中利用了运放开环增益的简化模型，与实际运放的主要差异表现高频段，就是图 Section74-1 中红色区域，实际运放在这里已经不是直线，且相移已经不再是-90°。如果关键频率结论发生在这个区域，那么计算就会出现较大差异。因此，闭环增益越大，这个公式越准确。

举例 1：

电路如图 Section74-4 所示，为 10 倍同相比例器。已知运放为 AD8675，求该电路的-1dB 带宽。

解：第一，求解基本系数。

从电路可以看出，反馈系数和衰减系数分别为：

$$F = \frac{R_g}{R_f + R_g} = 0.1 ; M = 1$$

根据虚短虚断法，或者方框图法，均可求得 $A_{ufm}=10=20\text{dB}$ 。

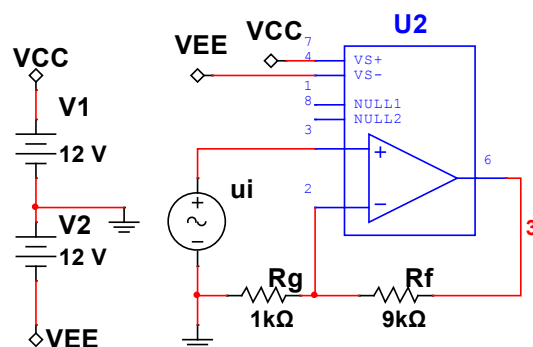
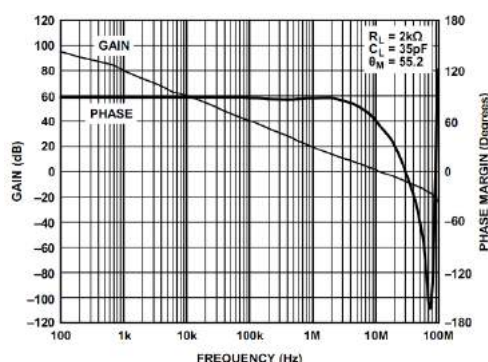


图 Section74-4 举例 1 电路

第二，查找运放关键参数。

从图 Section74-4a 截图中的增益频率曲线，以及数据表格中，可以查到 GBW 约为 10MHz。

GBW=1k×80dB=10MHz
GBW=10k×60dB=10MHz
GBW=900k×20dB=9MHz
GBW=11M×0dB=11MHz



DYNAMIC PERFORMANCE				
Slew Rate	SR	$R_L = 10 \text{ k}\Omega$	2.5	V/ μ s
Gain Bandwidth Product	GBP		10	MHz

图 Section74-4a AD8675 数据手册截图

第三，根据公式计算。

$y=1\text{dB}$ ，则 $k = 10^{-\frac{y}{20}} = 0.89125$ ，代入式(Section74-1)得：

$$f_{Hf-1\text{dB}} = F \times \text{GBW} \times \frac{\sqrt{1-k^2}}{k} = 0.1 \times 10\text{MHz} \times \frac{\sqrt{1-0.89125^2}}{0.89125} = 508.8\text{kHz}$$

即上述放大电路，在输入频率小于 508.8kHz 时，可以保证闭环增益不会比中频增益 20dB 小 1dB，即增益 dB 数不会小于 19dB。或者说，电压增益不会小于 8.9125 倍。

举例 2：

电路如图 Section74-5 所示，为-10 倍反相比例器。已知运放为 AD8675，求该电路的-1dB 带宽。

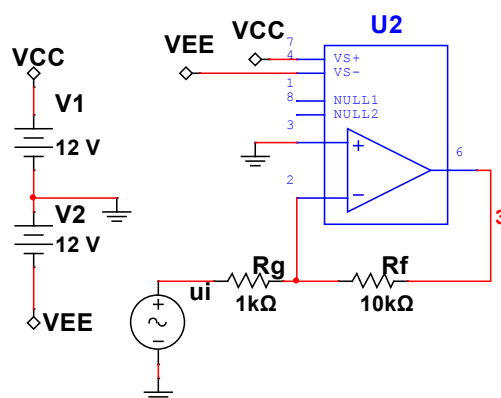


图 Section74-5 举例 2 电路

解：第一，求解基本系数。

从电路可以看出，反馈系数和衰减系数分别为：

$$F = \frac{R_g}{R_f + R_g} = \frac{1}{11} ; M = -\frac{R_f}{R_f + R_g} = -\frac{10}{11}$$

根据虚短虚断法，或者方框图法，均可求得 $A_{ufm} = -10 = 20\text{dB}$ 。

第二，确定运放关键参数， $GBW = 10\text{MHz}$ ，见举例 1。

第三，计算：

$y = 1\text{dB}$ ，则 $k = 10^{-\frac{y}{20}} = 0.89125$ ，代入式(Section74-1)得：

$$f_{Hf-1dB} = F \times GBW \times \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} = 0.0909 \times 10\text{MHz} \times \frac{\sqrt{1 - 0.89125^2}}{0.89125} = 462.6\text{kHz}$$

即上述放大电路，在输入频率小于 462.6kHz 时，可以保证闭环增益在-8.9125~-10 倍之间。

我们能够发现，反相放大电路和同相放大电路都实现 10 倍电压增益，但是同相放大电路的带宽要高于反相放大电路的。这缘自两个电路的反馈系数不同。

举例 3：

电路如图 Section74-6 所示，为 50 倍同相比例器。要求电路的-0.2dB 带宽大于 20kHz，选择合适的运放实现，并用仿真软件实测。

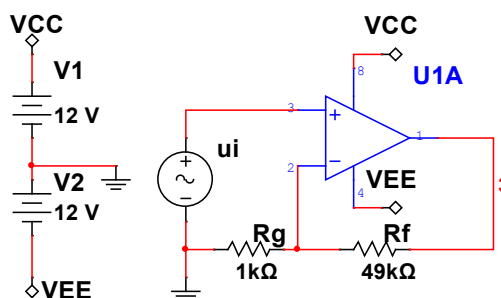


图 Section74-5 举例 3 电路

解：根据题目，得 $F=0.02$ ， $y=0.2\text{dB}$ ， $k = 10^{-\frac{0.2}{20}} = 0.97724$ ， $f_{Hf-y\text{dB}} = 20\text{kHz}$

据式[Section74-2]得：

$$\text{GBW} = \frac{f_{Hf-y\text{dB}}}{F} \times \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{20\text{kHz}}{0.02} \times \frac{0.97724}{\sqrt{1-0.97724^2}} = 4.60\text{MHz}$$

按此结论，应选在 $\text{GBW} > 4.6\text{MHz}$ 的运放，且供电电压可以为 $\pm 12\text{V}$ 。

ADI 公司的 [ADTL082](#)，具有 5MHz 带宽，可 $\pm 15\text{V}$ 供电，且价格不高，是一个良好的选择。仿真实验得到的闭环增益幅频特性如图 Section74-6 所示。

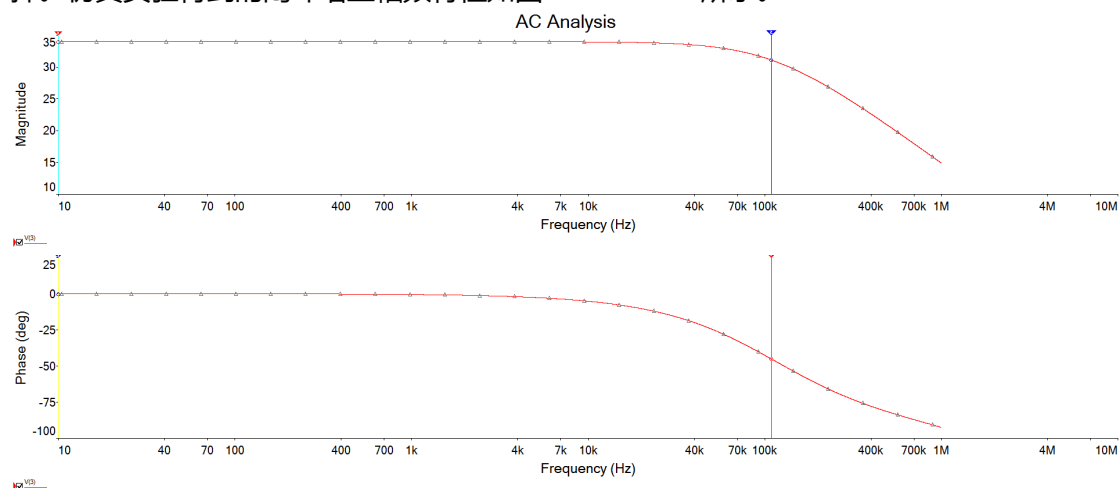


图 Section74-6 举例 3 用 [ADTL082](#) 仿真交流分析结果

具体各频率处的增益和相移如下表所示。

f	10Hz	20.14kHz	24.16kHz	100.25kHz	108.9kHz	112.3kHz
A_{uf}/dB	33.98	33.84	33.78	31.43	31.098	30.97
$\varphi_{uf}/^\circ$	-0.0052	-10.34	-12.35	-42.62	-45.08	-45.97

可知，中频增益为 33.98dB ，为 50.003 倍。在题目要求的 20kHz 附近（仿真测试点为 20.14kHz ），只有 0.14dB 衰减，优于题目要求的 0.2dB ，而 -0.2dB 带宽发生在 24.16kHz 处，这缘于 [ADTL082](#) 的带宽为 5MHz ，优于解题结论 4.6MHz 。据式[Section74-4]可得本电路的闭环上限截止频率为 f_{Hf} 为 100kHz ，实际测得 -3.01dB 频率发生在 112.3kHz ， -45° 相移点发生在 108.9kHz 。这两者不相等，恰巧说明我们的简化模型在此处是有误差的。

学习任务和思考题

1、以集成运放 [ADA4528-1](#) 组成的同相比值器电路如图 Section74-7 所示，求解电路的中频增益， -3dB 带宽和 -0.5dB 带宽。

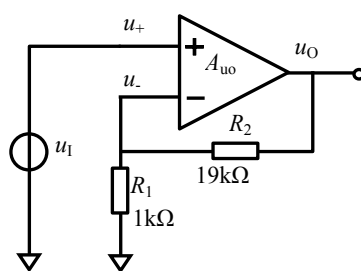


图 Section74-7

2、以集成运放 ADA4528-1 组成的反相比例器电路如图 Section74-8 所示，求解电路的中频增益，-3dB 带宽和-0.5dB 带宽。

3、以集成运放 ADA4528-1 组成的反相比例器电路如图 Section74-9 所示，求解电路的中频增益，-3dB 带宽和-0.5dB 带宽。

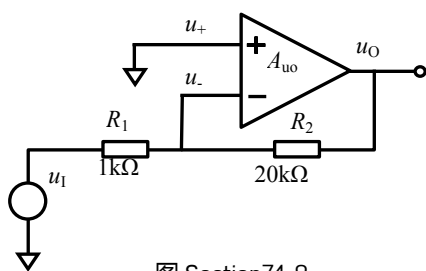


图 Section74-8

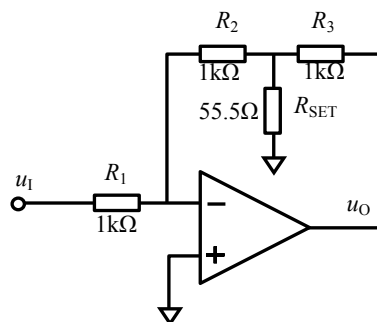


图 Section74-9 T 型反馈反相比例器

4、以图 Section74-7 所示的电路结构，选择合适的运放和电阻值，使得电路的中频增益为 10 倍，-0.5dB 带宽大于 1MHz。

Section75. 负反馈放大电路的稳定性分析

从日常生活中体会自激振荡

在卡拉 OK 歌厅中，我们会见到这样一种现象：当麦克风位置不合适或者音量过大时，喇叭中会出现一种非常难听的啸叫，捂住麦克风、赶紧降低功放音量、或者将麦克风转个方向，都是我们常用的解决方法。这个难听的啸叫，其实就是放大器的自激振荡。

所谓的自激振荡，是指放大器在没有输入信号的情况下，由于环路满足某些条件，其输出端能够自己产生某一确定频率的输出信号。一个放大电路如果发生自激振荡，则振荡输出信号将淹没输入信号，使得放大器失效。某些情况下，强烈的自激振荡还会损坏放大电路。

以卡拉 OK 歌厅中的自激振荡为例，如图 Section75-1 所示。红嘴小人发出的声音信号为 SA（声波），经过麦克风拾音，转变成电信号 A，然后经过前置放大器，音量调节，以及功率放大器，最后形成 D 信号，驱动喇叭发出声音信号 SE。很显然，喇叭发出的声音信号 SE 一定强于小人嘴中的声音 SA，否则要扩音机干什么。

但是，SE 信号来自于墙上的喇叭，经过空气传播后，也会到达麦克风处，即 SF 信号，此信号就是小人嘴里唱出的歌曲，问，SF 大还是 SA 大？

结论是，如果歌厅中的整套系统正常工作，不啸叫，那么 SF 一定比 SA 小，反之，在啸叫的时候，SF 一定比 SA 大——任何一个微小的声音，从麦克风进去，再回到麦克风就比刚才大了，这个声音就会在环路中不断兜圈，越来越大，于是就产生了自激振荡。

消除啸叫的方法有很多，只要能够让 SF 比 SA 小就可以，比如捂住麦克风，同样的 SF 产生的 A 信号就变小了，扭转麦克风方向也是一个道理；再如调节放大器增益，SE 就小了。或者让麦克风远离喇叭，都行。

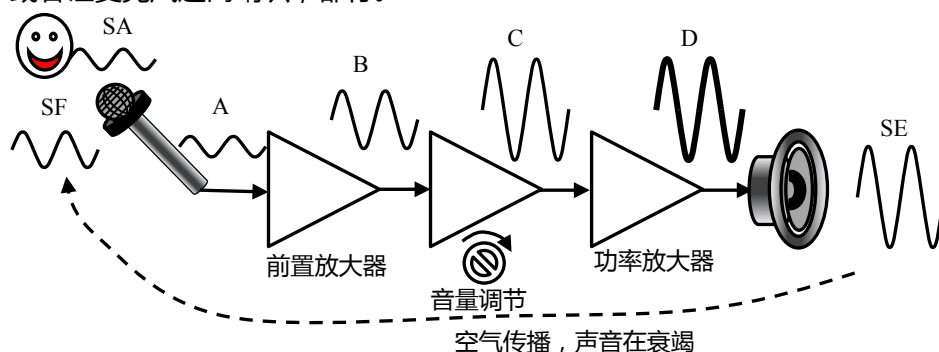


图 Section75-1 卡拉 OK 歌厅的啸叫——自激振荡

负反馈放大电路产生自激振荡的条件

细致的自激振荡条件，将在本书第 6 章信号源中介绍。本节简述结论：

一个运放组成的负反馈放大电路，当开环增益 A_{u0} 环节和反馈网络本身的相移为 0° 时，整个环路永远是负反馈。如图 Section75-2(a)所示，利用环路极性法沿着绿色环路兜一圈，确实是负反馈。图中将正输入端的输入信号接地，以模拟输入为 0 的自激振荡情况。

但实际情况远非如此简单。负反馈环路由开环运放加反馈网络组成，这两部分中都可能存在附加的滞后相移环节，假设运放的附加相移为 φ_A ，反馈网络的附加相移为 φ_F ，那么

情况就会复杂，模块的输出和输入之间，就不再能用简单的同相、反相来表示，也就无法准确回答到底是正反馈还是负反馈，如图 Section75-2(b)所示。

当环路整个的附加相移 $\varphi_A + \varphi_F = -180^\circ$ 时，可以肯定，原本的负反馈，就会演变成正反馈。如图 Section75-2(c)所示。这就满足了负反馈电路产生自激振荡的相位条件：

$$\varphi_A + \varphi_F = -180^\circ$$

[Section75-1a]

$$\varphi_A + \varphi_F = -180^\circ$$

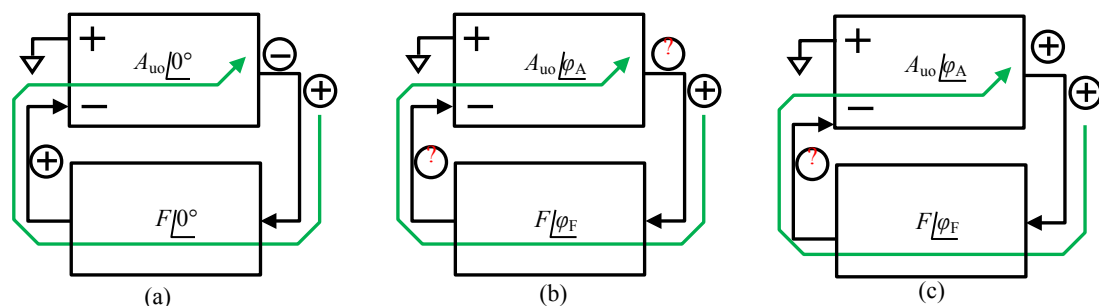


图 Section75-2 负反馈环路产生自激振荡的相位条件

要让负反馈电路产生自激振荡，除了相位条件外，还必须具备幅度条件，即整个环路增益必须大于 1，才能使得很微小的信号一旦在环路中产生，就会越来越大。即：

$$A_{uo}F > 1$$

[Section75-1b]

从实际运放的幅频、相频特性看自激振荡的可能性

以一个实际运放 ADA4899-1 为例，其开环幅频特性、相频特性如图 Section75-3 所示。为了分析简化，我们假设运放组成了一个电压跟随器，即图 Section75-2 的反馈系数 $F=1$ ， $\varphi_F = 0^\circ$ 。根据前述自激振荡的两个条件，有两种方法来衡量是否可能自激振荡。

方法一，既然 $\varphi_F = 0^\circ$ ，那么要想自激振荡， φ_A 就必须为 -180° 。在运放的相频特性曲线上找到 $\varphi_A = -180^\circ$ 的点，为 700MHz，观察此频率对应的幅频特性曲线，约为 -3dB，说明此时有：

$$A_{uo}F = -3\text{dB}$$

即，对此频率来说，虽然满足相位条件，但是环路增益是小于 1 的，不满足幅度条件。

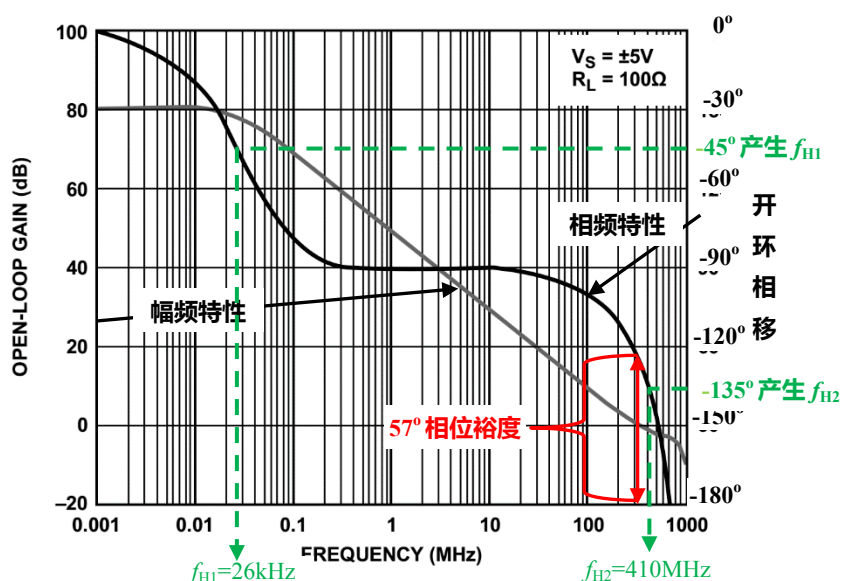


图 Section75-3 高速运放 ADA4899-1 的开环幅频、相频特性

因此，不会产生自激振荡。

相频特性中 $\varphi_A=-180^\circ$ 的频率处，开环增益比 0dB 小的值，就是增益裕度，此值越大，肯定越稳定。

第二种方法，在运放开环幅频特性曲线上，找到 0dB 点对应的频率为 310MHz，此时的相移为 -123° 。此相移和 -180° 的距离，称为相位裕度，为 57° 。根据相移的规律可知，此点左侧均为满足幅度条件的频率，其相移绝对值均小于 123° ，因此不可能产生自激振荡。

这说明，ADA4899-1，在设计成跟随器，且电路布线合乎规则时，是不会发生自激振荡的。

将跟随器改为比例器，是否振荡？

如果把跟随器改为图 Section75-4 所示的 2 倍同相比例器，且输入接地，则这个电路的稳定性会更强，即跟随器如果不振荡，则比例器一定不会振荡。说明如下：

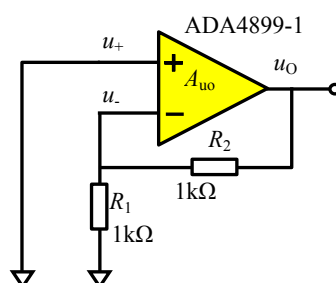


图 Section75-4

引入比例器的分压电阻后，我们发现 φ_F 仍为 0° ，而 F 由 1 变为 0.5，即环路的相移曲线没有变化，环路增益 $A_{uo}F$ 在纵轴上变为原先的 0.5 倍，即下降了 6dB。那么，利用第一种方法，在不变化的相移曲线上，找到 700MHz 为 -180° 频点，此频点处的运放开环增益为 -3dB，而环路增益 $A_{uo}F$ 则为 -9dB，即增益裕度更大了。

每一种运放都是这样吗？

从上述分析看，ADA4899-1 在正常的负反馈电路中，无论 1 倍的跟随器，还是大于 1 倍的比例器，都不可能发生自激振荡。并且，闭环增益越大，反馈系数就会越小，环路增益就会越小，导致增益裕度越大，负反馈电路越稳定。

不是所有运放都能设计成跟随器使用。有些运放，为了保证稳定性，它们只能设计成闭环增益大于某个值。比如 ADA4637、OPA847 等。这类运放有一个共同点，就是在数据手册中都规定了最小稳定闭环增益（也称噪声增益，即 $1/F$ ），如图 Section75-5，其中的红色框，就是在说这个。是否能够设计成跟随器，和运放的相位裕度、增益裕度有关。



30 V, High Speed, Low Noise, Low Bias
Current, JFET Operational Amplifier
ADA4627-1/ADA4637-1



www.ti.com

OPA847

SBOG251E - JULY 2002 - REVISED DECEMBER 2008

GENERAL DESCRIPTION

The ADA4627-1/ADA4637-1 are wide bandwidth precision amplifiers featuring low noise, very low offset, drift, and bias current. The parts operate from $\pm 5\text{ V}$ to $\pm 15\text{ V}$ dual supply.

The ADA4627-1/ADA4637-1 provide benefits previously found in few amplifiers. These amplifiers combine the best specifications of precision dc and high speed ac op amps. The ADA4637-1 is a decompensated version of the ADA4627-1 and is stable at a noise gain of 5 or greater.

Wideband, Ultra-Low Noise, Voltage-Feedback OPERATIONAL AMPLIFIER with Shutdown

FEATURES

- HIGH GAIN BANDWIDTH: 3.9GHz
- LOW INPUT VOLTAGE NOISE: $0.85\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$
- VERY LOW DISTORTION: -105 dBc (5MHz)
- HIGH SLEW RATE: $950\text{ V}/\mu\text{s}$
- HIGH DC ACCURACY: $V_{IO} < \pm 100\mu\text{V}$
- LOW SUPPLY CURRENT: 18.1 mA
- LOW SHUTDOWN POWER: 2 mW
- STABLE FOR GAINS ≥ 12

DESCRIPTION

The OPA847 combines very high gain bandwidth and large signal performance with an ultra-low input noise voltage ($0.85\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$) while using only 18 mA supply current. Where power saving is critical, the OPA847 also includes an optional power shutdown pin that, when pulled low, disables the amplifier and decreases the supply current to $< 1\%$ of the powered-up value. This optional feature may be left disconnected to ensure normal amplifier operation when no power-down is required.

图 Section75-5 ADA4637-1 和 OPA847 的数据手册首页部分截图

图 Section75-6 是 ADA4637-1 的开环频率特性，从中可以看出，左侧纵轴标注，既是增益 dB 值，也是相位裕度值，而右侧我增加的才是真正的相移值， φ_A 。

按照第二种方法，增益为 0 dB 的频率为 74 MHz 左右，即图中红色实心圆，可以读出其相位裕度为 -90° （其相移值为 -270° ，即图中红色空心圆），这是极不稳定的。但是如果让反馈系数 F 不是 1 ，而变为 $1/5$ ，即 -14 dB ，那么就可以将图中增益曲线下移 14 dB ，如图中绿色虚线。此时再看，就会发现 0 dB 频率变为 14 MHz 左右，即图中绿色实心圆，对应的相移变为 -107° ，如图中绿色空心圆，其相位裕度相应变为 73° ，这就稳定了。

器件中规定闭环稳定增益大于 5 ，一般是保守的，它不会让相位裕度刚好大于 0° 。原因后续讲。

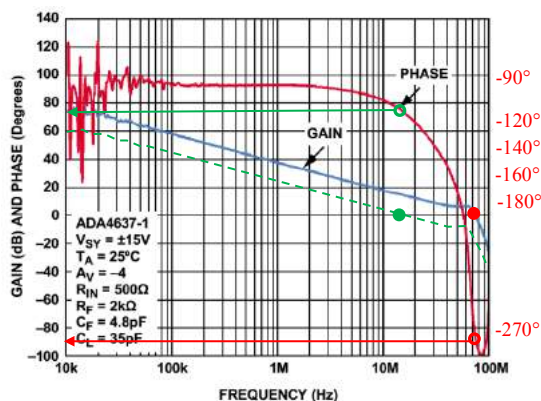


Figure 36. Open-Loop Gain and Phase vs. Frequency

图 Section75-6 ADA4637 的开环特性

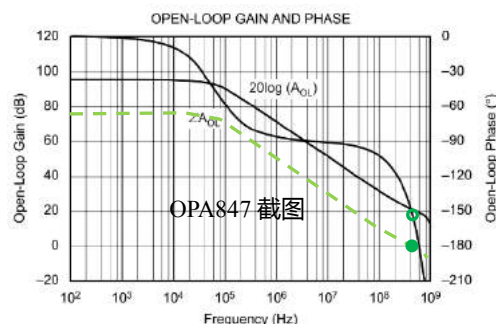


图 Section75-7 OPA847 的开环特性

同样的，OPA847 也不能用于跟随器，其开环特性如图 Section75-7 所示。从图中可以看出，在相移达到 -180° 时，其开环增益仍有大约 20 dB （即增益裕度为 -20 dB 。裕度是宽裕的意思，当裕度为负值时，不仅不宽裕，还欠着债呢）。显然，将其接为跟随器是不稳定的。

但是如果将其闭环增益设为 12 倍以上，则环路增益变为开环增益的 $1/12$ 以下，如图中将闭环增益曲线下移 20.58 dB （即为原先的 $1/12$ ），为绿色虚线，则其在 -180° 度是具有小于 0 dB 的环路增益。但似乎看起来不太清晰。为了更加清晰说明问题，也可以采用另一种方法，在绿色虚线与 0 dB 的交叉点，如图中绿色实心圆，找到对应相频曲线的绿色空心圆，此处相位裕度为 30° 左右。两种方法都能说明，当 OPA847 接成 12 倍以上的闭环增益时，电路是稳定的。

为什么负反馈放大电路的输出端不能接大电容负载？

一个运放组成的同相比例器（包含运放内部结构）如图 Section75-8 所示，在它的输出端对地接了一个大电容 C_L ，这是一个极其危险的电路，一般会引起电路工作不稳定，特别是方波输入时会引起过大的过冲和振铃现象，有时候还会发生自激振荡。

为了解释这种现象，图中我们画出了运放内部的简化等效结构：图中小运放都是理想的，入端开始是一个理想的开环运放，然后是两级低通网络，产生两个上限截止频率，其中 f_{H1} 非常小，是运放设计者为了增强运放电路稳定性，而在运放内部刻意制造的，对低速运放，此值约为 0.1~10Hz 量级，对高速运放，此值可达 10kHz 甚至更高。而 f_{H2} 要大得多，它不是刻意制造的，而是集成电路生产中固有存在的，比如 PN 结之间的杂散电容引起的。实际的 f_{H2} 不是一个简单的一阶低通产生，可能是多个复杂网络形成。但在本图中，为了简化，我们将其描述成一个 R_2 和 C_2 形成的一阶低通。但读者必须清楚，理论上两级 1 阶低通，只能产生最大 180° 的滞后，而这两级的简化模型，是可以产生超过 180° 的滞后相移的。

此后是一个跟随器隔离阻容网络与输出端的阻抗联系，然后每一个运放都有一个输出电阻 r_o ，约为 0.01Ω ~ 100Ω ，取决于不同的运放，以及不同的信号频率。

这个模型，已经可以大致描述出实际运放的开环幅频、相频特性。

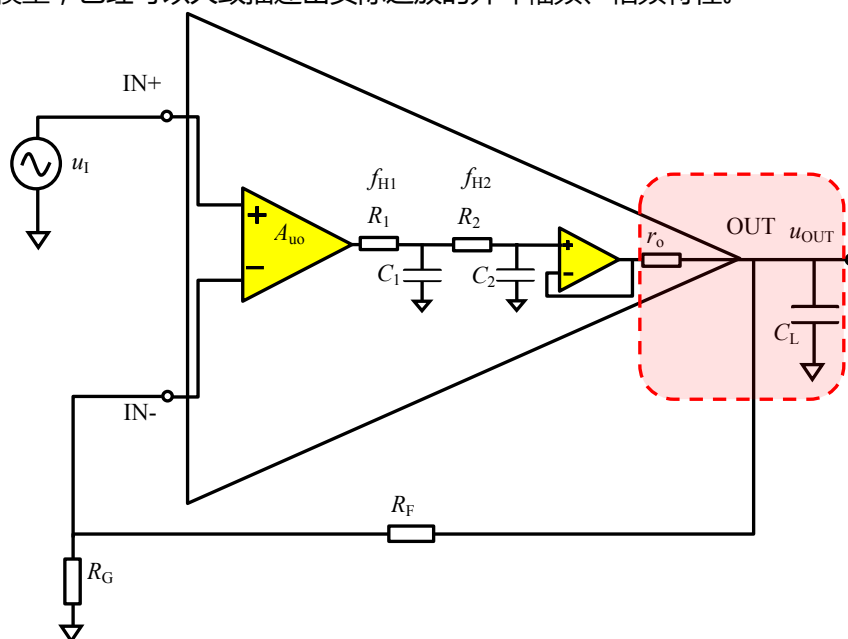


图 Section75-8 运放输出端接负载电容

当运放电路的输出没有电容，则环路只包含运放和反馈电阻。因此，其是否稳定，可以利用前述方法判断——需要特别注意的是，此时的运放输出电阻 r_o ，在分析中起不到什么作用，毕竟它和 R_F 相比，还是太小了。但是，一旦在此电路的输出端对地端接一个负载电容，那么输出电阻 r_o 就与 C_L 组成了一阶低通，它在产生增益衰减的同时，也会产生最大 -90° 的相移，这样环路增益曲线会加速下降，这有利于稳定，而环路相移曲线也会加速下降，不利于稳定。这就要看谁的作用大了。

一个一阶低通的引入，在带来 -3dB 的环路增益下降的同时，会引起 -45° 的额外相移， -6dB 增益下降，则会引起 -60° 的额外相移，这已经差不多将相位裕度全部消耗完了。总体

看，相移的影响更大一些，或者说，这个一阶低通的引入，多数情况下会引起系统更加不稳定。

这个过程特别好玩。有些人会片面的认为，在环路中增加一阶低通会引起系统不稳定，因为这会引入额外的相移，降低相位裕度。这是完全错误的。实际上，一阶低通的引入，就如大千世界一分为二的万物一般——有其好的方面，就有其坏的方面，而好与坏，又以不同的方式呈现，看你怎么用它。

一阶低通引入后，增益降低（有利于稳定）是缓慢的，但是却是持续的，永无休止的，因为一阶低通的增益会随着频率的增大，而无限降低，趋近于 0。而相移的增加（不利于稳定）是迅速的，却是有极限的，即便频率趋于无穷大，相移也只能到 -90° 。

这有点像沙漠中的骆驼。渴，缺水会死亡，累，也会死亡。背上水，有好处，但也增加了负荷。背水还是不背水？这得看什么时候。

眼看就要到终点了，也是累到极限的时候，即便多背一壶生命必须的水，也会压垮这个可怜的骆驼。而刚开始旅行的时候，则必须背上足够的水。水，是好还是坏？它可以长久供应骆驼的需求，但是又在短瞬间增加了骆驼的负荷。

道理几乎完全相同。科学家在运放设计时就考虑到了这点。他们人为的，在低频段引入了一个低通滤波器，如 ADA4899-1 的图 Section75-3 中，26kHz 处的一阶低通，就是人为刻意增加的，这有助于增加运放电路的稳定性。而在高频处，则告诫用户，避免出现低通网络。

因此，对于运放组成的负反馈放大电路，不要在其输出端接大电容负载。否则，其稳定性一般会出现下降。轻者，出现方波输入时的输出过冲，如图 Section75-9 所示。重者，则会引起自激振荡。

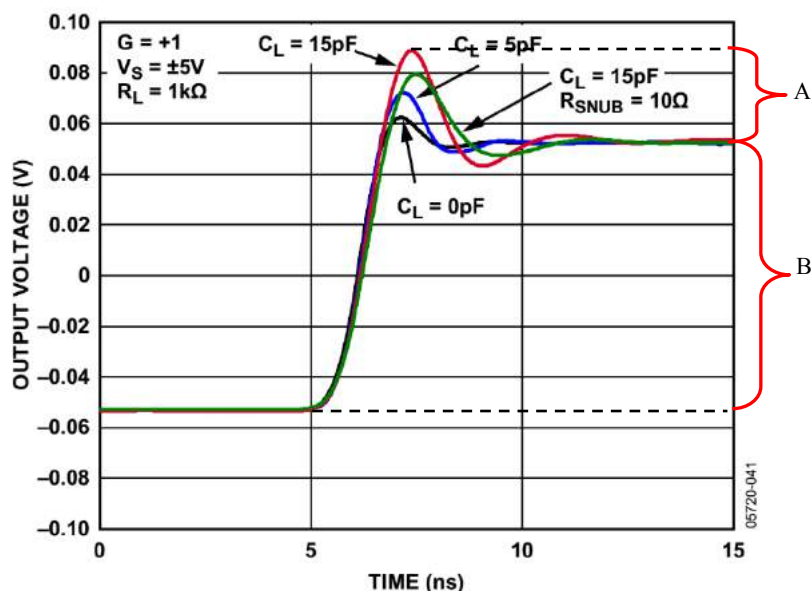


图 Section75-9 运放 ADA4899-1 的输出过冲现象

图中的过冲，是指当矩形波输入时，输出出现了先冲上去，再降下来，来回折腾几次才稳定下来的现象。对一个良好的放大器来说，过冲越小越好。

过冲大小用百分比表示，即图中的 A/B。图中可知，当端接不同的输出负载电容时，ADA4899-1 的过冲也不同， C_L 为 15pF 时，过冲如图所示，是最大，肉眼看约为 36%。

为什么理论上不会振荡的电路，做成实际电路板却发生了振荡？

对理论上不会振荡的放大电路，比如将 ADA4899-1 设计成 10 倍闭环增益，或者 OPA847 设计成 20 倍闭环增益，当我们画好电路板图，制成 PCB (Printed Circuit Board, 印刷电路板或印制电路板)，将元器件焊接完毕，却发现它出现了自激振荡。这是为什么呢？

因为实际的电路板中，存在杂散电容。

任何两个导体节点，其实都存在杂散电容，其大小与投影面积、间距、介质的介电常数有关。电路板中常见的杂散电容有：

- 1) 同一层的两个相邻节点间。比如某根信号线，和周边的覆铜 GND 之间，以及和周边的焊点之间，如图 Section75-10 中的 C_1 ；
- 2) 不同层上下之间。比如元件层的线，和焊接层的大面积 GND 之间，如图中 C_2 ；第 2 层的线，和第 1 层，第 3 层的线之间等。
- 3) 器件的两个管脚之间。

节点或者线，其实都与周边的节点或者线存在投影面积和间距。显然，投影面积越大、间距越小，都会导致杂散电容越大。一般的，可以达到 pF 数量级。这是不可忽视的。

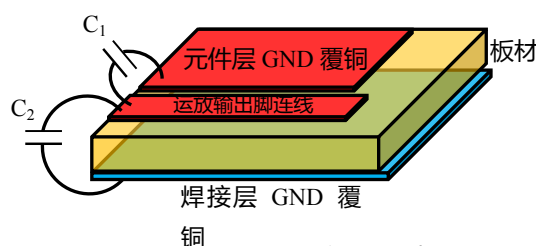


图 Section75-10 印刷电路板中的杂散电容

这些杂散电容和电路中的电阻，很容易形成低通网络，有可能引起电路稳定性下降。图 Section75-12 原本为一个同相比例器，做成实际电路板后，就出现了三个杂散电容——其实每个节点都出现了一个杂散电容。

C_{OUT} 就是我们前面讲的大电容负载，显然它会在反馈环路中引入一个低通网络，有可能引起环路的稳定性下降。

C_{IN-} 的存在，与信号源内阻 R_S (或者前级放大电路的输出电阻) 组成了一个低通网络，但是这个低通网络不在反馈环内，它只会影响不同频率输入信号到达放大电路输入端的比率，进而影响放大电路的带宽，而不会引起任何稳定性问题。

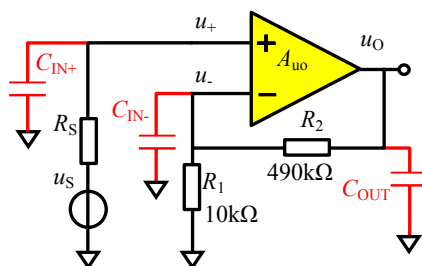


图 Section75-11 同相比例器中的杂散电容

严重的问题发生在 C_{IN-} 上，它与实体电阻 R_2 和 R_1 的并联，共同组成了一个环路内的低通网络。由于电阻 R_2 和 R_1 的并联远大于运放的输出电阻，这导致非常小的 C_{IN-} ，就可以产生巨大的作用。因此，在电路设计中降低运放负输入端电容，就非常关键。

现在回过头看看图 Section75-9，发现在 C_L 等于 $0pF$ （即不端接输出电容）时，输出波形也有过冲，其原因也在于杂散电容的作用。ADI 公司的工程师在做这个实验时，也无法避免杂散电容的客观存在。

如何避免负反馈放大电路的自激振荡？

从设计上入手，在萌芽阶段就扼杀自激振荡，是避免自激振荡的不二法宝。一定不要寄希望于自激振荡后，再修改电路。这像从小教孩子学好一样，别等着犯错误了再挽救他。常见的法宝如下：

1) 选择合适的增益，选择合适的增益电阻

对任何一个选定的运放，在它能够实现的最小增益基础上，适当提高闭环增益，可以有效提高系统稳定性。

增益电阻尽量选择小的，以降低 C_{IN} 的作用。多数宽带放大器的数据手册中，都会给出不同增益下的电阻配对儿值。理论上，如果要实现 10 倍同相增益，用 $9.09k\Omega$ 对 $1k\Omega$ ，就没有用 909Ω 对 100Ω 好。

2) 设计 PCB 图时，尽量减小杂散电容，特别是 C_{IN} 。

有些初学者，学会了覆铜操作，就特别高兴。再丑陋的电路板设计，一实施覆铜操作，电路板就显得比较专业了，于是这些孩子就到处覆铜，其实这是极其错误的。

覆铜操作的本质目的是增大地线面积，进而减小地线电阻和电感。但是覆铜操作也会带来两个问题：第一，它与同层信号线之间就形成了很长很长的近距离间隙，也就是很大的电容，如图 Section75-10 中的 C_1 。第二，它与其他层的信号线形成了层间电容，如图 Section75-10 中的 C_2 。这些杂散电容，都会引起系统不稳定。

因此在电路设计时，注意以下几点：

- 运放负输入脚及其连接线的下方，绝对不要覆铜，或者覆铜后实施挖空操作。图 Section75-12 给出了一个 PCB 布线挖空覆铜的实例。
- 运放负输入脚、输出脚及其连接线的同层周边，一定要与覆铜保持足够大的间距。我建议此间距要大于 $20mil$ 。理论上，这个间距大了，覆铜就会减小，但因为覆铜尺寸通常为厘米数量级，不会在乎这点减小。
- 环路中的电阻，尽量不要使用电位器。

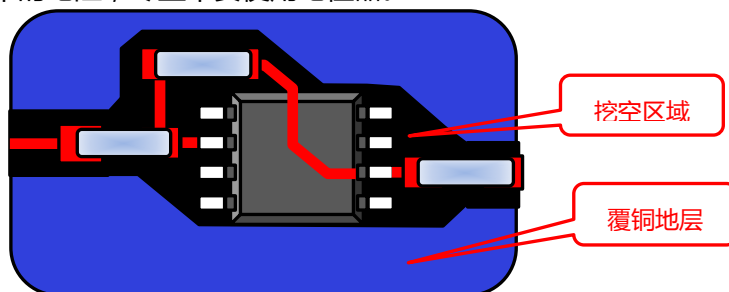
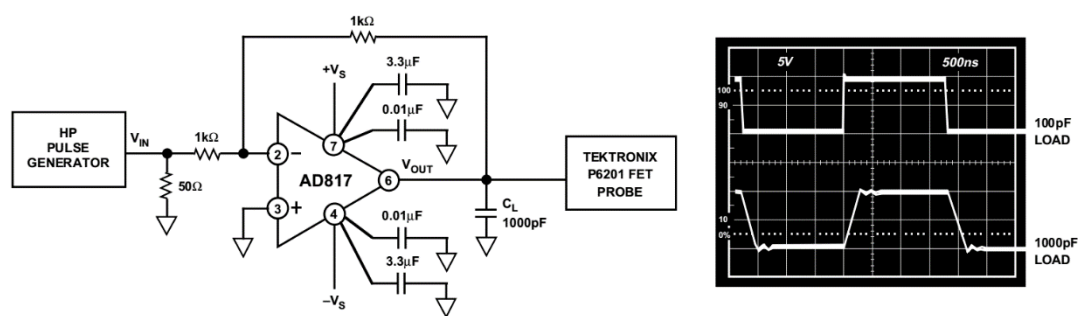


图 Section75-12 挖空地线覆铜的实例—摘自《你好，放大器》

3) 尽量不要驱动大电容负载，必须驱动大电容负载的，使用裕度大的运放。或者串联隔离电阻。

有些运放天生就能够驱动大电容负载。比如 AD817，OPA350 等。图 Section75-13 是

运放 AD817 驱动大电容的实例，左图中当负载电容为 100pF 时，几乎看不到过冲。



AD817 Driving a Large Capacitive Load

图 Section75-13 AD817 驱动大电容负载

图 Section75-14 是 OPA350 驱动不同电容负载时的过冲量。可以看出，环路增益越小，过冲越大，这与前述的结论吻合。其中 $G=-1$ ，与 $G=2$ 是相同的——1 倍反相比例器的噪声增益是 2，而 2 倍同相比例器的噪声增益也是 2（参见本书式(Section71-6a)后文字描述）。显然，即便是 1MpF，即 1μF 的大电容，其过冲也维持在 70%以下。

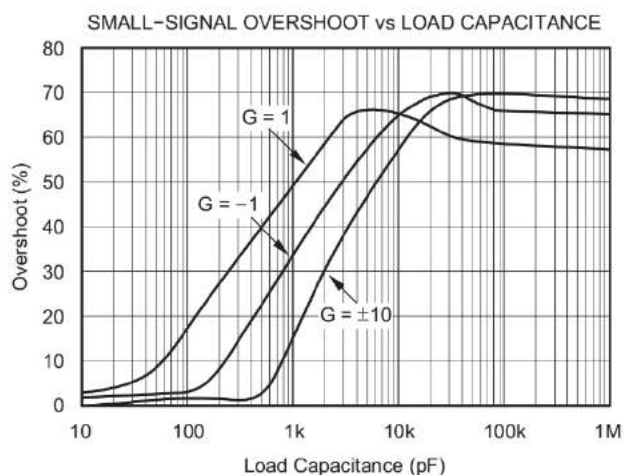


图 Section75-14 OPA350 驱动不同电容时的过冲

有些电路并没有大电容负载，PCB 布线也符合规则。但在使用示波器观察输出波形时，却发现了振荡。此时需要注意的是，示波器使用的电缆线，是存在输入电容的。解决方法很简单，将输出点串联一个小值隔离电阻 R_{ISO} ，比如 50Ω，再连到示波器电缆线上即可。这也给出了另外一种解决思路，当必须驱动大电容负载时，可以在运放输出端和大电容负载之间，串联一个小值隔离电阻，如图 Section75-15 所示。为了说明隔离电阻的作用，实验电路如图 Section75-16 所示。

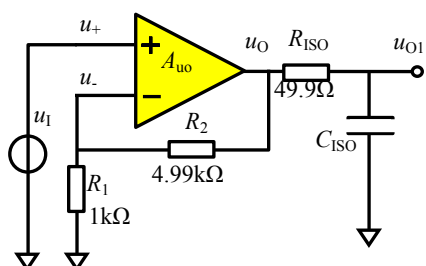


图 Section75-15 将大电容负载与环路输出隔离

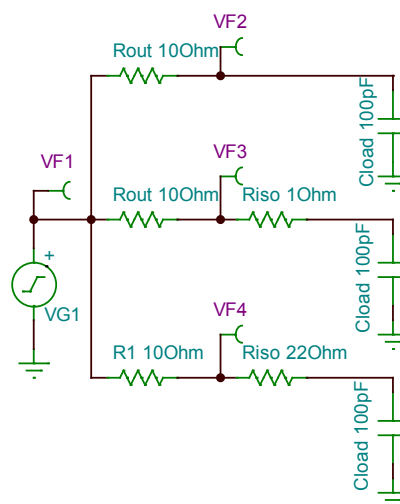


图 Section75-16 隔离电阻的作用

图中 VF2 是输出直接驱动电容负载，VF3 是驱动一个隔离电阻为 1Ω 的电容负载，VF4 则是驱动一个隔离电阻为 22Ω 的电容负载。其幅频、相频特性如图 Section75-17 所示。可知，如果没有隔离电阻，输出端可以产生最大 90° 的滞后相移，而接入 1Ω 隔离电阻后，最大滞后相移只有大约 55° ，而 22Ω 的隔离电阻，最大滞后相移只有 11° 左右。

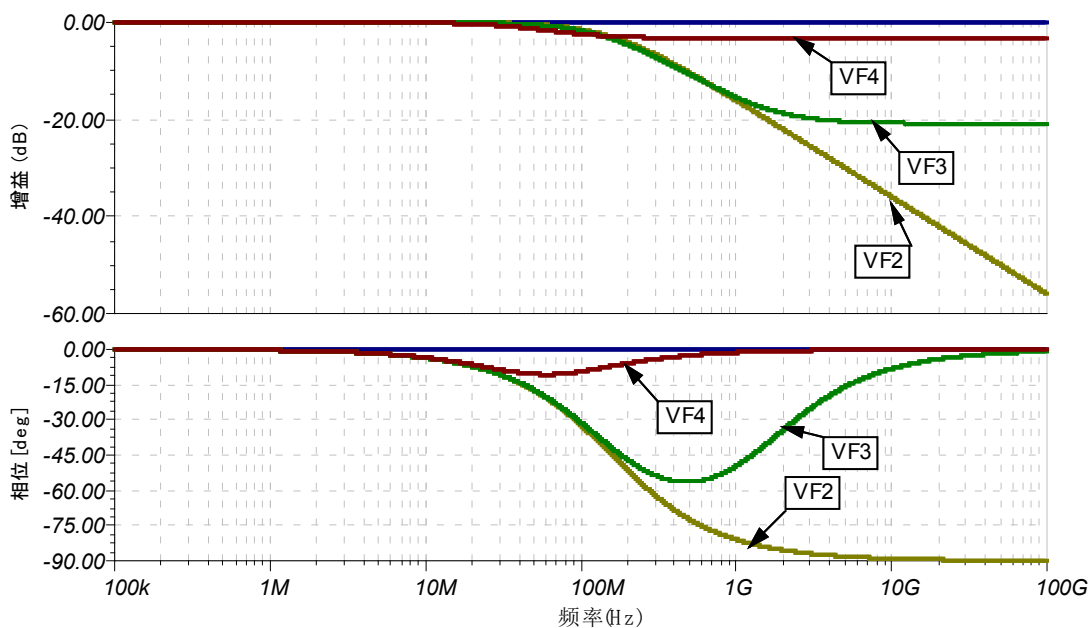


图 Section75-17 隔离电阻的作用之仿真实验结果

这样，由于负载电容引起的不稳定现象，会大幅度减少。

另外，在电路中增加不同种类的补偿电路，比如串入高通网络等，也是抑制自激振荡，提高稳定性的方法。但这种方法多数应用于运放内部设计，在运放电路设计中应用较少，本书不提倡，因此不讲。

Section76. 频率失真

重温失真和非线性失真

Section63 介绍了与失真相关的内容，重温如下：

失真：输出波形和输入波形的不一致，称为失真。但是这个不一致，不包括时间移位、幅度变化和幅度移位，比如准确放大的照片，虽与原始照片大小不一致，但不能称为失真。因此，对输出波形进行最优的线性运算后，仍和输入波形的不一致，称为失真。

任何一个运放或者其它放大器，只有做到“输入—输出”关系是曲线，当输入为单一频率纯净正弦波时，输出就一定不是正弦波，而是除基波之外，还包含谐波。这种失真的本质原因是放大电路“输入—输出”关系不是过零直线，因此也称之为非线性失真。

如果一个放大电路，“输入—输出”关系是一个过零的直线，当输入为纯净正弦波时，输出也是同频的纯净正弦波，这个放大电路称为“无非线性失真放大电路”。反之，则称为“具有非线性失真放大电路”。

线性失真，也被称为频率失真

对于“无非线性失真放大电路”，仍会产生波形失真，此类失真称为“线性失真”。

当输入不是纯净正弦波，而是几个正弦波的叠加，形成了如图 Section76-1 绿色曲线所示的复合波，放大电路对每个正弦波都不产生非线性失真，但是对每个正弦波的增益不同或者延时不同，造成输出波形变形，如图中红色曲线，这种失真叫频率失真，也称线性失真。

线性失真分为三种，如图 Section76-2：

- 1) 单独的幅度失真：放大电路对不同频率的输入信号，具有不同的放大倍数。
- 2) 单独的相位失真：放大电路对不同频率的输入信号，具有不同的延时。特别注意，不是“不同的相移”，而是“不同的延时”。
- 3) 既有幅度失真，也有相位失真，称为综合失真。这是绝大多数情况。

对于我们常见的放大电路，理论上讲，绝不存在“无非线性失真放大电路”，因此如果输入波形为复合波，那么输出波形一定包含非线性失真，还包含线性失真，而线性失真中，一般既包含幅度失真，也包含相位失真。

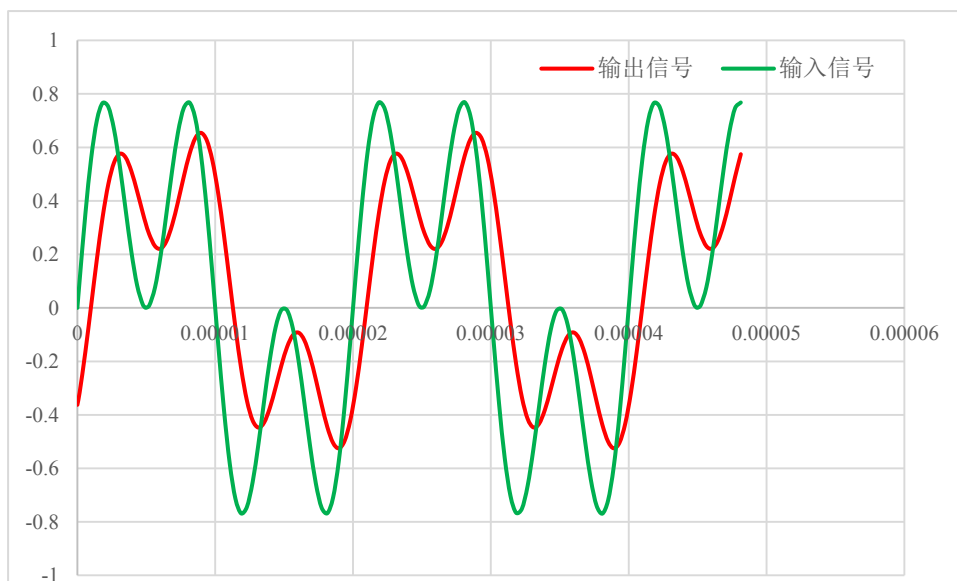


图 Section76-1 线性失真实例

频率失真的危害

失真度非常小的运算放大器，经过合适的负反馈后，可以使得放大电路的失真度进一步下降。很多优秀的放大电路，其失真度指标可以做到-120dB 以下，因此可以近似认为这就是“无非线性失真放大电路”。

但是，即便使用如此低失真度的放大电路，如果存在频率失真，也就是线性失真，输出波形仍然会发生不可逆的变形。

产生频率失真的根本要素是，输入波形是一个复合波，低失真度放大电路对输入波形中不同频率信号，实施了不同增益、不同延时的放大。虽然，对每个单一频率正弦波，都不产生非线性失真，但是，由于线性失真的存在，输出的复合波形仍然会发生变形。

图 Section76-2 是用 Excel 生成的，表现线性失真的示意图。图中蓝色为原始输入的复合波形，由等幅度的基波和 3 次谐波相加形成，如果没有发生线性失真，其输出将与输入一样。单纯的幅度失真如图红色波形所示，它是 1 倍的基波+0.5 倍的 3 次谐波组成，很显然，放大电路对 3 次谐波实施了幅度的衰减，输出波形看起来平滑了很多，即我们常说的高频抑制；而绿色波形则是单纯的相位失真，它是有 1 倍基波无相移+1 倍 3 次谐波含一个固定相移组成；而紫色波形则是“既包含幅度失真，又包含相位失真”的综合失真。

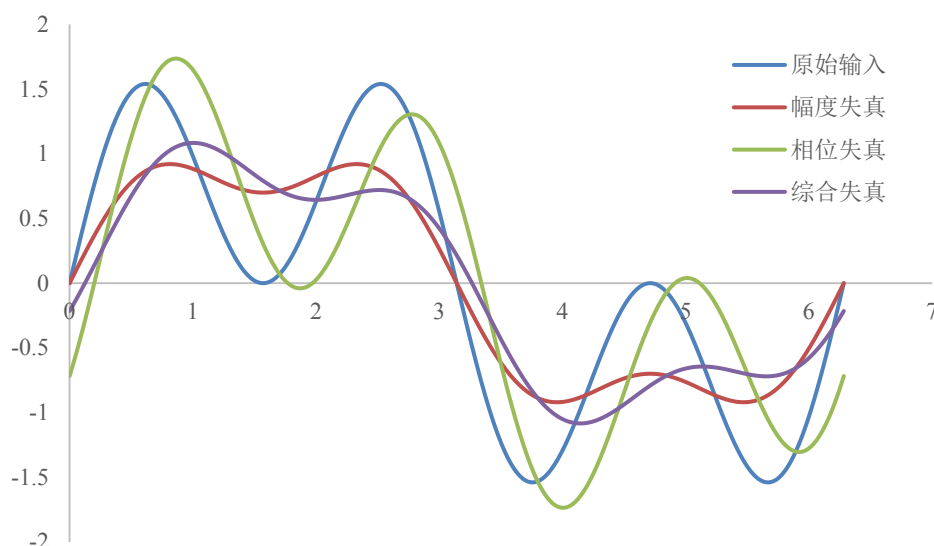


图 Section76-2 线性失真中的幅度失真、相位失真和综合失真

频率失真造成的危害是严重的。真正的放大电路，其输入信号一般不会是单一频率正弦波，虽然我们在做实验的时候广泛采用这种输入。比如音频放大电路，其输入信号是自然界的声，它一定是包含很多频率分量的复合波。

以心电信号为例，其主要频率分量大致分布在 0.1Hz~25Hz 之间，为了可靠放大，一般会给信号链路中增加 45Hz 左右的低通滤波器，以抑制 50Hz 工频干扰以及更高频率的肌电信号；增加 0.01Hz 高通滤波器以抑制超低频率的信号漂移。这些滤波器的引入，一旦设计不好，就会对原始心电信号带来幅度的改变，或者相位的改变，进而引入线性失真，也就是频率失真。其直接后果就是，打印出来的心电信号发生了变形，误导了医生对病情的诊断。

Section77. 频率特性的分析方法

分析一个放大电路的频率特性，最常用的是频域分析法，它通过“幅频特性图——增益随频率变化曲线”，“相频特性图——相移随频率变化曲线”来全面描述放大电路的频率特性。

频域分析法分为理论分析、实测记录等手段。

所谓的理论分析，是将电路中的部件，都表达成与频率相关的量或者关系式，然后据此写出随频率变化的频域传递函数，最终得到幅频特性、相频特性图。

所谓的实测记录，是让放大电路正常工作，用示波器等仪器同时显示输入波形和输出波形，逐点改变输入信号频率，分别记录每个输入频率下的增益（输出幅度/输入幅度）、相移（输出相位减去输入相位），绘制出幅频特性、相频特性图。实测记录法，可以用实际电路实现，也可以用仿真电路实现。

举例 1：

电路如图 Section77-1 所示，求该电路的频率特性。并用仿真实验验证之。

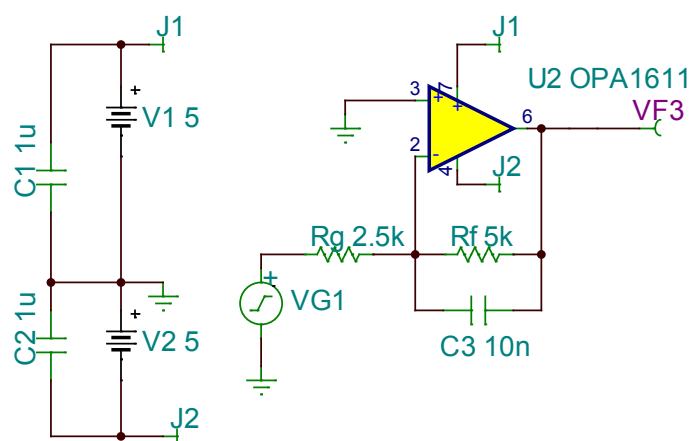


图 Section77-1 含一阶低通滤波的反比例器

解：理论分析如下：

这是一个由运放组成的，含 2 倍电压增益的一阶低通滤波器。在正弦稳态输入时，其电压增益随频率变化的表达式为：

$$\dot{A}_{uf} = -\frac{R_f \parallel \frac{1}{j\omega C_3}}{R_g} = -\frac{\frac{R_f \times \frac{1}{j\omega C_3}}{R_f + \frac{1}{j\omega C_3}}}{R_g} = -\frac{R_f}{R_g} \times \frac{\frac{1}{j\omega C_3}}{R_f + \frac{1}{j\omega C_3}} = -\frac{R_f}{R_g} \times \frac{1}{1 + j\omega R_f C_3} \quad [\text{Section77-1}]$$

设已经确定的电路参数：

$$\omega_0 = \frac{1}{R_f C_3} ; f_0 = \frac{1}{2\pi R_f C_3}$$

其中 ω_0 称为特征角频率，相应的， f_0 称为特征频率。其具体含义，在滤波器概述中会有介绍。

据式[Section77-1]，可以写出电压增益的模，随频率变化的规律，即幅频特性：

$$|\dot{A}_{uf}| = -\frac{R_f}{R_g} \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} = -\frac{R_f}{R_g} \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\frac{f}{f_0})^2}} = A_m \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\frac{f}{f_0})^2}} \quad (\text{Section77-2})$$

以及电路输入输出之间的相移，随频率变化的规律，即相频特性：

$$\varphi = 180^\circ - \tan^{-1}(\frac{\omega}{\omega_0}) = 180^\circ - \tan^{-1}(\frac{f}{f_0}) \quad (\text{Section77-3})$$

根据上述两个表达式，可以用肉眼观察的方式，大致分析出增益、相移的变化规律：

1) 当输入信号频率特别低时，即 $f \ll f_0$ ，电路的电压增益近似为 A_m ，输入输出之间的相移近似为 180° ，电路表现为一个标准的-2 倍反比例器。

2) 当输入信号频率逐渐增大，电压增益开始逐渐下降，不考虑电路本身的反相特性，滞后相移的绝对量 $[\tan^{-1}(\frac{f}{f_0})]$ 是逐渐增大的。

3) 当输入信号频率增大到一个关键点，特征频率处，即 $f = f_0 = \frac{1}{2\pi R_f C_3} = 3183\text{Hz}$ ，电压增益变为 A_m 的 0.707 倍，而相移变为 135° ，也可以理解为滞后 -225° 。

4) 此后，随着频率的再增大，电压增益越来越小并最终逼近 0 倍，而相移逐渐变为 90° （也可理解为滞后 270° ）。

对该电路的仿真，可以采用 Multisim 或者 TINA 等仿真软件。本例以 TINA 为例，仿真结果如图 Section77-2 所示。

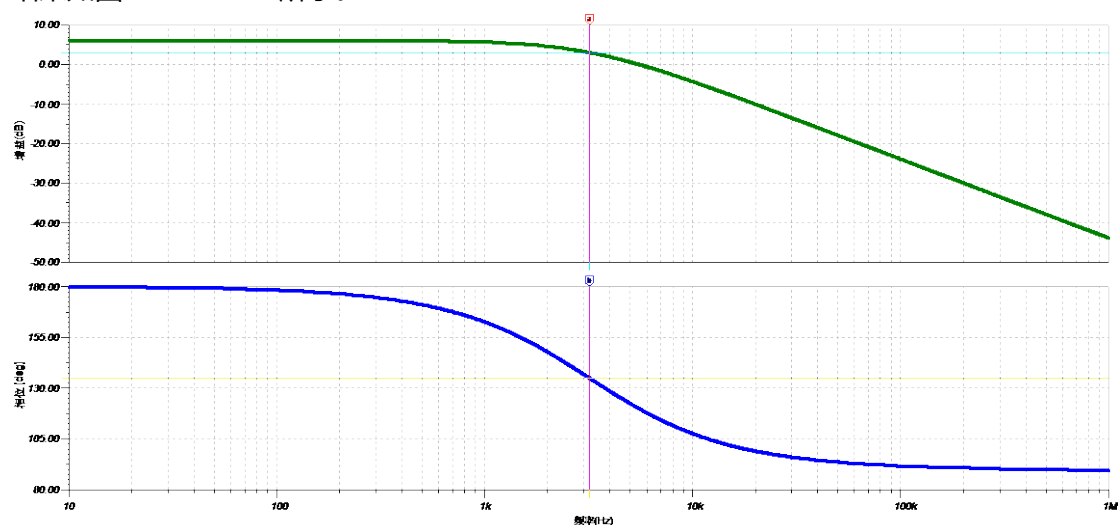


图 Section77-2 含一阶低通滤波的反比例器仿真结果之幅频特性和相频特性

可以看出，仿真结果与理论分析是基本吻合的。

4.2 滤波器概述

Section78. 滤波器的一些常识

滤波器

滤波是一个动作，对不同频率输入信号，实施不同的增益和相移，以形成输出。滤波器，是执行这种动作的硬件设备或者软件程序。无论滤波，还是滤波器，英文均为 filter，它是名词，也是动词。

比如，高通滤波器的动作效果是：输入频率较高时，其增益逼近一个设定值，相移基本为 0，当输入频率低于某一设定值后，随着频率的降低，增益开始逐渐下降，相移开始逐渐增大，最终的结果是，直流量或者超低频率量，都会被滤除。

模拟滤波和数字滤波

滤波动作可以用模拟电路实现，也可以用数字电路或者软件实现。比如，Section77-1 电路，就是模拟的低通滤波器。本章讲述的均为模拟滤波器，因此在这儿，暂不深入。所谓的模拟滤波器，其输入量是连续的模拟信号。

而数字滤波器，其输入量是离散的数字信号，或者是一个程序，对已有的数字序列进行滤波，形成新数据。例如：

原始数据为 $X : (X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ ，通过以下程序形成 $Y(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots)$

$$Y_i = \frac{0.5 \times X_{i-1} + X_i + 0.5 \times X_{i+1}}{2}$$

这就形成了一个数字滤波程序，实现了最简单的低通滤波效果—— X 序列中存在的尖锐变化，会在输出的 Y 序列中得到钝化。

模拟滤波，只能通过硬件电路实现。而数字滤波，既可以用硬件的数字电路实现，也可以用软件编程实现。

目前稍复杂的电子系统，都存在 3 个环节，感知自然界模拟信号的输入环节，模数转换和处理器环节，数模转换和执行环节。在这样的电子系统中，存在大量的滤波器。

比如 MP3，它可以听歌，也可以录音放音。图 Section78-1 是它的信号链路，以录音放音为例，其流程如下：

1) 外界的声音是一个客观存在的声波，传递到麦克风，麦克风是一个声电变化器，它负责把声音信号转换成 mV 量级的波动电压信号。虽然麦克风没有专门设计滤波器，但是它本身的物理特性限制了它的工作频率范围，从表象看，它是一个几 Hz 到几十 kHz 的带通滤波器，这属于模拟滤波器。

2) 后级的“输入模拟信号处理”单元，其实就是本书的内容，它负责把 mV 量级的波动电压，转变成 V 量级的波动电压，因此需要上千倍的电压放大，并且在这个环节，需要实施 10Hz~50kHz 的带通滤波，以保证人类能够听到的 20Hz~20kHz 信号能够完整的传递，且滤除人类听不到的声音，这属于模拟滤波。

3) 随后, 这个波动电压被 ADC (Analog to Digital Converter, 模数转换器) 变成离散的数码序列, 通过主控的处理器, 读取 ADC 的数据, 保存在内部的 FLASH ROM 中, 或者外插的 SD 卡、U 盘中。在 ADC 内部, 一般不存在模拟滤波, 是否存在数字滤波取决于 ADC 的类型, 对于音频领域的 ADC, 多数为 Σ - Δ 型, 内部含有数字滤波器。

4) 当需要播放时, 处理器从存储器中读取需要的数据片段, 实施必要的数字滤波后,

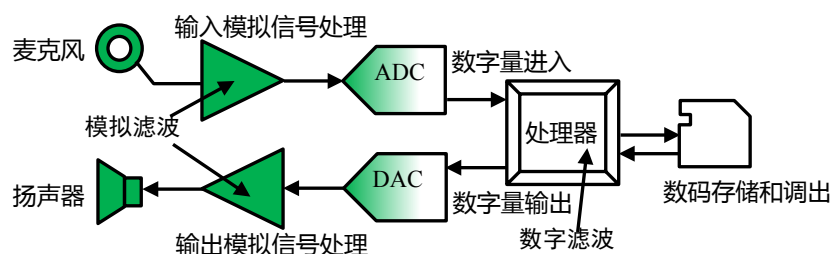


图 Section78-1 以 MP3 为典型的电子系统中的滤波环节

提交给 DAC (Digital to Analog Converter, 数模转换器), DAC 把这些离散的数码序列, 又转换成连续的模拟电压信号, 提交给执行环节。Audio-DAC 中一般都有数字滤波器。

5) 随后的“输出模拟信号处理”单元, 主要实施功率放大, 以便有足够的能量驱动扬声器发出悦耳的声音。在这个单元, 需要模拟滤波, 至少要把 DAC 输出的台阶状波形, 变成较为圆滑的, 与声音信号相似的波形。

本书仅讲授模拟滤波。

数字滤波内容, 一般在数字信号处理课程中讲授, 它足够有趣, 且功能远比模拟滤波强大, 比如把男人的声音变成女人的声音, 这在模拟滤波中是难以想象的。当然, 它也有它固有的缺点, 比如, 它需要延时处理, 或者, 它至少需要一个运算能力较强的处理器, 这比较昂贵。

但凡有竞争者共存的东西, 都不能说尽善尽美: 有它足够的优点, 就一定有致命的缺点; 看起来极差的东西, 只要它稳定生存着, 就一定有它生存的道理, 哪怕它一无是处, 也许便宜就是它最大的优点。这是一个颠扑不破的真理。

问题不在于谁好谁差? 而在我们, 怎么合理的使用它们。

模拟滤波器的实现方法——无源滤波和有源滤波

实现模拟滤波, 有以下 2 种方法: 无源滤波器和有源滤波器。

所谓的无源滤波器, passive filter, 是只用无源器件组成的滤波器。无源器件, 也称被动器件, 英文为 passive device, 或 passive component, 它的特点是无需外部供电即可工作, 一般包括电阻、电容、电感和变压器。

图 Section78-2 是一个无源滤波器, 它仅有电阻、电容、电感组成, 形成了一个几百 Hz 到 10MHz 左右的带通滤波器。

有源器件, active device, 或 active component, 是必须有额外电能供应才能工作的器件, 比如晶体管、运放、门电路、处理器等。由至少 1 个有源器件组成的滤波器, 称为有源滤波器, active filter。图 Section77-1 就是一个有源滤波器。

有源滤波器和无源滤波器至今共存, 各有优缺点, 一般来说, 优缺点是互补的。

无源滤波器的优点是：

- 1) 在大电压、电流时，很多有源器件会失效，而无源器件一般不受限制。
- 2) 在超高频时，无源器件具有天生的优势。
- 3) 实现最为简单的滤波时，无源电路有优势。
- 4) 一般来说，会比有源器件便宜一些，除非用到大个头的电感、电容。

有源滤波器的优点是：

- 1) 可以引入负反馈、可以引入放大环节，因此可以实现极为复杂的滤波器，且能轻松应对小信号。
- 2) 可以轻松实现多级滤波器的级联，而无源滤波器各级之间的互相影响是极为复杂的，多级级联非常困难。
- 3) 对超低频率，有源滤波器有天生优势。它可以利用反馈网络，通过密勒等效等方法，用很小的电容代替超大电容、电感。我们知道，特征频率越低，要求电容值越大。即便现在已经有了超级电容，我们仍应坚信，制作电容需要足够大的面积和足够小的间距，这在物理上，是受限的。单纯用无源电路，想实现超低频率的滤波器，唯一的方法是使用超大的电容器，这非常困难。
- 4) 电路计算相对更简单。

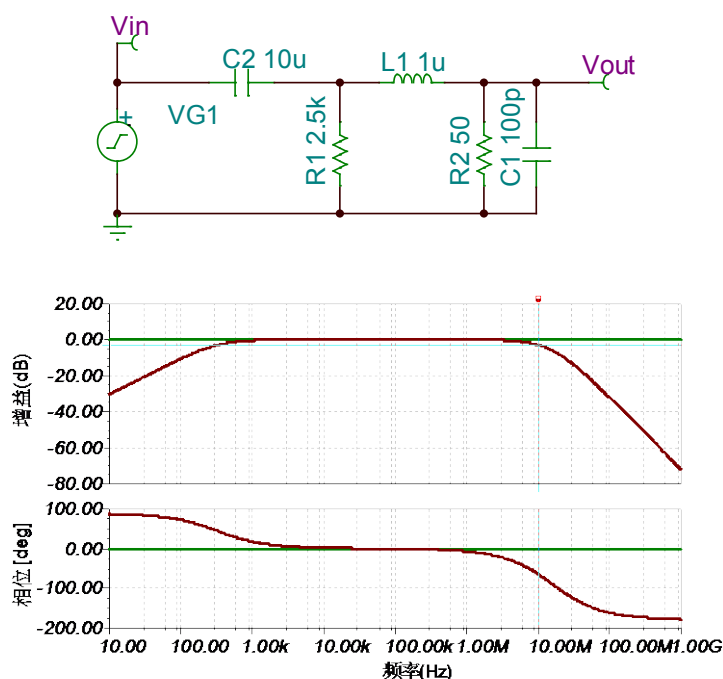


图 Section78-2 一个无源滤波器及其频率特性

有源滤波器的实现方法

经过几十年的发展，有源滤波器较为成熟的实现方法有以下几类：

1) 用运放组成的有源滤波器

这是一个庞大的分支。以运放为基本单元，配合电阻、电容，可以实现各式各样的有源滤波器。单纯讲授此内容，一本书看起来也是不够的。本书仅作简单介绍。

2) 状态变量型(State Variable Filter)集成有源滤波器

这是一个集成芯片。它的核心仍是运放电路，通过不同的管脚输出高通、低通和带通，用户可以自由搭配实现不同的功能。由于其具有极高的通用性，就被芯片生产厂家用集成电路实现了，因此也叫通用滤波器，Universal filter。

3) 开关电容滤波器

这是一类崭新的滤波器。它处理的是模拟信号，但是处理过程却是很“数字化”的。它利用这样一个核心思想：一个电容器，给它增加一个开关，用开关的开断控制电容的充电或者放电，可以控制其平均电流，以此模拟一个变值的电阻。因此，它必须有一个外部提供的 CLK 信号，以控制内部电容的开关频率，当开关频率发生变化时，整个滤波器的效果也发生改变，由此可以营造一个“特征频率可变”的滤波器。

相比于开关电容滤波器，普通滤波器要实现特征频率的改变，需要人工改变电路中的电阻或者电容值，这很麻烦且很多情况下难以实现。但是，开关电容滤波器，你只要改变外部的时钟频率，就可以修改特征频率，这对于按照节拍工作的处理器来说，是一件轻松的事情。

比如某一款开关电容滤波器实现的低通滤波，其截止频率是开关时钟频率的 $1/100$ ，要实现一个 20kHz 的低通滤波，只需要给它提供一个 2MHz 的时钟即可。要将 20kHz 的截止频率变为 19kHz ，只需要改变时钟为 1.9MHz 。

这看起来非常神奇，也很美妙。事实确实如此。但是，开关电容滤波器也有致命的缺点，外部提供的 CLK 信号，一定会在输出波形中或多或少存在，这需要再增加一级额外的滤波器，并且如果信号很小，这类滤波器也是不善于处理的。

本书重点讲述以运放为核心的滤波器，这是滤波器实现方法的基础。

滤波器的形态分类

从滤波器实现的效果看，滤波器分为以下几种形态：

1) 低通(Low Pass)和高通(High Pass)滤波器

单一的低通，滤除高于上限截止频率 f_H 的。单一的高通，滤除低于下限截止频率 f_L 的。

2) 带通(Band Pass)和选频滤波器

一般的带通，滤除低于下限截止频率 f_L 的，高于上限截止频率 f_H 的，它有两个特征频率点，比如音频放大器，只保留 10Hz ~ 50kHz 的。特殊的带通，实际是一种点通，即仅允许一个某一中心频率 f_c 两边很窄频段内的信号通过，它只有一个特征频率。比如某些选频放大器，利用 LC 谐振实现，仅在某一频率点处发生谐振，产生很大的电压增益，周边频率处，增益迅速衰减。

3) 带阻(Band Rejection or Band Stop)滤波器和陷波器(Notch)

和带通刚好相反，它滤除高于 f_L 且低于 f_H 的，也有两个特征频率点。特殊的带阻，也叫陷波器，或者称为点阻滤波，它只对某一中心频率 f_c 附近的频率量实施大幅度衰减。比如 50Hz 陷波器。

4) 全通(All pass)滤波器

很奇怪吧，全通，都通过了，那还叫什么滤波啊。其实一点儿都不奇怪。它的特点是，

在增益上，全部频率范围内，都是一样的，看起来和一根导线直通差不多。但是在相移上，它对不同频率的输入信号，具有不同的相移，因此，你也可以称它为“相移滤波器”。图 Section78-3 最右侧的上下两个图，分别绘制了这种滤波器的幅频特性和相频特性。

它也是只有一个特征频率点 f_0 。

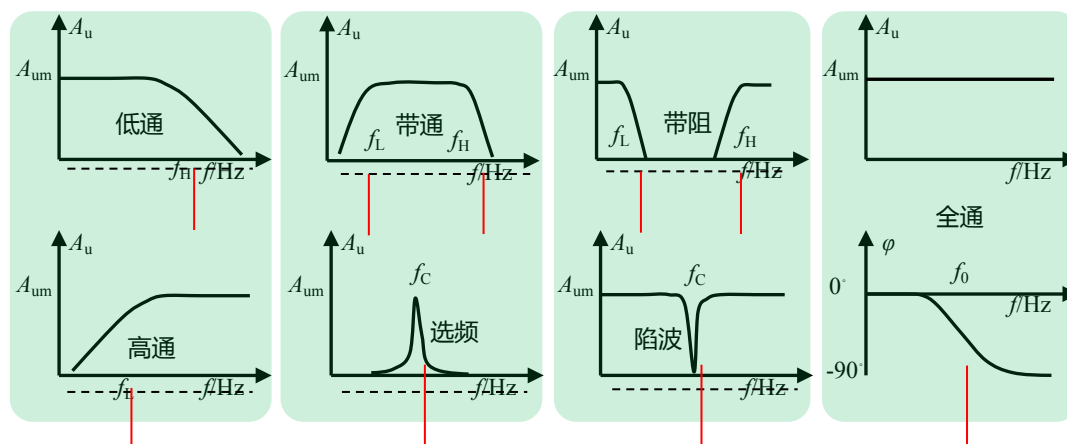


图 Section78-3 滤波器形态

模拟滤波器的传递函数和阶数

时域、复频域和频域分析

在自动控制领域，常用传递函数表示系统的频率特性。所谓的传递函数 $A(S)$ ，是一个系统的输出时域函数 $u_o(t)$ 的拉氏变换 $U_o(S)$ ，与输入时域函数 $u_i(t)$ 的拉氏变换 $U_i(S)$ 的比值。

$$A(S) = \frac{U_o(S)}{U_i(S)}$$

对一个客观存在的电路，要写出其传函，可以采用简单的方法：电路中的电阻仍为 R ，电容写成 $\frac{1}{sC}$ ，电感写成 sL ，然后用虚短虚断法，写出增益的 S 域表达式，即为传函。

S 域表达式中的 S ，是一个复频率，即包含瞬态分析的实部 σ ，也包含稳态分析的虚部 $j\omega$ ：

$$S = \sigma + j\omega$$

因此， S 域分析也称为复频域分析。

对于滤波器来讲，多数情况下我们只关心其稳态表现，即持续输入一个稳定正弦波，输出也将是一个稳定正弦波，我们研究它们之间的幅度差异以及相移。此时，可以用 $S = j\omega$ 代入。这就形成了增益的复数表达式，与角频率 $j\omega$ 之间的关系。此时，虽然增益表达式是一个复数，但频率是一个实数，其分析结果属于频域。

例如，一个实际电路如图 Section77-1 所示。用传递函数方法，可以先将电路更换成如图 Section78-4 左侧电路所示。利用虚短虚断，可以写出其传递函数为：

$$A(S) = \frac{U_o(S)}{U_i(S)} = -\frac{R_f \parallel \frac{1}{SC_3}}{R_g} = -\frac{\frac{R_f \times \frac{1}{SC_3}}{R_f + \frac{1}{SC_3}}}{R_g} = -\frac{R_f}{R_g} \times \frac{1}{1 + SR_f C_3}$$

这是一个复频域表达式，即传递函数。将 $S = j\omega$ 代入，可以得到与式 (Section77-1) 完全一致的结果，即频域表达式。

因此，有两种方法常用于滤波器的频域分析，第一种，直接 S 域求解传函，然后利用

$S = j\omega$ ，将其变换成频域表达式，以显现复数增益随频率变化的规律。第二种，直接在图 Section78-4 右侧电路上计算，直接获得复数增益随频率变化的规律。多数人采用第一种方法，至少在分析的时候，少些一个字母总是减少出错概率的。

但是，一旦涉及瞬态分析，那只有使用 S 域求解传函了，或者写出微分方程求解。

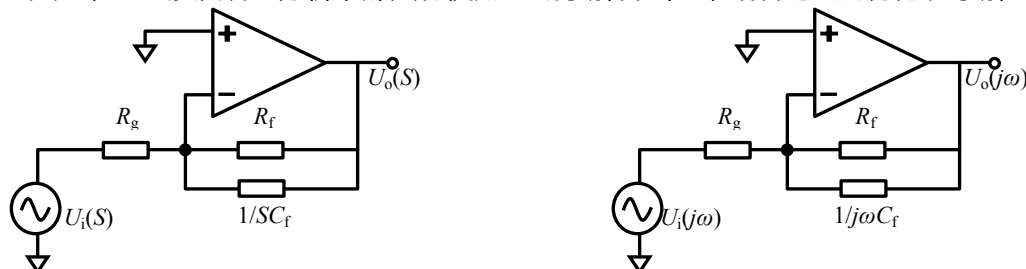


图 Section78-4 图 Section77-1 在复频域和频域的等效电路

滤波器的复频域通用表达式以及阶数概念

图 Section78-4 是一个一阶低通滤波器，其表达式可以写成：

$$A(S) = A_m \times \frac{1}{1 + aS}$$

(Section78-1)

其中， A_m 代表中频增益的模。全部的随频率相关的表达式，都依赖于后面一项。

更为复杂的滤波器，可以写成如下更为通用的传函形式：

$$A(S) = A_m \times \frac{1 + m_1 S + m_2 S^2 + \dots + m_m S^m}{1 + n_1 S + n_2 S^2 + \dots + n_n S^n}$$

(Section78-2)

其中， $n \geq m$ ， n 称为滤波器的阶数。

一阶高通滤波器为：

$$A(S) = A_m \times \frac{S}{1 + aS}$$

二阶低通滤波器为：

$$A(S) = A_m \times \frac{1}{1 + aS + bS^2}$$

二阶高通滤波器为：

$$A(S) = A_m \times \frac{S^2}{1 + aS + bS^2}$$

二阶窄带通滤波器：

$$A(S) = A_m \times \frac{\frac{S}{Q}}{1 + \frac{S}{Q} + S^2}$$

等等。总之，滤波器就是围绕着传函的结构、参数的选择，演变出形形色色的滤波形态。

滤波器的阶数越高，其传函表达式也更为复杂，相对应的电路也更为复杂。但是，它带来的滤波效果，也更加接近于理想砖墙式滤波器。

所谓的砖墙式滤波器，即幅频特性不再是图 Section78-3 中的曲线，而是非 0 即 1 的直线，像砖墙一样，有就是一堵墙，没有就是完全开口。如图 Section78-5 所示。图中，绿色是理想的砖墙——低通，蓝色是一阶低通滤波器的幅频特性，而红色是某个二阶滤波

器的幅频特性，很显然，二阶滤波器更接近于砖墙。

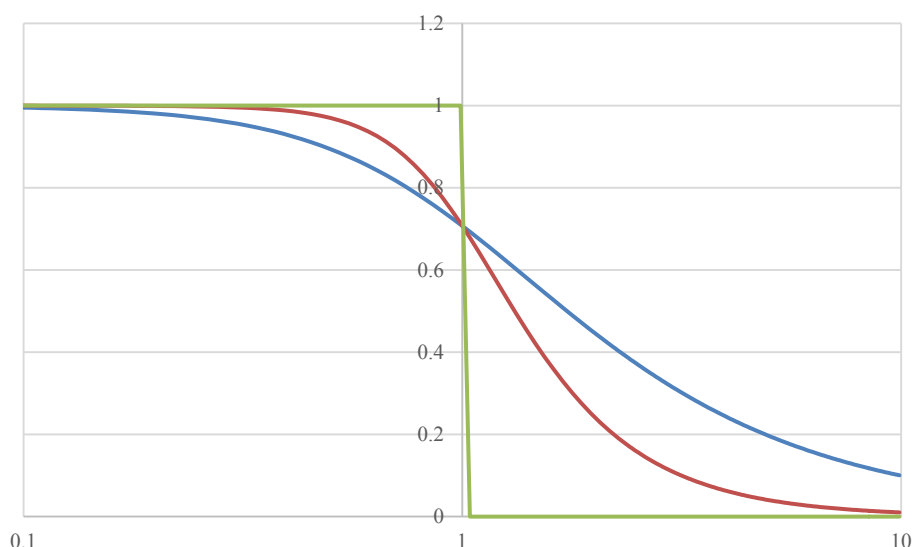


图 Section78-5 一阶低通、二阶低通与砖墙式的区别

模拟滤波器的关键频率点

低通滤波器的上限截止频率 f_H

在低通滤波器中，随着频率的增大，增益的模开始下降，当增益的模变为中频增益的 $1/\sqrt{2}$ ，即 0.707 倍时，此时的频率称为低通滤波器的上限截止频率，用 f_H 表示。

高通滤波器的上限截止频率 f_H

在高通滤波器中，随着频率的减小，增益的模开始下降，当增益的模变为中频增益的 $1/\sqrt{2}$ ，即 0.707 倍时，此时的频率称为高通滤波器的下限截止频率，用 f_L 表示。

特征频率 f_0

特征频率是传函中较美的频率点，即在数学上，它是使得传函最简单的点。

对于一阶、三阶等奇数阶滤波器，传函中的分母上，实部和虚部相等的频率点，称为特征频率。其特征为，奇数阶滤波器的相移依次为 $\pm 45^\circ$ ， $\pm 135^\circ$ 。

对于二阶、四阶等偶数阶滤波器，传函中的分母上，实部为 0 的点，或者虚部为 0 的点，称为特征频率。其特征为，偶数阶滤波器的相移依次为 $\pm 90^\circ$ ， $\pm 180^\circ$ 。

定义特征频率的相移规则为：阶数每增加 1 阶，对于低通，特征频率点处的相移顺时针转动 45° ，即在原有滤波器基础上，再滞后 45° 。对于高通，则逆时针转动 45° ，即在原有滤波器基础上，再超前 45° 。

比如一个四阶低通滤波器，其传函为：

$$A(S) = A_m \times \frac{1}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + a_3 S^3 + a_4 S^4}$$

根据相移规则，它的特征频率点应为相移等于 $4 \times 45^\circ = 180^\circ$ 的频率点，即虚部为 0 点，则在该频率处，有：

$$a_1 j\omega + a_3 (j\omega)^3 = j(a_1 \omega - a_3 \omega^3) = 0$$

据此，可以求解出特征频率点。

特征频率点的引入，给滤波器分析带来了极大的方便。因为，只依靠截止频率的话，

由于截止频率的表达式的模的 0.707 倍，而模的表达式是开根号的，求解方程会异常困难。而特征频率点的求解，则会很方便。

在很多滤波器中，特征频率并不等于截止频率，一般来说，仅在巴特沃斯型滤波器中，两者才会相等。

中心频率 f_c

在窄带通和陷波器中，存在中心频率。

窄带通滤波器中，增益最大值处，或者相移为 0 度或者 360 度的整数倍时的频点，称为中心频率，center frequency，用 f_c 表示。

陷波器中，增益最小值处，或者相移为 0 度或者 360 度的整数倍时的频点，称为中心频率，center frequency，用 f_c 表示。

窄带通和陷波器都只能用偶数阶滤波器实现。对于窄带通来说，传函分母为 0，即传函的极点，是发生增益最大的唯一位置，此时一定有相移为 0 或者 360 度整数倍的特性。而对于陷波器，传函的分子为 0，即传函的零点，是发生增益最小的唯一位置。

当然，这是理想情况，实际滤波器中，永远无法出现零点和极点。

Section79. 从运放组成的一阶滤波器入手

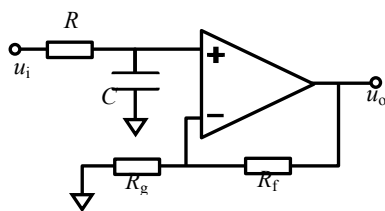
一阶滤波器，一般只使用一只关键的电容。这样，表达式中只会出现一个 S ，形成 $n=1$ 的传函结构。

其实，理论上说，只要用电容能够实现的，用电感也可以。但是，现实并不是想象中那么美丽。在本节之后的思考中，我们会分析为什么在运放组成的滤波器中很少用电感。

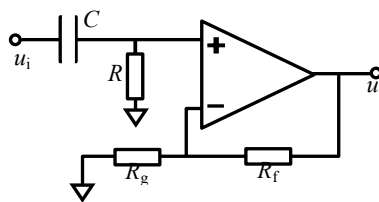
运放组成的一阶滤波器，非常简单，仅有如下 6 种常见电路：

同相输入的一阶低通和高通滤波器

两个电路如图 Section79-1 所示。



(a) 一阶同相低通滤波器



(b) 一阶同相高通滤波器

图 Section79-1 同相输入的一阶低通和高通滤波器

对(a)图，直接写出传函为：

$$A(S) = \frac{1}{\frac{S}{RC} + 1} \times \left(1 + \frac{R_f}{R_g}\right) = \left(1 + \frac{R_f}{R_g}\right) \times \frac{1}{1 + SRC}$$

定义 $S = j\omega$ ，且 $\omega_0 = 1/RC$ ，将传函变换成频域表达式——复数表达式：

$$\dot{A}(j\omega) = \left(1 + \frac{R_f}{R_g}\right) \times \frac{1}{1 + j\omega RC} = A_m \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = A_m \times \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section79-1]

增益的模为实数：

$$|\dot{A}(j\omega)| = A_m \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = A_m \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

[Section79-2]

很显然，增益的模呈现规律为：频率极低时，增益近似为 A_m ，低通，随着频率逐渐增大到 $f = f_0$ ，增益变为 $0.707A_m$ ，此频率为截止频率 f_H ，也是特征频率 f_0 。此后，随着频率的再增大，增益会以 $-20\text{dB}/10$ 倍频的速率逐渐下降。非常巧的是，在这个电路中，特征频率恰好就是截止频率。

继续分析，输入输出相移为实数：

$$\varphi(f) = -\tan^{-1} \frac{f}{f_0}$$

[Section79-3]

相移的求解，需要对原表达式稍稍处理，分子分母同乘以分母的共轭值，使得分母变为实数，即可轻松看出相移确实为上式，参见图 Section79-2。当然，对数学较为熟悉的读者，可以不用这样。

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = A_m \times \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1^2 - (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = A_m \times \frac{1 - j\frac{f}{f_0}}{1^2 + (\frac{f}{f_0})^2} = \frac{A_m}{1^2 + (\frac{f}{f_0})^2} \times (1 - j\frac{f}{f_0})$$

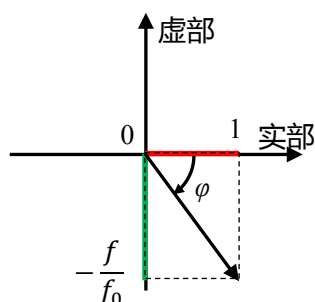


图 Section79-2 求解相移示意图

能够看出，在低频处，相移几乎为 0，在特征频率处，相移为 -45° ，随着频率的再增大，相移逐渐逼近 -90° 。

对图 Section79-1(b)，高通滤波器，利用同样的方法可以得到如下关系：

$$\dot{A}(f) = A_m \times \frac{1}{1 - j\frac{f_0}{f}}, \quad A_m = 1 + \frac{R_f}{R_g}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section79-4]

增益的模为实数：

$$|\dot{A}(f)| = A_m \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_0}{f})^2}}$$

[Section79-5]

相移为超前的：

$$\varphi(f) = \tan^{-1} \frac{f_0}{f}$$

[Section79-6]

举例 1：

电路如图 Section79-1 所示。已知运放为理想的，供电正常， $R=1.00\text{k}\Omega$ ， $C=0.22\mu\text{F}$ ， $R_g=1.10\text{k}\Omega$ ， $R_f=10.0\text{k}\Omega$ ，求：

- 1) 电路的中频增益 A_m ，上限截止频率 f_H ；
- 2) 当输入信号为正弦波，幅度为 100mV ，频率为 1kHz ，求输出信号幅度，输入输出之间的相移。
- 3) 用合适的仿真软件实施仿真，与前述计算对比。

解：1) 利用式(Section79-1)，可知：

$$A_m = 1 + \frac{R_f}{R_g} = 1 + \frac{10.0}{1.10} = 10.09 = 20.08\text{dB}$$

$$f_H = f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{6.28 \times 1000 \times 0.22 \times 10^{-6}} = 723.43\text{Hz}$$

2) 利用式(Section79-2)，可知：

$$U_{op} = |A(f)| \times U_{ip} = A_m \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}} \times U_{ip} = 10.09 \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1000}{723.43})^2}} \times 0.1\text{V} = 0.5914\text{V}$$

由式(Section79-3)，可知：

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{f}{f_0} = -\tan^{-1} \frac{1000}{723.43} = -54.11^\circ$$

3) 利用 TINA-TI 绘制电路如图 Section79-3 所示。运放选择为 OPA1611，可以在 $\pm 2.25\text{V} \sim \pm 18\text{V}$ 供电，带宽为 40MHz ，不会影响低通滤波器 723.43Hz 的截止频率——足够理想。

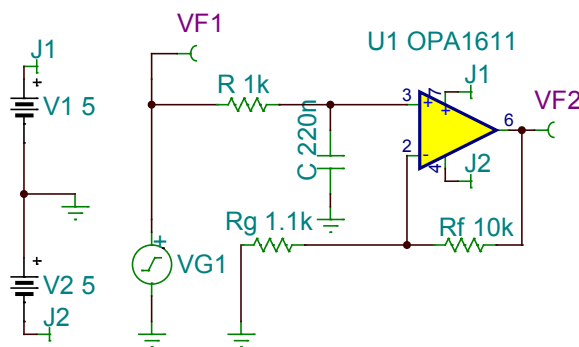


图 Section79-3 同相输入一阶低通滤波器实验（举例 1 电路）

首先仿真频率特性：利用 TINA-TI 中的“分析——交流分析——交流传输特性”，选择起始频率为 1Hz ，终止频率为 1MHz ，绘制包含“幅频特性，相频特性”的频率特性图，如图 Section79-4 所示。

利用软件的测量轨线，可得 1Hz 处，闭环增益的模为 20.08dB ，与计算吻合。拉动测量轨线，找到增益下降 -3.01dB 频点，为 $[723.92\text{Hz}, 17.07\text{dB}]$ ，在相移图中，同样找到 $[723.92\text{Hz}, -45.02^\circ]$ ，可知该电路的 -3dB 带宽，或者说上限截止频率的仿真实测值为 723.92Hz ，与计算值 723.43Hz 基本吻合。在该点处，相移为 -45.02° ，也与理论值 -45° 基本吻合。

其次，对于 1kHz ， 0.1V 输入正弦波的仿真实测，有两种方法验证前述计算的准确性。

第一种方法，最直观的测量仪器法：

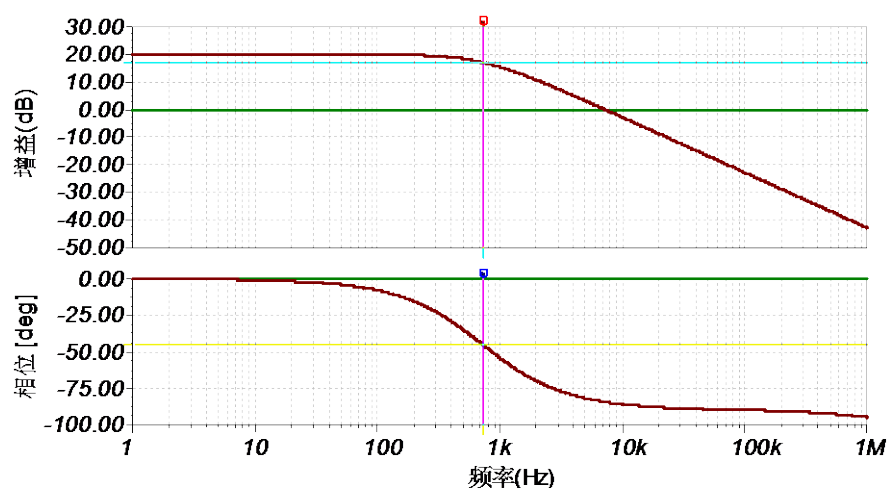


图 Section79-4 同相输入一阶低通滤波器仿真频率特性

在仿真软件中，打开“T&M”——“示波器”，设置触发源为 VF1，触发方式为 Normal，启动“Run”，在“Channel”中选中“VF1”和“VF2”，并调整增益，在 Time/div 中选择每格 100μs，屏幕上将显示两个通道的工作波形，将此波形停止，用示波器下方的“Data，导出”，可以将波形导出并拷贝，得到如图 Section79-5 左侧的波形图。

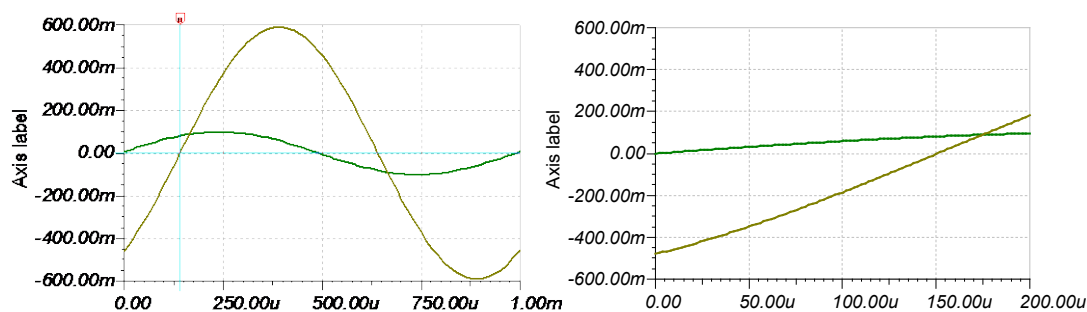


图 Section79-5 同相输入一阶低通滤波器仿真时域波形

从图中可以大致看出，第一，电路工作是正常的；第二，输出幅度大约为 0.6V，与理论计算的峰值 0.5914V 大致吻合；第三，输出滞后于输入，用测量轨线可以测得，输出过零点大约滞后于输入过零点 140.99μs，可知

$$\varphi_{\text{仿真实测}} = -360^\circ \times \frac{140.99\mu\text{s}}{1000\mu\text{s}} = -50.76^\circ$$

这与理论计算的 -54.11° 存在较大差异，我不满意。我认为是示波器工作中的触发点不细致准确造成的，于是把波形的扫速提高，触发点 0V 微调至 1mV，得到了图 Section79-5 右侧的放大图，从图中可以清晰看出，滞后时间约为 150μs，折算成相移，刚好是 -54° ，这次就算吻合了。

之所以用如此繁琐的语言说这个过程，是希望读者能够养成良好的习惯：对细致的问题，要细致，要深究。

对输出波形的幅度，我们仅用肉眼观察大约不到 0.6V，这还不够精细。可以用 TINA-TI 中“T&M”中的万用表交流电压档，可得 VF2 有效值为 418.22mV，折算为峰值为 591.45mV，与计算值 0.5914V 基本吻合。

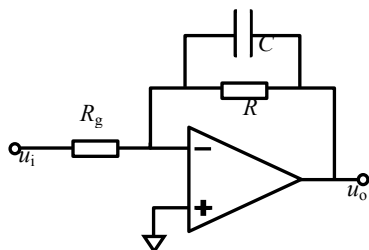
第二种方法，用频率特性图换算。

在幅频特性中图，利用测量轨线，输入 1000Hz，可得增益为 15.44dB，折算为 5.916 倍，那么输出应为 0.5916V，这包含四舍五入，因此也算基本吻合。

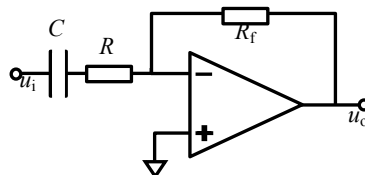
在相频特性图中，利用测量轨线，输入 1000Hz，可得相移为-54.12°，基本吻合。

反相输入的一阶低通和高通滤波器

电路如图 Section79-6 所示。左侧为低通，右侧为高通。



(a) 一阶反相低通滤波器



(b) 一阶反相高通滤波器

图 Section79-6 反相输入的一阶低通和高通滤波器

对低通电路，按照频域复阻抗方法（第二种方法）直接写出频域表达式为：

$$\dot{A}(f) = -\frac{R \parallel \frac{1}{j \times 2\pi f C}}{R_g} = -\frac{R}{R_g} \times \frac{1}{1 + j \frac{f}{\frac{1}{2\pi RC}}} = A_m \times \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}, \quad A_m = -\frac{R}{R_g}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section79-7]

增益的模为正实数：

$$|\dot{A}(f)| = -A_m \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}}$$

[Section79-8]

相移为超前的：

$$\varphi(f) = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{f}{f_0}$$

[Section79-6]

之所以超前，是因为反相放大器原本就有 180 度反相。

对高通电路，按照频域复阻抗方法（第二种方法）直接写出频域表达式为：

$$\dot{A}(f) = -\frac{R_f}{R + \frac{1}{j \times 2\pi f C}} = -\frac{R_f}{R} \times \frac{1}{1 - j \frac{1}{\frac{2\pi RC}{f}}} = A_m \times \frac{1}{1 - j \frac{f_0}{f}}, \quad A_m = -\frac{R_f}{R}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section79-7]

增益的模为正实数：

$$|\dot{A}(f)| = -A_m \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_0}{f})^2}}$$

[Section79-8]

相移为滞后的：

$$\varphi(f) = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{f_0}{f}$$

[Section79-9]

举例 2：

电路如图 Section79-7 所示。求：

1) 电路的中频增益 A_m ，下限截止频率 f_H ；

2) 当输入信号为正弦波，幅度为 100mV，频率为 1kHz，求输出信号幅度，输入输出之间的相移。

解：本电路中，与标准电路存在一些差别，第一，电阻 R_g 和电容 C 的连接位置颠倒了，原电路中信号源接电容，而本电路中信号源接的是电阻。在绝大多数情况下，这不会影响电路性能；第二，电阻的符号标注不同，这也不会影响什么。

其实，这都是我故意的，就是为了避免读者硬套公式。

1) 据式(Section79-7)，中频增益和下限截止频率分别为：

$$A_m = -\frac{R}{R_g} = -\frac{10k}{1k} = -10$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_g C} = \frac{1}{6.28 \times 1000 \times 220 \times 10^{-9}} = 723.43Hz$$

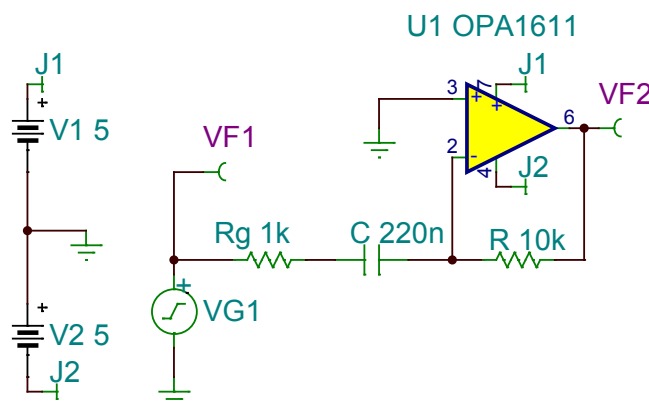


图 Section79-7 反相输入的一阶高通滤波器（举例 2）

2) 据式(Section79-8)：

$$|\dot{A}(1000)| = 10 \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{723.43}{1000}\right)^2}} = 8.102$$

$$U_{op} = |\dot{A}(1000)| \times U_{ip} = 0.8102V$$

据式(Section79-9)：

$$\varphi(1000) = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{723.43}{1000} = -144.12^\circ$$

为了验证，我做了仿真实验，结果如下：

1) $A(1MHz)=A_m=20dB$ ， $\varphi(1MHz)=0$ ， $A(723.43Hz)=16.99dB$ ， $\varphi(723.43Hz)=-135^\circ$

证明，中频增益、下限截止频率的计算是准确的。

2) $A(1000Hz)=18.17dB=8.1002$ ， $\varphi(1000Hz)=-144.12^\circ$ ，基本吻合。用万用表交流电压测量 VF2，结果为 572.94mV，换算成峰值为 0.81026V，也吻合。

一阶全通滤波器

电路如图 Section79-8 所示，左侧为滞后型一阶全通，右侧为超前型。

以左侧为例，根据虚短虚断方法列出方程如下：

1) 先从最简单的同相输入端入手：

$$U_+(S) = U_i(S) \times \frac{1}{R + \frac{1}{SC}} = U_i(S) \times \frac{1}{1 + SRC} \quad (1)$$

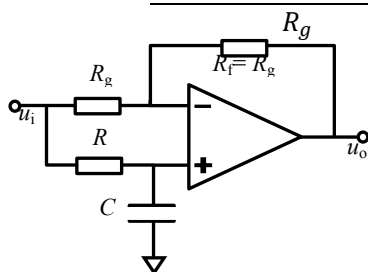
2) 利用虚短，得

$$U_-(S) = U_+(S) \quad (2)$$

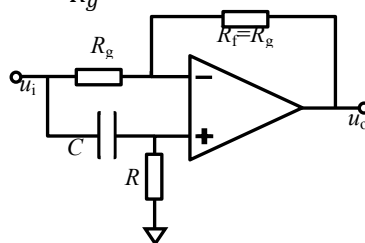
3) 对负输入端，利用虚断，写成节点电压法方程，并将式(1)、(2)代入：

$$\frac{U_i(S) - U_-(S)}{R_g} = \frac{U_-(S) - U_o(S)}{R_f (= R_g)}$$

$$\frac{U_i(S) - U_i(S) \times \frac{1}{1 + SRC}}{R_g} = \frac{U_i(S) \times \frac{1}{1 + SRC} - U_o(S)}{R_g}$$



(a) 滞后型



(b) 超前型

图 Section79-8 一阶全通滤波器

化简得：

$$U_o(S) = U_i(S) \times \frac{2}{1 + SRC} - U_i(S) = U_i(S) \times \frac{1 - SRC}{1 + SRC}$$

即：

$$A(S) = \frac{U_o(S)}{U_i(S)} = \frac{1 - SRC}{1 + SRC}$$

将 $S = j\omega = j \times 2\pi f$ ，且 $f_0 = 1/2\pi RC$ 代入，得频域电压增益为：

$$A(f) = \frac{1 - j \frac{f}{f_0}}{1 + j \frac{f}{f_0}}$$

(Section79-10)

电压增益的模为：

$$|A(f)| = \frac{\sqrt{1^2 + (-\frac{f}{f_0})^2}}{\sqrt{1^2 + (\frac{f}{f_0})^2}} = 1$$

(Section79-11)

增益表达式是一个复数，其幅角即为相移。而表达式本身是由复数分子和复数分母组成，因此其幅角为分子幅角减去分母幅角。所以：

$$\varphi(f) = \varphi(\text{分子}) - \varphi(\text{分母}) = -\tan^{-1} \frac{f}{f_0} - \tan^{-1} \frac{f}{f_0} = -2 \tan^{-1} \frac{f}{f_0}$$

[Section79-12]

可以看出，相移始终为负值，即输出滞后于输入，因此属于滞后型。

也可以利用方框图法分析这类电路：

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \frac{U_+(S) - U_-(S)}{U_i(S)} \Big|_{U_o(S)=0} = \frac{U_i(S) \times \frac{1}{1+SRC} - U_i(S) \times \frac{R_f}{R_g + R_f}}{U_i(S)} = \frac{1}{1+SRC} - 0.5 \\ \dot{F} &= \frac{U_-(S) - U_+(S)}{U_o(S)} \Big|_{U_i(S)=0} = \frac{R_g}{R_g + R_f} = 0.5 \\ A(S) &= \frac{U_o(S)}{U_i(S)} = \frac{\dot{M}}{\dot{F}} = \frac{2}{1+SRC} - 1 = \frac{1-SRC}{1+SRC} \end{aligned}$$

与前述分析完全一致。

用同样的方法，可以对图 Section79-8 右侧的超前型进行分析：

$$\begin{aligned} U_+(S) &= U_i(S) \times \frac{R}{R + \frac{1}{SC}} = U_i(S) \times \frac{1}{1 + \frac{1}{SRC}} \\ U_o(S) &= U_i(S) \times \frac{2}{1 + \frac{1}{SRC}} - U_i(S) = U_i(S) \times \frac{1 - \frac{1}{SRC}}{1 + \frac{1}{SRC}} \\ A(f) &= \frac{1 + j \frac{f_0}{f}}{1 - j \frac{f_0}{f}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \end{aligned}$$

[Section79-13]

$$|A(f)| = 1$$

[Section79-14]

$$\varphi(f) = \varphi(\text{分子}) - \varphi(\text{分母}) = \tan^{-1} \frac{f_0}{f} - (-\tan^{-1} \frac{f_0}{f}) = 2 \tan^{-1} \frac{f_0}{f}$$

[Section79-12]

可以看出，相移永远大于 0，属于超前型，即输出超前于输入，且最大超前不超过 180°。

举例 3：

有一个幅度为 100mV，频率为 1000Hz 的正弦输入信号，加载到滤波器的输入端。要求输出为同频正弦波，且超前输入 45°，幅度为 1V，请设计电路实现这个要求。

解：分析题目，首先应该使用一个超前型全通滤波器，电路结构如图 Section79-8 右侧。但是，它的增益只有 1 倍，因此后级必须增加一个没有相移的 10 倍放大电路，才能使得 100mV 的输入信号变成 1V 的输出信号。后面的 10 倍放大器很好设计，关键在于全通滤波器的设计。

根据式[Section79-12]，已知输入频率为 1000Hz，则有：

$$\varphi(1000) = 2 \tan^{-1} \frac{f_0}{1000} = 45^\circ$$

可以解得：

$$\frac{f_0}{1000} = \tan \frac{45^\circ}{2} = 0.4142$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 414.2\text{Hz}$$

一般来说，任意选择 R 、 C ，只要乘积满足上式即可。但是，在实际操作中，电阻选择既不能太小，也不能太大，可以先考虑在 $1\text{k}\Omega$ 左右——这是一个比较保险的选择，除非有其它特殊的要求。然后根据电容值结果，选择容易买到的 E6 系列电容（只有 6 个可选值：1/2.2/3.3/4.7/6.8/8.2），再重新计算电阻。步骤如下：

$$C = \frac{1}{2\pi R f_0} = \frac{1}{6.28 \times 1000 \times 412.4} = 0.3844\mu\text{F}$$

选择 $C=0.33\mu\text{F}$ ，重新计算电阻。

$$R = \frac{1}{2\pi C f_0} = \frac{1}{6.28 \times 0.33 \times 10^{-6} \times 412.4} = 1170\Omega$$

选择 E96 系列电阻， $R=1180\Omega$ 。至此，完成了全通滤波器的核心设计。

下面进行其它电路设计，这相对较为简单。先确定电路结构如图 Section79-9 所示。

1) 对全通滤波器的另外两个电阻，必须是等值的，且两者的并联最好等于 R ，在 E96 系列电阻中选择最为接近的是 $R_g=R_f=2.37\text{k}\Omega$ 。

2) 对后级的 10 倍放大电路，可以先确定 $R_2=1\text{k}\Omega$ ，再根据增益=10，理论上 $R_3=9\text{k}\Omega$ ，但是 E96 系列没有这个电阻值，选择最为接近的 $9.09\text{k}\Omega$ 。

运放选择为带宽 40MHz 的 OPA1611，至此，全部电路设计完成。

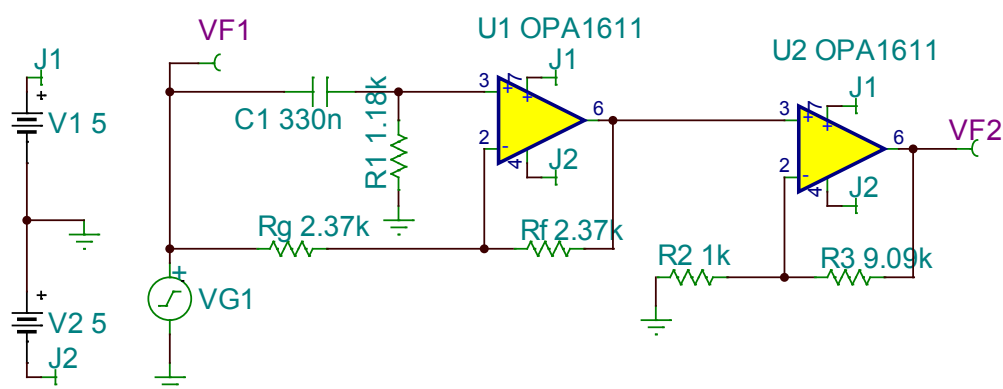


图 Section79-9 举例 3 电路

对上图电路进行仿真，实测结果如下：

电路的输入输出波形如图 Section79-10 所示，可以看出当输入 0.1V, 1000Hz 正弦波时，输出波形幅度大约为输入幅度的 10 倍，且总体上超前了大约 $360^\circ \times 125\mu\text{s}/1\text{ms} = 45^\circ$ 。满足题目要求。

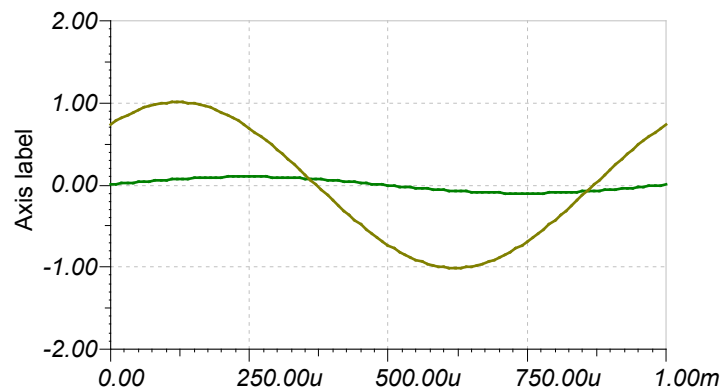


图 Section79-9 举例 3 电路的输入输出波形

Section80. 思考

本节，提出一些问题，启发读者思考。没有思考，任何学习和工作的过程都将是乏味的。

为什么是电容，而不是电感？

储能器件 C 或者 L ，其容抗或者感抗，都随频率变化，而电阻的阻值却不随频率变化。将储能器件引入到运放电路中，就能够营造出增益随频率变化的特性。

运放组成的滤波器电路中，绝大多数甚至全部，都选择电容作为储能器件，而很少使用电感。这是为什么？

以一个常见的一阶低通滤波器为例，可以看出问题所在。图 Section80-1 是由电感和电阻组成的一阶低通滤波器，称为 LR 低通滤波器。而图 Section80-2 是我们多次见过的 RC 低通滤波器。这两个滤波器的工作频段，都可以分成 3 部分：

低频时，对 LR 型，电感的感抗远远小于电阻值，会产生增益为 1；对 RC 型，则要求电容的容抗远大于电阻值，也会产生增益为 1。这就要求低频时电感具有极小的等效导通电阻，而电容应用极大的漏电阻。

高频时，对 LR 型，电感的感抗远大于电阻值，增益接近于 0；对 RC 型，电容容抗远小于电阻值，增益接近于 0。此时要求，电感的漏电阻应很大，而电容的等效导通电阻应很小。

介于极高频和极低频率之间的中频段，也就是特征频率或者截止频率发生的频段。此时，应有感抗和容抗都和电阻值接近。

而滤波器中的电阻值，不是任意选择的。一般来讲，为了保证运放输出端流出电流不要太大，电阻值不能选择太小的， $10V/10\Omega=1A$ ，而从噪声考虑，电阻又不能过大，因此 $100\Omega\sim100k\Omega$ 是常见选择，而选择 $1k\Omega$ 是普适安全的。

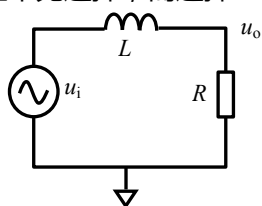


图 Section80-1 LR 低通电路

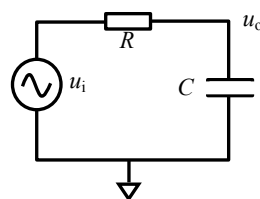


图 Section80-2 RC 低通电路

对于 LR 滤波器，其增益随频率变化的表达式为：

$$\dot{A}(f) = \frac{R}{R + j2\pi fL} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{\frac{R}{2\pi L}}} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}, \quad f_0 = \frac{R}{2\pi L}$$

如果选择电阻为 $1k\Omega$ ，可以看出，特征频率的范围就取决于电感量。一般来说，受限于制造难度，多数电感值在 $1nH\sim100mH$ 之间。据此：

$$f_0 = \frac{R}{2\pi L} = \frac{10^3}{6.28(10^{-9}\sim10^{-4})} = 159GHz\sim1.59MHz$$

即多数电感能够工作的特征频率区间，大约介于 $1.59MHz\sim159GHz$ 。这就决定了一个事实：电感构成的滤波器，多数情况下，只能工作在截止频率较大的场合。而这个频率区间，与运放的工作区间非常不吻合。一般运放的工作频率区间是 $0Hz\sim100MHz$ 。

再看电容组成的滤波器。

常见电容器的容值一般为 $1\text{pF}\sim 1000\mu\text{F}$ ，即 $10^{-12}\text{F}\sim 10^{-3}\text{F}$ 。

$$A(f) = \frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{6.28 \times 10^3 (10^{-12} \sim 10^{-3})} = 159\text{MHz} \sim 0.159\text{Hz}$$

即用电容组成的滤波器，其特征频率可以发生在 $0.159\text{Hz}\sim 159\text{MHz}$ ，这恰好与运放的工作频率相吻合。

因此，用运放组成的滤波器，其实无论低通还是高通，都适合于使用 RC 型，而不是 LR 型。而在频率特别高的场合，电感则是更为常见的，但是它们通常是无源滤波器，或者直接使用分立晶体管实现。

一阶滤波器，还有其它类型吗？

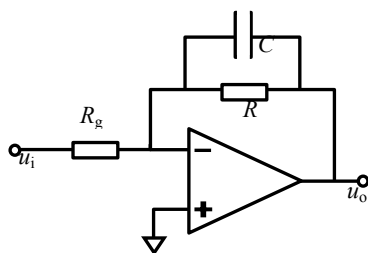
在 Section79 中，我们给大家介绍了 6 种一阶滤波器类型。它们都是只使用了一只电容器，区别仅在于其电路结构不同。难道，只有这 6 种吗？

首先，在传函中，为什么 n 必须大于等于 m ？ m 一旦大于 n ，会出现什么情况？

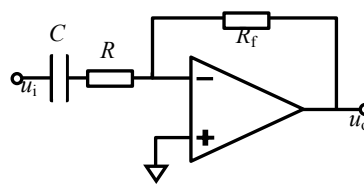
其次，为什么只能使用一只电容器？如果使用两只电容器，可否组成一阶滤波器？

第三，在仅使用一只电容器的条件下，能否构建其它电路，以实现有别于 Section79 中介绍的 6 种电路？

比如，在图 Section79-6 电路中，可否增加电阻、减少电阻、移动电容位置，以改变电路结构，实现更为奇妙的传函？[a]图中，如果把 RC 并联改为串联，会出现什么情况？我不会带领大家去思考，但请珍惜这个机会。特别是一阶全通滤波器，它可以带来更多的思考。



(a) 一阶反相低通滤波器



(b) 一阶反相高通滤波器

图 Section79-6 反相输入的一阶低通和高通滤波器

实际的电容器，是真正的电容元件吗？

元件，element，是器件(device)的理想抽象。作为一个元件，电容在频率足够高时表现出足够小的容抗，但是，实际的电容器却不是这样。因此，如果用理想的元件取表述实际的电容器，它应该是包含电阻、电容、电感的。

请读者自行调查，第一找到实际电容器的元件模型，第二，确定一只实际的电容，查找数据手册，完成对该电容器的模型参数的指定。

滤波器对运放有何要求？

用常见运放 **OP07**，设计一个截止频率为 100kHz，通带增益为 10 的一阶低通滤波器，能够实现吗？要实现截止频率 100kHz，通带增益为 10 的一阶低通滤波器，对电路中选用的运放，有何要求？

对此内容，可参考本书 Section90。

利用滤波器思想提高带宽

低通或者高通滤波器，使得不期望的频率量得到抑制，利用这种思想，能否实现频率补偿，以拓展频带？答案是肯定的。

电路如图 Section80-3 所示。当电路中开关断开时，左边是一个同相比例器，右边是一个反相比例器，增益均为 20dB。此时，两个电路的闭环带宽小于 60kHz。当开关闭合，导致电容介入电路后，在高频处，电容的旁路作用，使得总的增益阻抗下降，带来的效果是增益上升，这抵消了由于运放的开环增益下降带来的闭环增益下降。

仿真实验结果如图 Section80-4 所示。可以看出，开关闭合后闭环带宽接近 100kHz。但是，一定需要注意，这种频率补偿电路只能有限提高带宽，毕竟随着频率的上升，运放的开环增益总是下降的，当它不具备增益时，外部怎么补偿，都将是徒劳的。

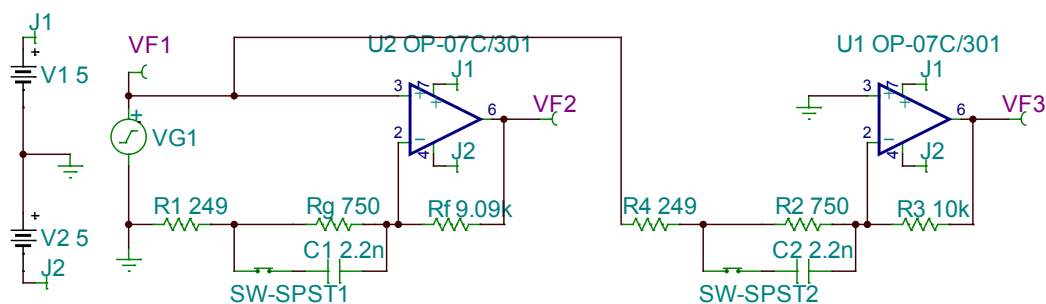


图 Section80-3 带宽拓展电路

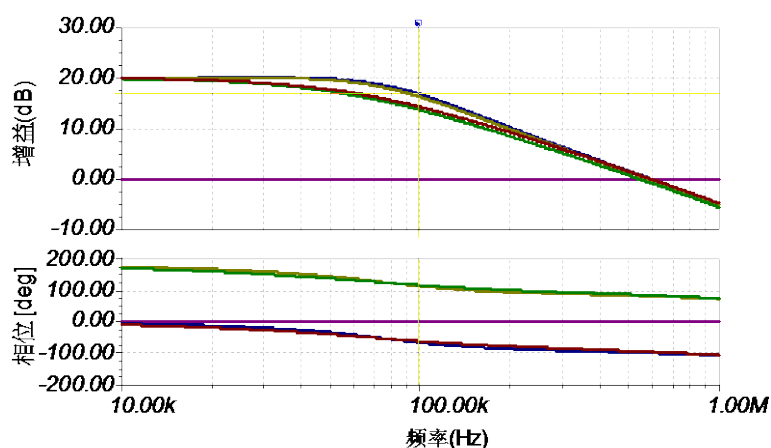


图 Section80-4 带宽拓展电路仿真效果

奇异的双输入双反馈电路

全通电路给了我们启示：一个输入信号，可以同时加载到运放的两个输入端，当然，

它们加载到输入端的通路是不同的。同时，我们也知道，运放除可以接负反馈外，也可以适当引入正反馈。图 Section80-5 是我自己造的一个电路，让我们看看它的输出表达式是怎样的。

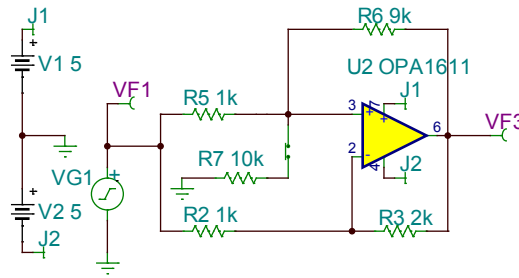


图 Section80-5 双输入、双反馈单运放放大电路

$$\begin{aligned}
 M_+ &= \frac{\frac{R_6 \times R_7}{R_6 + R_7}}{R_5 + \frac{R_6 \times R_7}{R_6 + R_7}} = \frac{R_6 \times R_7}{R_6 \times R_5 + R_5 \times R_7 + R_6 \times R_7} \\
 M_- &= \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\
 M &= M_+ - M_- = \frac{R_6 \times R_7}{R_6 \times R_5 + R_5 \times R_7 + R_6 \times R_7} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\
 F_+ &= \frac{R_2}{R_2 + R_3} \\
 F_- &= \frac{\frac{R_5 \times R_7}{R_5 + R_7}}{R_6 + \frac{R_5 \times R_7}{R_5 + R_7}} = \frac{R_5 \times R_7}{R_6 \times R_5 + R_5 \times R_7 + R_6 \times R_7} \\
 F &= F_+ - F_- = \frac{R_2}{R_2 + R_3} - \frac{R_5 \times R_7}{R_6 \times R_5 + R_5 \times R_7 + R_6 \times R_7} \\
 A_u \approx \frac{M}{F} &= \frac{\frac{R_6 \times R_7}{R_6 \times R_5 + R_5 \times R_7 + R_6 \times R_7} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}}{\frac{R_2}{R_2 + R_3} - \frac{R_5 \times R_7}{R_6 \times R_5 + R_5 \times R_7 + R_6 \times R_7}} \\
 &= \frac{R_2 R_6 R_7 + R_3 R_6 R_7 - R_3 R_5 R_6 - R_3 R_5 R_7 - R_3 R_6 R_7}{R_2 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_7 + R_2 R_6 R_7 - R_2 R_5 R_7 - R_3 R_5 R_7} \\
 &= \frac{R_2 R_6 R_7 - R_3 R_5 R_6 - R_3 R_5 R_7}{R_2 R_5 R_6 + R_2 R_6 R_7 - R_3 R_5 R_7}
 \end{aligned}$$

当 R_7 为无穷大时，上式等于 1。除此之外，上式可以演变出非常多的情况，可以同相放大，也可以反相放大，甚至可以是 0 倍，奇妙无比。但是唯一需要注意的是，不要让这个电路出现自激振荡。

此处提出这个电路结构，无非是给那些愿意思考的人，增添些思考的素材。这个电路可以用在哪里？将电路中的某个或者某些电阻换成电容，会出现什么情况？

压控滤波，怎么分析？

所谓的压控滤波，指一个滤波器的截止频率可以由外部提供的直流电压控制。利用一个乘法器或者压控增益放大器，可以实现此功能。图 Section80-6 为一个压控低通滤波器。

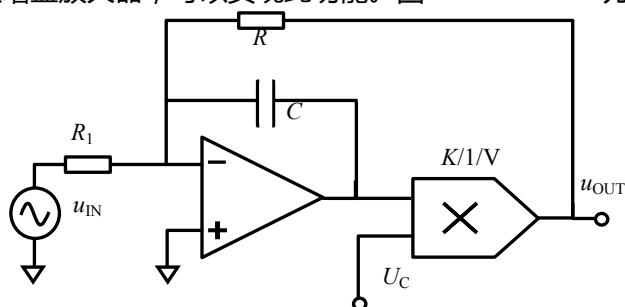


图 Section80-6 压控一阶低通滤波器

根据图中结构，列出频域表达式如下：

$$\frac{U_{IN}}{R_1} = -\frac{U_{OUT}}{R} - \frac{U_{OUT}}{KU_C} \times j\omega C = -U_{OUT} \left(\frac{KU_C + j\omega RC}{KRUC} \right)$$

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{KRUC}{R_1(KU_C + j\omega RC)} = -\frac{R}{R_1} \times \frac{1}{1 + j\omega \frac{RC}{KU_C}}$$

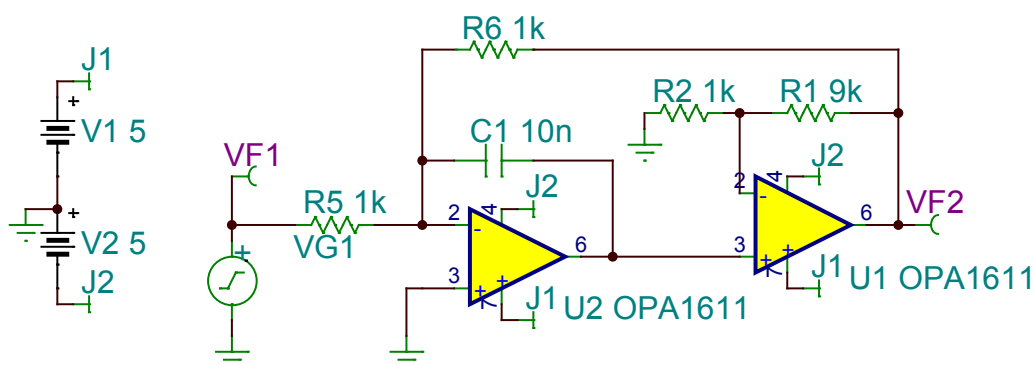
增益表达式为一阶低通滤波器，其上限截止频率为：

$$f_H = \frac{KU_C}{2\pi RC}$$

(Section80-1)

举例 1：

下图是一个滤波器，求电路中 VF2 的上限截止频率。



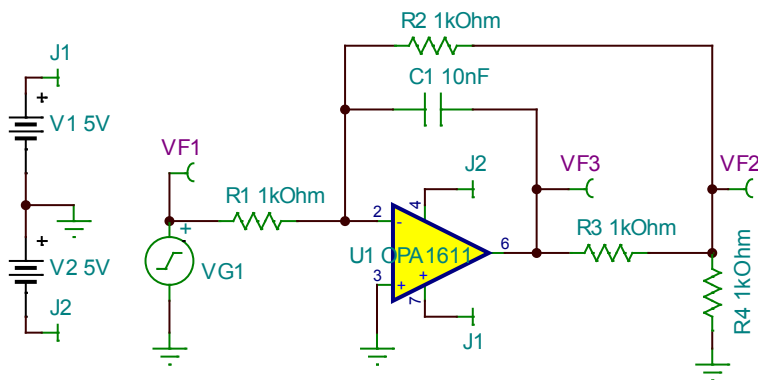
解：此例用一个固定增益的比例器，代替了压控滤波器中的乘法器，则 $KU_C=10$ 倍，因此可以产生固定的，新的截止频率。据式(Section80-1)，有：

$$f_H = \frac{KU_C}{2\pi RC} = \frac{10}{2\pi R_6 C_1} = 159.15\text{kHz}$$

仿真结果表明，此电路为低通滤波器，上限截止频率约为 160kHz，与分析基本吻合。

举例 2：

下图是一个滤波器，求电路中 VF2 的上限截止频率。



解：有至少两种方法可以解题。第一种，像压控滤波器的分析方法一样，直接对电路列出节点电流方程，可以写出输出传递函数，以及频率表达式，进而得到其截止频率。

对图中运放负输入端（节点），有如下电流方程：

$$\frac{VF1 - 0}{R_1} = \frac{0 - VF2}{R_2} + \frac{0 - VF3}{\frac{1}{j\omega C_1}} \quad (1)$$

对图中 VF2 节点，有如下电流方程：

$$\frac{VF3 - VF2}{R_3} = \frac{VF2}{R_4} + \frac{VF2 - 0}{R_2} \quad (2)$$

$$VF3 = VF2 \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2} \right) \quad (2a)$$

将式(2a)代入式(1)，得：

$$\frac{VF1}{R_1} = -\frac{VF2}{R_2} - j\omega C_1 VF2 \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2} \right) = -VF2 \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_1 \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_2 R_4} \right)$$

$$\begin{aligned} VF1 &= -VF2 \left(\frac{R_1}{R_2} + j\omega R_1 C_1 \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_2 R_4} \right) \\ &= -VF2 \frac{R_1}{R_2} \left(1 + j\omega C_1 \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4} \right) \end{aligned}$$

$$VF2 = -VF1 \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + j\omega C_1 \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4}} \right)$$

写成输入输出表达式，即：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{VF2}{VF1} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + j\omega C_1 \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4}} = A_m \times \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (3)$$

其中：

$$A_m = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{C_1 \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4}} = \frac{1}{R C_1}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi R C_1} = f_H \quad (3b)$$

$$R = \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (3c)$$

将数值代入，得：

$$f_H = \frac{1}{2\pi R C_1} = \frac{1}{2\pi \frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4} C_1} = \frac{1}{6.2832 \times 3000 \times 10 \times 10^{-9}} = 5305 \text{Hz}$$

对此电路实施 TINA-TI 仿真，得其上限截止频率约为 5.29kHz，与分析基本吻合。

第二种方法是利用压控滤波器的结论，稍加变换即可得出最终结果。

压控滤波器可以变形为如图 Section80-7 所示，乘法器可以表示为一个压控电压源，其增益为 KU_C 倍，则其上限截止频率为原 RC 表达式的 KU_C 倍。

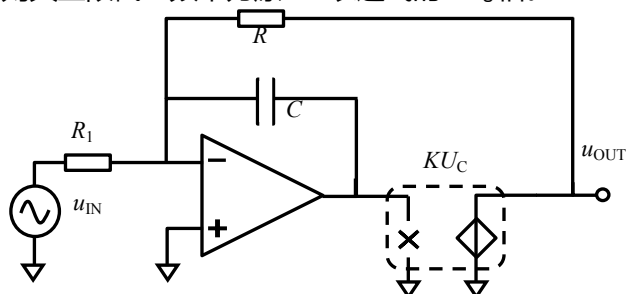


图 Section80-7 压控一阶低通滤波器变形画法

据此，将举例 2 电路演化成图 Section80-8 所示，其中利用了戴维宁等效。则根据式 (Section80-1)：

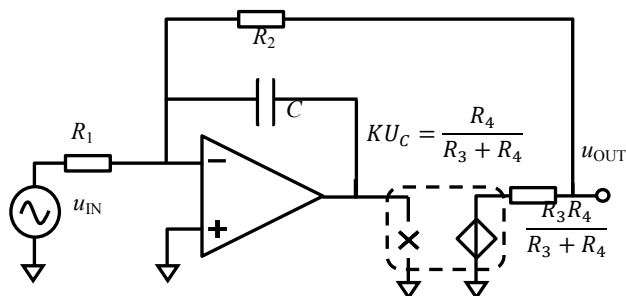


图 Section80-8 举例 2 电路的变形画法

$$f_H = \frac{KU_C}{2\pi RC} = \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}{2\pi(R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4})C} = \frac{1}{2\pi(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4})C}$$

结果与式(3c)完全相同。

如果大家能够想得起来，可以看图 Section65-1，在反馈环中用一个 T 型电阻网络代替一个大电阻。举例 2 电路中，就是用 R_2 、 R_3 、 R_4 组成了一个 T 型电阻网络——把电阻位置稍加移动，举例 2 电路就如图 Section80-9 所示，这里可以清晰看到 T 型电阻网络。将这三个电阻，用一个等效电阻 R 代替，电路就演变成了一个标准低通滤波器。等效电阻 R 的计算方法如下：

在左图中，VF3 的电压最终目的是通过电阻网络，形成电流 i_2 。因此，在右图中，只

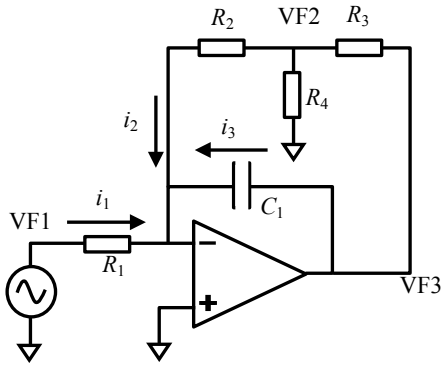


图 Section80-9 举例 2 电路

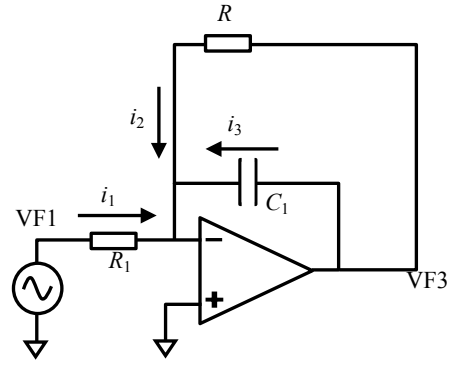


图 Section80-10 举例 2 电路等效电阻画法

要保证在 VF3 不变情况下，得到的 i_2 与左图完全一致，那么，对于运放负输入端这个节点，列出的电流方程将不会改变，就可以实施代替。

左图中：

$$\begin{aligned}
 i_2 = \frac{VF2}{R_2} &= \frac{VF3 \times \frac{R_2 // R_4}{R_2 // R_4 + R_3}}{R_2} = \frac{VF3 \times \frac{\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}{\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_3}}{R_2} = \frac{VF3 \times \frac{\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}{\frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_2 + R_4}}}{R_2} \\
 &= VF3 \times \frac{R_4}{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4} = \frac{VF3}{\frac{R_2 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_4}} = \frac{VF3}{R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4}}
 \end{aligned}$$

右图中：

$$i_2 = \frac{VF3}{R}$$

因此，等效电阻为：

$$R = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

(4)

可以看出，式(4)与前述方法得到的式(3c)，结论完全相同。

Section81. 二阶滤波器分析——低通和高通

前面介绍的一阶滤波器，不涉及复杂的数学运算，因此简单易学易用，在很多要求不高的场合，具有广泛的用途。但是一旦涉及更高的要求，就必须使用高阶滤波器。比如，一阶低通滤波器，在输入信号频率大于截止频率后，它的增益一般以-20dB/10 倍频的速率下降，而 2 阶低通滤波器，则可以实现-40dB/10 倍频，3 阶滤波器则可以实现-60dB/10 倍频，阶数越高，其增益下降速率越快，其形态也就越接近于砖墙滤波器。

其中，二阶滤波器是高阶滤波器的基础——高阶滤波器一般由一阶和若干个二阶滤波器级联组成。因此，有必要专门对二阶滤波器进行分析。受篇幅限制，这个内容由 Section81，Section82 以及 Section83 等三小节组成，是 4.3 节的数学基础。

二阶传函

二阶滤波器的传函标准式如下：

$$A(S) = \frac{m_0 + m_1 S + m_2 S^2}{1 + n_1 S + n_2 S^2} \quad (\text{Section81-1})$$

其中 $n_2 \neq 0$ 。

其频域增益表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{1 + m_1 j\omega + m_2 (j\omega)^2}{1 + n_1 j\omega + n_2 (j\omega)^2} = \frac{(1 - m_2 \omega^2) + j m_1 \omega}{(1 - n_2 \omega^2) + j n_1 \omega} \quad (\text{Section81-2})$$

增益是一个复数，其模、幅角都会随频率变化。这就可能演化出各式各样的频率特性。

频率归一化

引入特征频率 ω_0 ，令：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{n_2}}$$

式(Section81-2)变为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{d + bj \frac{\omega}{\omega_0} + c(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + aj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section81-3a})$$

其中：

$$a = \frac{n_1}{\sqrt{n_2}} ; b = \frac{m_1}{\sqrt{n_2}} ; c = \frac{m_2}{n_2} ; d = \frac{m_0}{\sqrt{n_2}}$$

令：

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

式(Section81-2)变为：

$$\dot{A}(j\Omega) = \frac{d + bj\Omega + c(j\Omega)^2}{1 + aj\Omega + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section81-3b})$$

此时，可以称 Ω 为相对频率，是一个无量纲的数值，它代表当前输入频率与滤波器的

特征频率的比值。这样，我们将横轴千变万化的特征频率，都归一化成相对频率变化。

对于式(Section81-3)来说， a 、 b 、 c 共 3 个参数的不同选择，会带来多种多样的增益随相对频率变化规律。经过几十年的研究，科学家通过选择不同的参数，归纳出以下几种常见的滤波器形态。也许已经研究完毕，也许还有研究空间，至少我还没有发现新的滤波器形态。

二阶低通滤波器

二阶低通滤波器的归一化标准式

二阶低通滤波器的归一化标准式如下：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{1}{1 + aj\Omega + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section81-4})$$

即，在式(Section81-3b)的二阶标准式中， $b=c=0$ 。将其写成与角频率、频率相关，即为：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \frac{1}{1 + aj\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section81-4a})$$

$$\dot{A}(jf) = A_m \frac{1}{1 + aj\frac{f}{f_0} + (j\frac{f}{f_0})^2} \quad (\text{Section81-4b})$$

上述 3 个表达式是完全相同的，只是自变量单位不同。我们以最常见的频率 f 为自变量，先直观粗略看看：当频率 $f=0\text{Hz}$ 时， $\dot{A}(jf) = A_m$ ，当频率为无穷大时，分母中第二项为虚部，无穷大，分母中的实部是第一项的 1 与第三项的和，而第三项是负值实数，无穷大的平方，导致整个表达式的模为 0。这满足低通条件。

特征频率和 Q 的含义

当信号频率 f 等于特征频率 f_0 时，在数学上，分母出现了一个特殊情况，即它的第三项为-1，导致分母中实部为 0，只存在虚部。这是全部频率范围内唯一出现的，其特殊性无人能敌，是最为特殊的频率点，故称之为特征频率。

因此，特征频率 f_0 的定义可以是：在二阶滤波器中，使得分母中实部为 0 的频率。

在特征频率处，增益的模变为：

$$|\dot{A}(jf_0)| = \left| A_m \frac{1}{1 + aj\frac{f_0}{f_0} + (j\frac{f_0}{f_0})^2} \right| = A_m \times \left| \frac{1}{aj} \right| = A_m \frac{1}{a}$$

定义品质因数 Q 为：特征频率处的增益的模，除以中频增益 A_m 。其实就是，特征频率处的增益，是中频增益的多少倍。

$$Q = \frac{|\dot{A}(jf_0)|}{A_m} \quad (\text{Section81-5})$$

由此，二阶低通滤波器的频率表达式可以写作：

$$\dot{A}(jf) = A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{f}{f_0} + (j\frac{f}{f_0})^2} \quad (\text{Section81-4c})$$

而角频率表达式可以写作：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

(Section81-4d)

不同的 Q 值，带来不同的效果

科学家发现，品质因数 Q 的改变，会给标准二阶低通滤波器带来完全不同的性质。

图 Section81-1 是利用 Matlab 做的三根幅频特性曲线，都是二阶低通滤波器，其 Q 值不同，造成完全不同的频率特性，如表 Section81-1 所示。

表 Section81-1 三种不同类型二阶低通滤波器

颜色	归一化增益标准式	$1/Q$	Q	特征	名称
绿	$\dot{A}(j\Omega) = \frac{1}{1 + 1.732j\Omega + (j\Omega)^2}$	1.732	0.57735	$Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$	贝塞尔型, Bessel Filter
蓝	$\dot{A}(j\Omega) = \frac{1}{1 + 1.414j\Omega + (j\Omega)^2}$	1.414	0.7071	$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$	巴特沃斯型, Butterworth Filter
红	$\dot{A}(j\Omega) = \frac{1}{1 + 0.714j\Omega + (j\Omega)^2}$	0.714	1.4	$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$	切比雪夫型, Chebyshev Filter

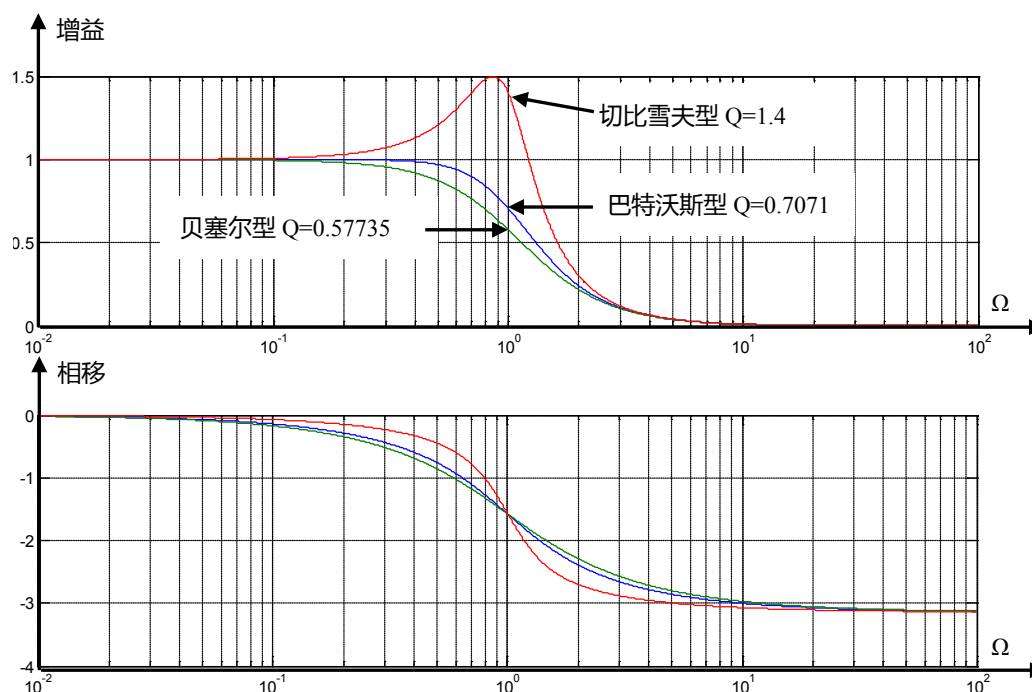


图 Section81-1 不同 Q 值二阶低通滤波器的归一化幅频、相频响应

巴特沃斯滤波器具有最为明显的特征是，它的特征频率 f_0 (图中 $\Omega=1$ 处) 恰好是截止频率 f_c 。因此，在输入信号频率为 f_0 时，其增益的模为 0.707。它具有最平坦的通带区间，过渡带下降速率一般。由于参数唯一，设计方便，使用非常广泛。

切比雪夫滤波器在输入信号频率为 f_0 时，其增益的模为大于 0.707，也可以是 1，甚至超过 1。它具有最为陡峭的过渡带，因此和砖墙式滤波器最为接近。但是，在通带内，它的增益具有隆起， Q 值越大，隆起越严重。

贝塞尔滤波器在输入信号频率为 f_0 时，其增益的模为小于 0.707，从通带到阻带的过

渡最为缓慢，与理想的砖墙滤波器差距最大。看起来它没有什么优点，其实不然。贝塞尔滤波器具有最大的线性相移区间（这会在涉及群延时的环节介绍），可以有效减少复合波形的相位失真。这是前两种滤波器无法比拟的。

用 Q 和特征频率 f_0 表达截止频率 f_c

定义：

$$K = \frac{f_c}{f_0}$$

(Section81-6)

根据式(Section81-4b)，可知在截止频率处必有：

$$|A(jf_c)| = \left| A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{f_c}{f_0} + (j \frac{f_c}{f_0})^2} \right| = \left| A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} jK + (jK)^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} A_m$$

以 K 为未知量，解此方程，得：

$$K = \frac{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}}{2Q}$$

(Section81-7)

对于二阶低通滤波器，在已知 Q 的情况下，其截止频率与特征频率的比值是唯一确定的，为 K 。式(Section81-7)的意义在于：在传函中，用肉眼看出特征频率是极为简单的——即分母中使得实部为 0 的频率点，而我们在设计滤波器时，一般更习惯于给出截止频率、 Q ，此时就可以利用式(Section81-7)得到它们之间的比值，进而将截止频率转换成特征频率。

表 Section81-2 给出了一些常见 Q 值与对应的 K 。

表 Section81-2

Q	0.4	0.5	0.6	0.7071	0.8	1	1.2	1.5	20
K	0.4278	0.6436	0.8271	1	1.1146	1.2720	1.3590	1.4299	1.5510

据此，可以得出一些简单结论：

切比雪夫型二阶低通滤波器，其截止频率大于特征频率。 Q 值越大，两者差异越大。

贝塞尔型二阶低通滤波器，其截止频率小于特征频率。 Q 值越小，两者差异越大。

二阶高通滤波器

二阶高通滤波器的归一化标准式

二阶高通滤波器的归一化标准式如下：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{(j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}$$

(Section81-8)

不同的 Q ，带来三种不同的滤波器

二阶高通的品质因数定义与低通完全相同，它也代表特征频率处归一化增益的模。

根据 Q 值不同，二阶高通滤波器也分为巴特沃斯型、切比雪夫型和贝塞尔型三类。它们具有与二阶低通滤波器完全相同的特性。

当 $Q=0.707$ ，属于巴特沃斯型，通带最为平坦，且设计参数唯一。其特征频率等于截止频率。

当 $Q > 0.707$ ，属于切比雪夫型，过渡带最为陡峭，但通带内有隆起。其特征频率大于截止频率。

当 $Q < 0.707$ ，属于贝塞尔型，它具有最为平坦的群延时区间。但是，严格意义讲，贝塞尔滤波器仅特指具有最大群延时（见 Section83）平坦区间的滤波器，在二阶滤波器中，仅有 $Q=0.57735$ ，也就是根号 3 分之一，才满足这个条件。

图 Section81-2 是三种类型二阶高通滤波器的幅频、相频响应。

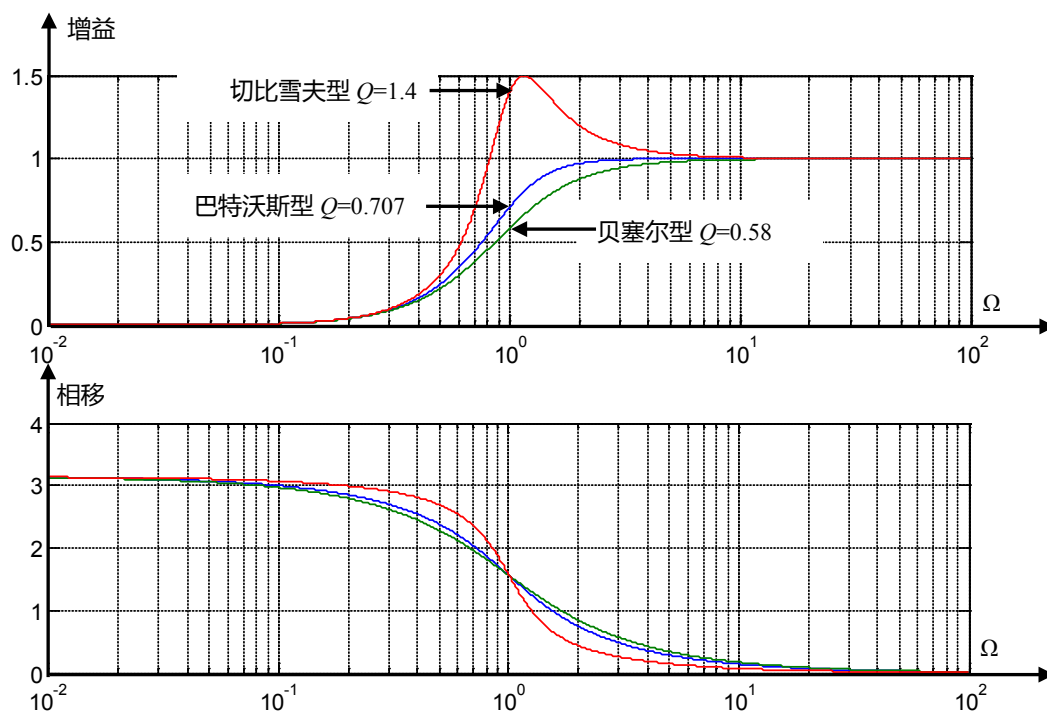


图 Section81-2 不同 Q 值二阶高通滤波器的归一化幅频、相频响应

用 Q 和特征频率 f_0 表达截止频率 f_c

高通滤波器其实就是低通滤波器以 $\Omega=1$ 的横轴镜像，因此特征频率点也以此为镜像。其截止频率与特征频率的关系，也仅与 Q 值有关：

$$K = \frac{f_c}{f_0} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}}$$

(Section81-9)

与低通滤波器相比，两个 K 值刚好是倒数关系。

Section82. 二阶滤波器分析——带通、带阻和全通

二阶窄带通滤波器

二阶窄带通滤波器的归一化标准式

带通滤波器分为宽带通和窄带通两类。宽带通就是一个高通和一个低通的串联，它允许一个很宽频率范围的信号通过，高通和低通的截止频率相差甚远，互相不影响，只要学会了高通和低通，分别独立设计即可。而窄带通滤波器，则仅允许中心频率附近很窄范围内的信号通过，它只有一个中心频率。本小节仅研究窄带通滤波器。

一个低通滤波器，和一个与之镜像的高通滤波器相乘，可以得到一个窄带通表达式。

$$\dot{A}(j\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\Omega}} \times \frac{1}{1 + j\Omega} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\Omega} + j\Omega + 1} = \frac{j\Omega}{1 + 2j\Omega + (j\Omega)^2} = 0.5 \times \frac{2j\Omega}{1 + 2j\Omega + (j\Omega)^2}$$

分数项是一个标准带通表达式，其带通峰值点发生在分母实部为 0 处，其峰值为 0.5。但是，这并不能代表全部的带通滤波器，标准带通滤波器的归一化表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

[Section82-1]

带通滤波器的特征频率，也是峰值频率，发生在 $\Omega=1$ 处，即分母实部为 0 处。在此处，增益的模为 A_m ，相移为 0° 。窄带通滤波器有如下概念：

1) 特征频率 f_0 ，它是指窄带通滤波器中，增益最大的频率点。在归一化表达中，为 $\Omega=1$ 的相对频率点。

2) 带宽 Δf ，中心频率两侧，增益始终大于 $0.707A_m$ 的频率范围。在图 Section82-1 中，用相对频率表示为：

$$\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L$$

[Section82-2]

在实际频率图中，用： $\Delta f = f_H - f_L$ 表示。

3) 品质因数 Q ，衡量带通形状尖锐程度的量：

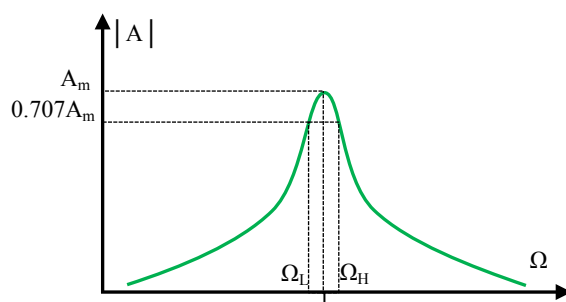


图 Section82-1 二阶带通滤波器归一化幅频特性

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{\Omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Omega_H - \Omega_L}$$

[Section82-3]

二阶窄带阻滤波器——陷波器

二阶窄带阻滤波器的归一化标准式

与带通滤波器类似，带阻滤波器也分为宽带阻和窄带阻两类。一个高通滤波器，和一个低通滤波器实施加法，可以实现带阻滤波。当高通滤波器截止频率远高于低通滤波器截止频率，则实现的即为宽带阻滤波。只要独立设计高通滤波器、低通滤波器，再设计一个加法器，即可实现宽带阻滤波器。

本小节仅研究窄带阻滤波器，它只阻断中心频率附近的一个很小的频段内的信号，也叫陷波器，英文为 notch。陷波器的归一化标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section82-4})$$

其幅频特性如图 Section82-2 所示。对陷波器，有如下定义：

- 1) 特征频率 f_0 ，指幅频特性中增益最小值对应的频率点。
- 2) 陷波带宽 Δf ，中心频率两侧，增益始终小于 $0.707A_m$ 的频率范围。在图 Section82-2 中，用相对频率表示为：

$$\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L \quad (\text{Section82-5})$$

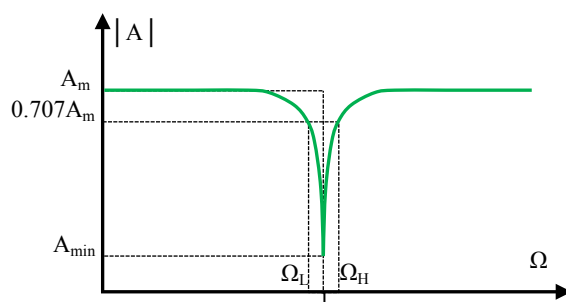


图 Section82-2 二阶窄带阻滤波器归一化幅频特性

在实际频率图中，用 $\Delta f = f_H - f_L$ 表示。

- 3) 品质因数 Q ，衡量陷波形状尖锐程度的量：

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{\Omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Omega_H - \Omega_L} \quad (\text{Section82-6})$$

- 4) 最小增益 A_{\min} 。设陷波器的通带增益为 A_m ，从式(Section82-4)看，当 $\Omega=1$ 时，理论上，其最小增益为 0，但是受实际电路中器件不是理想的影响，陷波器永远实现不了 0 倍增益。因此，衡量一个陷波器是否优秀， A_m/A_{\min} 非常重要。

二阶全通滤波器

二阶全通滤波器的归一化标准式

二阶全通滤波器的归一化标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

[Section82-7]

或者：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

[Section82-8]

在全通滤波器中，很显然无论 Ω 怎么变化，其增益的模永远是 A_m ，我们重点关心它的相移随频率的变化。此处，仍定义：

$$\Omega = \frac{f}{f_0}$$

其中， f_0 为特征频率，是指分母中实部等于 0 的频率点，此处增益的相移为 $\pm 180^\circ$ 。

相移表达式为：

$$\varphi(j\Omega) = \tan^{-1} \frac{-\frac{1}{Q} \times \Omega}{1 - \Omega^2} - (\tan^{-1} \frac{\frac{1}{Q} \times \Omega}{1 - \Omega^2}) = -2 \tan^{-1} \frac{\frac{1}{Q} \times \Omega}{1 - \Omega^2}$$

[Section82-9]

可以看出，品质因数 Q 在这里同样起着重要作用：调整相移速率。 Q 越大，其相移区间越小，速率越大。

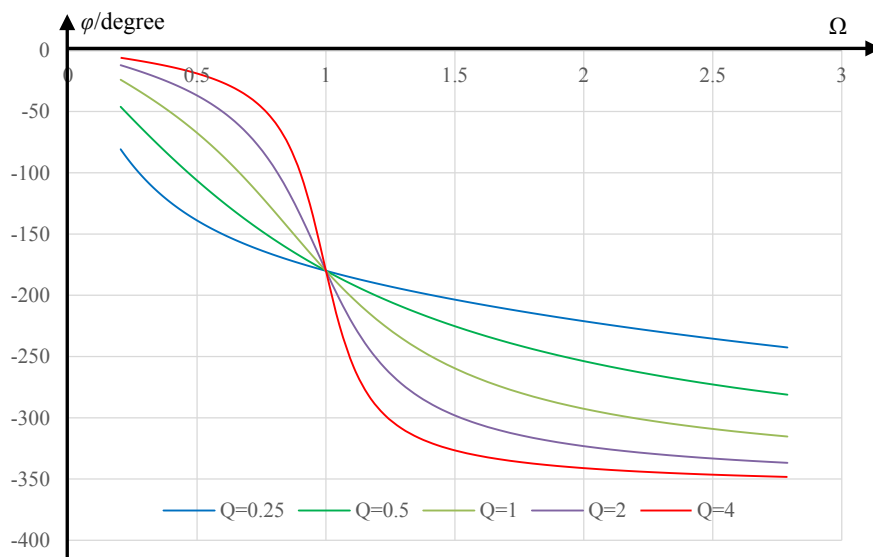


图 Section82-3 二阶全通滤波器滞后型不同 Q 值的相移特性

如何验证 Q 值

除全通之外，其它种类的滤波器， Q 值都存在明显的验证方法，通过实测的频率特性，可以很方便的获得：

1) 对二阶低通滤波器、高通滤波器来说, 品质因数 Q , 就是特征频率发生处的相对增益。以低通滤波器为例, 其标准式为:

$$\dot{A}_{LP}(j\omega) = A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} (j\frac{\omega}{\omega_0}) + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

在特征频率处, 其增益的模为:

$$|\dot{A}_{LP}(j\omega_0)| = \left| A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} (j\frac{\omega_0}{\omega_0}) + (j\frac{\omega_0}{\omega_0})^2} \right| = |A_m|Q$$

即有:

$$Q = \frac{|\dot{A}_{LP}(j\omega_0)|}{|A_m|}$$

[Section82-10]

据此, 在二阶低通滤波器电路中测量 Q 值的方法为: 频率等于 0 处, 测量增益的模, 为 $|A_m|$, 测量特征频率处 (即相移为 -90 度处) 增益的模, 为 $|\dot{A}_{LP}(j\omega_0)|$, 按式[Section82-10]即可获得。

同理, 对二阶高通滤波器来说, 有:

$$Q = \frac{|\dot{A}_{HP}(j\omega_0)|}{|A_m|}$$

[Section82-11]

二阶高通滤波器电路中测量 Q 值的方法为: 频率等于 ∞ 处, 测量增益的模, 为 $|A_m|$, 其实这是不可能的, 实测中只需要在频率较高, 增益较为稳定的区域测量即可。测量特征频率处 (即相移为 90 度处) 增益的模, 为 $|\dot{A}_{HP}(j\omega_0)|$, 按式[Section82-11]即可获得。

2) 对带通滤波器来说, Q 值为中心频率 f_0 除以通带宽度 Δf 。

$$\begin{aligned} \dot{A}_{BP}(j\frac{\omega}{\omega_0}) &= A_m \times \frac{\frac{1}{Q} j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ Q &= \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} \end{aligned}$$

[Section82-3]

其中, f_H 为中心频率右侧的峰值增益 -3dB 频率点, f_L 为中心频率左侧的峰值增益 -3dB 频率点, f_0 为中心频率。

3) 对带阻滤波器来说, Q 值为中心频率 f_0 除以阻带宽度 Δf 。

$$\begin{aligned} \dot{A}_{BR}(j\frac{\omega}{\omega_0}) &= A_m \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q} j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ Q &= \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} \end{aligned}$$

[Section82-6]

其中, f_H 为中心频率右侧的平坦区 -3dB 频率点, f_L 为中心频率左侧的平坦区 -3dB 频率点, f_0 为中心频率。

全通滤波器的 Q 值验证

针对全通滤波器，如何验证其 Q 值呢？先列出全通标准式：

$$\dot{A}_{AP}(j\omega) = A_m \frac{1 - \frac{1}{Q}(j\frac{\omega}{\omega_0}) + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q}(j\frac{\omega}{\omega_0}) + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

我们知道，对全通滤波器来说，幅频特性是一根随频率变化平直的线，从幅频特性上无法获得任何信息，也就无法应用于 Q 值验证。只好从相频特性入手。让我们试着寻找一些特殊的频率点，看它们与 Q 值有无关系。

图 Section82-4 为不同频率处，全通滤波器的增益向量图。全通滤波器的增益由包含

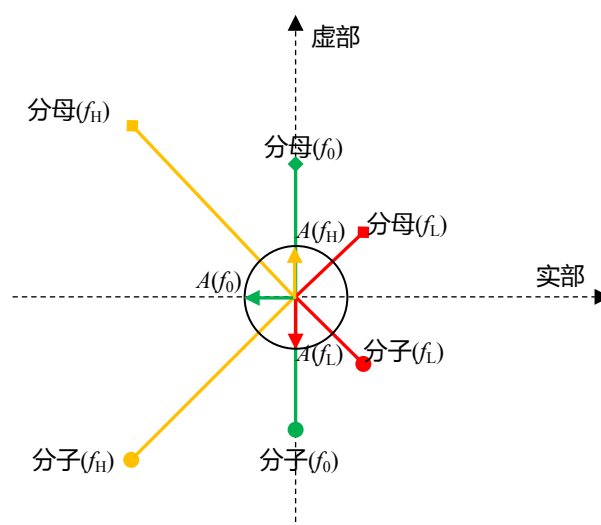


图 Section82-4 二阶全通滤波器滞后型不同 Q 值的相移特性

实数、虚数的分子分母组成。图中三个不同颜色的箭头，即代表三个不同频率处的增益向量，它包含实部和虚部，自然也就形成了模和幅角：

对中心频率 f_0 ，如图绿色，分母为方形头，分子为圆形头，分子除以分母则为增益，为绿色箭头，它的模为 1，幅角为 180 度。这当然是最为特殊的点，我们从频率特性中的相频特性图一眼就可以看到。

除此之外，还有特殊频率点吗？有。图中选择了两个，分别为频率为 f_L 的红色，其增益的模也是 1（当然是 1，因为是全通吗），幅角为 90 度；以及频率为 f_H 的黄色，其增益的模也是 1，幅角为 270 度。这两个点的特殊之处在于：该点处，无论分子还是分母，实部的模与虚部的模相等。即：

$$\left| 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \right|^2 = \left| \frac{1}{Q} j\frac{\omega}{\omega_0} \right|^2$$

为书写方便，设相对频率：

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \Omega$$

由于是模相等，因此包含两种情况，第一种为：

$$1 - \Omega^2 = \frac{\Omega}{Q}$$

解得两个值：

$$\Omega = \frac{-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

我们知道相对频率一定大于 0，且根号项的绝对值一定大于 $1/Q$ ，因此 Ω 的两个值中只有根号项取正值才是合理的，则解得第一个满足 90 度相移的相对频率：

$$\Omega_L = \frac{-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

第二种为：

$$\Omega^2 - 1 = \frac{\Omega}{Q}$$

解得两个值：

$$\Omega = \frac{\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

同理分析出只有一个值为正解：

$$\Omega_H = \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

显然， $\Omega_H > \Omega_L$ ，两者相减必出令人振奋的结果。将 Ω 回归到 ω 表达式，有：

$$\Omega_H - \Omega_L = \frac{\omega_H}{\omega_0} - \frac{\omega_L}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

即：

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_H - \omega_L} = \frac{f_0}{f_H - f_L}$$

(Section82-12)

这个表达式的含义是，在全通滤波器中，品质因数等于中心频率除以两个特殊的频率点的差值。而两个特殊频率点分别为：

f_H 是中心频率右侧，与中心频率相差 90 度的频率点，即相对频率大于 1。

f_L 是中心频率左侧，与中心频率相差 90 度的频率点，即相对频率小于 1。

这与带通、带阻类似，带通带阻中的两个特殊频率点分别为中心频率两侧的 -3dB 点，它们是从幅频特性图中寻找到的。

带通滤波器的相频特性

根据窄带通滤波器的频域表达式：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

可以推出，其相移随频率变化规律为：

$$\varphi = 90 - \tan^{-1} \frac{\frac{1}{Q}\Omega}{1 - \Omega^2}$$

Section83. 群延时——Group Delay

输出正弦波和输入正弦波之间，会存在相移，也就相应的存在延时。当输入波形为复合波形，包含多个不同频率的正弦波，且它们的相移没有特殊的规律，就可能出现不同的延时——这会引起输出波形与输入波形形态不同，造成线性失真。

群延时，Group delay，是一个随频率变化的量，用以描述一个滤波器对不同频率的输入信号，产生的延时是否一致。其数学定义是：

$$GD = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

即相移对角频率求导的负数。之所以取负数，是因为一般都将延时量定义为正值，而这个延时由小于 0 的滞后相移引起。

对于每一个输入信号来说，滤波器产生的相移，与滤波器产生的延时之间存在以下关系：

$$t_{delay}(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{2\pi} \times T = \frac{\varphi(\omega)}{2\pi f} = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

当角频率增加时，如果能带来同步增加的相移，则延时就会相等，即

$$\varphi(\omega) = k\omega$$

但是，我们知道，对一个二阶滤波器来说，相移最大不会超过 -180° ，因此当频率足够高时，相移 $\varphi(\omega)$ 将不可能持续满足上式。因此，我们只能关心较低频率处的相移与延时规律。

图 Section83-1 是 $Q=0.57735$ ， $f_c=1\text{Hz}$ 的贝塞尔低通滤波器的延时图。可以看出，频率低于 0.3Hz 以下，肉眼已经无法发现其区别，大约为 0.2168s，在这个区域，群延时 GD 基本上是一个常数，与延时相等。这类似于静态电阻与动态电阻相等。

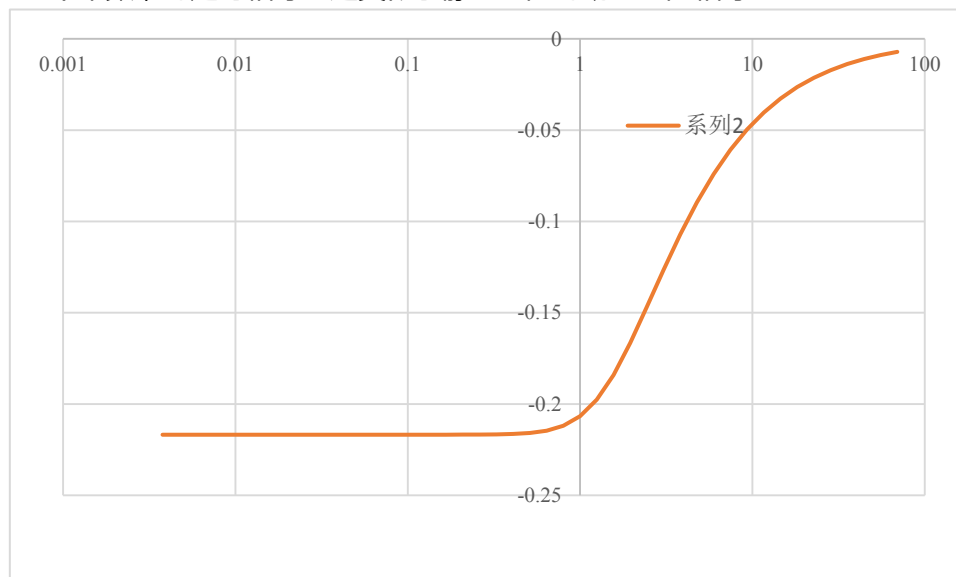


图 Section83-1 贝塞尔低通滤波器的延时

图 Section83-2 则是 $Q=0.7071$ 的巴特沃斯型低通滤波器的延时情况。很明显，其延时四位有效数字不变的区域已经下降到 0.03Hz（受计算机作图影响，在图中似乎是在 0.08Hz 处发生了一点变化），在此区间，延时量为 0.2251s。

图 Section83-3 则是 $Q=11$ 的切比雪夫型低通滤波器的延时情况。其延时四位有效数字

不变的区域已经下降到 0.02Hz 在此区间，延时量为 0.2025s。

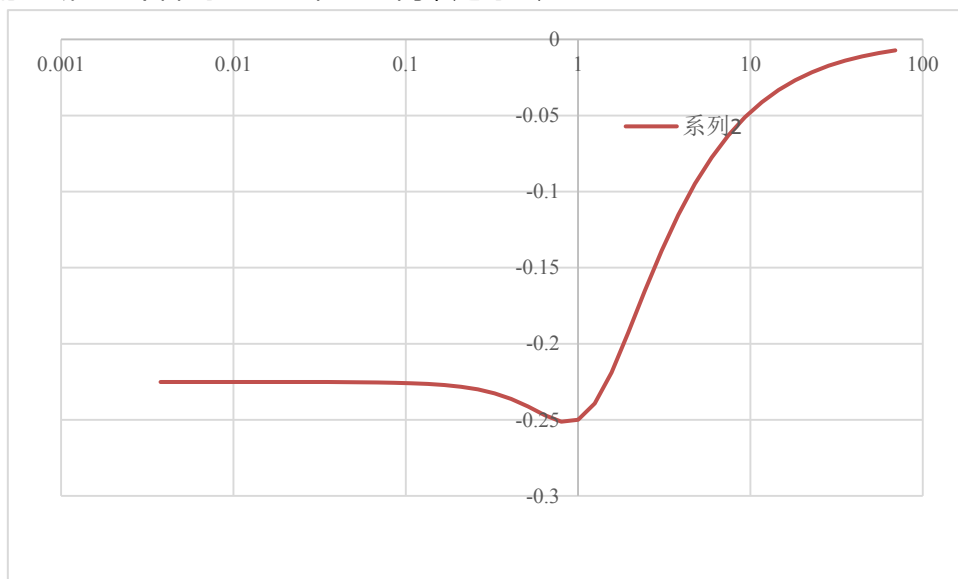


图 Section83-2 巴特沃斯低通滤波器的延时

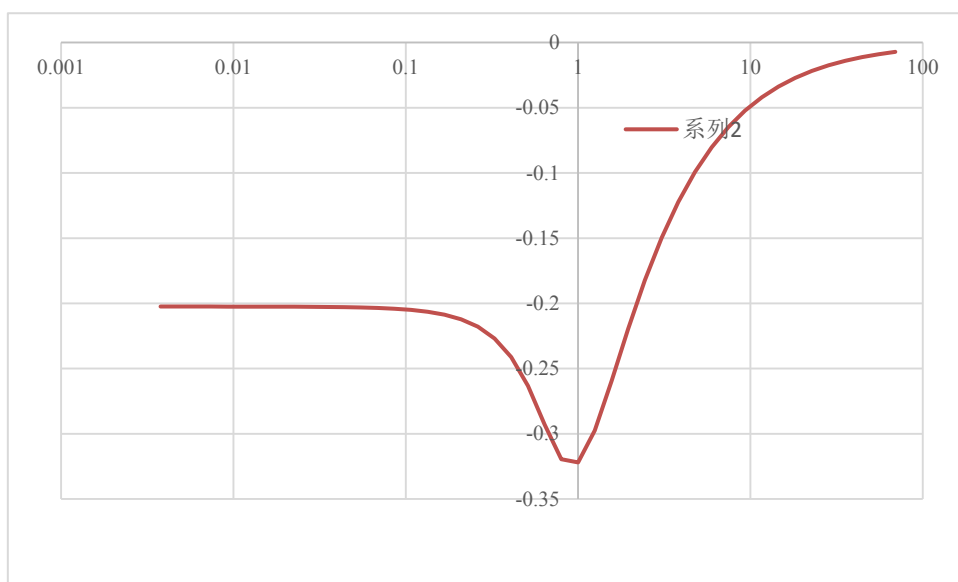


图 Section83-3 Q=1 切比雪夫低通滤波器的延时

从上面三种滤波器的延时特性，可以看出，唯有贝塞尔型低通滤波器，具有较宽的群延时相等区间，其实也就是延时相等区间。这带来了一个极大的好处：对复合输入波形来讲，贝塞尔滤波器的输出，会最大程度上减小由延时带来的相位失真。

4.3. 运放组成的低通滤波器

在 4.2 节中，我们分析了二阶低通滤波器的归一化标准式。但是，那些仅是理论上的分析，为电路分析做好了准备。本节介绍由运放组成的低通滤波器。

像一阶低通一样，这些电路的结构都是别人设计好的。我们需要做的有下面几件事情：

- 1) 已知完整电路，根据电路能够写出传函，得到特征频率和 Q 。
- 2) 已知截止频率（或者特征频率）和 Q ，选择电路形式并计算出电路中的阻容参数。
- 3) 能了解更多的电路结构，也许还能创新设计出新的电路结构。

Section84. 4 元件二阶 SK 型低通滤波器

电路原型

1955 年，美国 MIT Lincoln Laboratory 的 R. P. Sallen 和 E. L. Key 在文章“Sallen, R. P.; E. L. Key [March 1955]. "A Practical Method of Designing RC Active Filters". IRE Transactions on Circuit Theory 2 [1]: 74–85.”中，首次提出了如图 Section84-1 结构的滤波器电路。此电路中，4 个部件是以复阻抗形式出现，因此可以演变出低通、高通和带通电路。

这类电路因此被命名为 Sallen-Key 电路，也可简称为 SK 电路。图 Section84-2 是一个 SK 型二阶单位增益低通滤波器，它与 SK 标准电路的区别在于，用实际的电阻、电容代替了原图中的复阻抗 Z 。

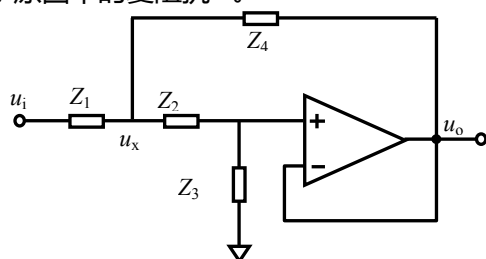


图 Section84-1 Sallen-Key 型滤波器

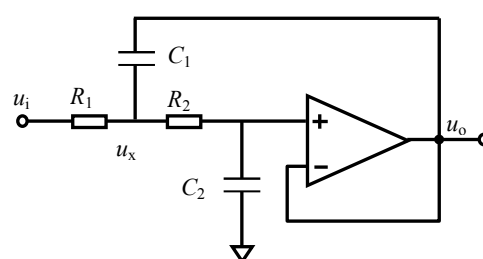


图 Section84-2 SK 型单位增益低通滤波器

传递函数分析

设图中 u_x 为临时变量，结合运放的虚短，有：

$$U_x(S) \times \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = U_o(S), \text{ 即}$$

$$U_x(S) = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} U_o(S) \quad (1)$$

在 u_x 点，利用 KCL，结合虚断，可得：

$$\frac{U_i(S) - U_x(S)}{Z_1} = \frac{U_x(S) - U_o(S)}{Z_4} + \frac{U_x(S)}{Z_2 + Z_3} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)，得：

$$\frac{U_i(S) - \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} U_o(S)}{Z_1} = \frac{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} U_o(S) - U_o(S)}{Z_4} + \frac{U_o(S)}{Z_3} \quad (3)$$

式(3)成为只有 $U_i(S)$ 和 $U_o(S)$ 的等式，适当整理，即可得到传函：

$$U_i(S) \times Z_3 Z_4 = U_o(S) \times (Z_1 Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_4(Z_2 + Z_3))$$

$$A(S) = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}$$

(Section84-1)

针对图 Section84-2 具体电路， $Z_1 = R_1$ ， $Z_2 = R_2$ ， $Z_3 = 1/SC_2$ ， $Z_4 = 1/SC_1$ ，代入得：

$$A(S) = \frac{\frac{1}{S^2 C_1 C_2}}{R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{SC_1} + R_2 \frac{1}{SC_1} + \frac{1}{S^2 C_1 C_2}} = \frac{1}{1 + SC_2(R_1 + R_2) + S^2 C_1 C_2 R_1 R_2}$$

(Section84-2)

转换到频域，有：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega C_2(R_1 + R_2) + (j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2}$$

(Section84-3)

已知阻容参数求滤波器参数——滤波器分析

对比式(Section81-4d)

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

可得：

$$A_m = 1$$

(Section84-4a)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

(Section84-4b)

为了解得 Q 值，在式(Section84-3)的分母第二项中乘以 ω_0/ω_0 ，得：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 C_2(R_1 + R_2) + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} C_2(R_1 + R_2) j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

因此，得：

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_2(R_1 + R_2)}$$

(Section84-4c)

至此，对一个已知电路阻容参数的4元件二阶SK型低通滤波器，可以利用式(Section84-4)三个子式，得到它的特征频率、中频增益，以及品质因数。

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计

一个二阶低通滤波器，有三个关键参数，中频增益 A_m ，特征频率 f_0 ，以及品质因数 Q 。在本例4元件SK型低通中，中频增益是固定的1，因此只剩下2个可选的参数 Q 和 f_0 ，而电路中有2个电阻、两个电容一共4个阻容参数需要确定，因此，该电路没有唯一解。我

们可以先确定 2 个参数，然后求解另外两个参数。

我们先假设 C_1 和 C_2 已经确定，这是因为电容的取值一般不容易做到任选，而电阻可以精细到 1% 以下的精确度。于是，据式(Section84-4b)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

得：

$$R_1 R_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} \quad (4)$$

据式(Section84-4c)

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_2 (R_1 + R_2)}$$

得：

$$R_1 + R_2 = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_2 Q} = \frac{1}{2\pi f_0 C_2 Q} \quad (5)$$

利用式(4)和式(5)，可以解得：

$$\begin{aligned} R_1^2 - R_1 \frac{1}{2\pi f_0 C_2 Q} + \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} &= 0 \\ 4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2 R_1^2 - 2\pi f_0 C_1 \frac{1}{Q} R_1 + 1 &= 0 \\ R_1 = \frac{2\pi f_0 C_1 \frac{1}{Q} \pm \sqrt{4\pi^2 f_0^2 C_1^2 \frac{1}{Q^2} - 4 \times 4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2}}{2 \times 4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} &= \frac{\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4 \frac{C_2}{C_1}}}{4\pi f_0 C_2} \end{aligned} \quad (\text{Section84-5a})$$

因式(4)和式(5)中， R_1 和 R_2 是可以互换的，可以解得：

$$R_2 = \frac{\frac{1}{Q} \mp \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4 \frac{C_2}{C_1}}}{4\pi f_0 C_2} \quad (\text{Section84-5b})$$

对两个假设已知的电容，还需要一些选择方法。

第一，为了保证电阻表达式中根号内数值不能小于 0，两个电容的选择就存在了约束：

$$\frac{1}{Q^2} - 4 \frac{C_2}{C_1} \geq 0$$

即：

$$C_2 \leq \frac{1}{4Q^2} C_1 \quad (\text{Section84-6a})$$

或者：

$$C_1 \geq 4Q^2 C_2 \quad (\text{Section84-6b})$$

第二，对第一个电容 C_1 或者 C_2 的选择，理论上可以任意。但是一般情况下，不要使得两个电阻太大或者太小。如何选择，可以参照下面的表 Section84-1。

举例 1：

设计一个二阶 SK 型低通滤波器。要求，中频增益为 1 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.58$ 。
用两种参数组合实现同样的要求，并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：第一步，确定电路结构如图 Section84-2，它可以实现中频 1 倍增益。

第二步，根据 Q 值，计算特征频率 f_0 。

据式(Section81-7)，将 $Q=0.58$ 代入得：

$$K = \frac{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}}{2Q} = 0.791$$

据式(Section81-6)，解得：

$$f_0 = \frac{f_c}{K} = \frac{1000\text{Hz}}{0.791} = 1264.244\text{Hz}$$

第三步，选择 C_1 ，一般按照表 Section84-1 规则进行：

表 Section84-1 截止频率与电容选择

f_c	1Hz	10Hz	100Hz	1000Hz	10kHz	100kHz	1MHz	10MHz
C_1 量级	10~100 μF	1~10 μF	0.1~1 μF	10~100nF	1~10nF	0.1~1nF	10~100pF	1~10pF

据此，选择电容 $C_1=100\text{nF}$ 。

第四步，选择 C_2 。按照式(Section84-6)对电容 C_2 的约束，应满足：

$$C_2 \leq \frac{1}{4Q^2} C_1 = 74.316\text{nF}$$

根据表 Section84-2，电阻电容 E 系列选值表，电容常用 E6 系列，即在 1~10 之间，只有 6 个待选值，分别为 1, 2.2, 3.3, 4.7, 6.8, 8.2，因此，选择 C_2 为 68nF。

第五步，计算两个电阻值并选择合适的标称值。

据式(Section84-5)，将全部已知参数代入，解得：

$$R_1 = \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4\frac{C_2}{C_1}}}{4\pi f_0 C_2} = 2061.24\Omega$$

$$R_2 = \frac{\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4\frac{C_2}{C_1}}}{4\pi f_0 C_2} = 1130.68\Omega$$

这些精确的电阻，除非要求厂家订做，一般是买不到的。因此，从性价比合适的 E96 系列挑选合适的值，是比较靠谱的方法。表 Section84-2 中，黄色区域是 E96 可选值，与上述计算值最为接近的是： R_1 取 2.05k Ω ， R_2 取 113k Ω 。

表 Section84-2 电阻电容 E 系列选值表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E3	1								2.2								4.7							
E6	1				1.5				2.2				3.3				4.7				6.8			
E24	1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1
E96	1.00	1.10	1.21	1.30	1.50	1.62	1.82	2.00	2.21	2.43	2.74	3.01	3.32	3.65	3.92	4.32	4.75	5.11	5.62	6.34	6.81	7.50	8.25	9.31
	1.02	1.13	1.24	1.33	1.54	1.65	1.87	2.05	2.26	2.49	2.80	3.09	3.40	3.74	4.02	4.42	4.87	5.23	5.76	6.49	6.98	7.68	8.45	9.53
	1.05	1.15	1.27	1.37	1.58	1.69	1.91	2.10	2.32	2.55	2.87	3.16	3.48	3.83	4.12	4.53	4.99	5.36	5.90	6.65	7.15	7.87	8.66	9.76
	1.07	1.18		1.40		1.74	1.96	2.15	2.37	2.61	2.94	3.24	3.57		4.22	4.64		5.49	6.04		7.32	8.06	8.87	
				1.43		1.78				2.67									6.19				9.09	
				1.47																				
	4	8	11	17	20	25	29	33	37	42	46	50	54	57	61	65	68	72	77	80	84	88	93	96

至此，完成了题目要求的设计，用 TINA-TI 画成仿真电路如图 Section84-3 所示。为了验证两个电阻是可以互换的，我们故意将两个电阻颠倒了数值。

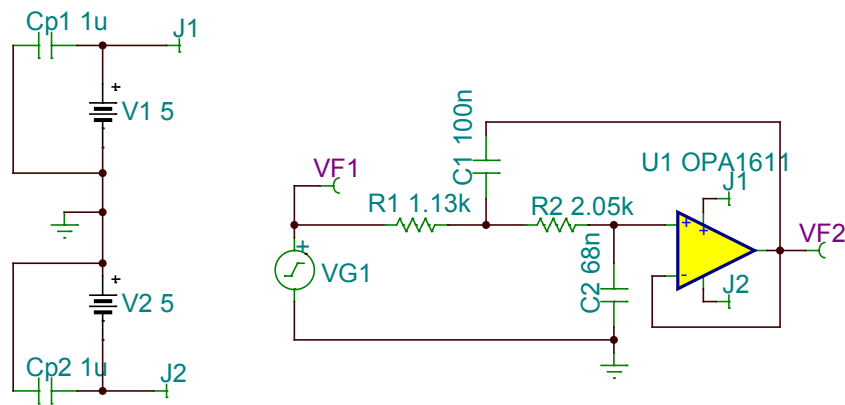


图 Section84-3 举例 1 仿真电路 1

用 TINA-TI 中的交流分析功能，得到频率特性如图 Section84-4 所示。

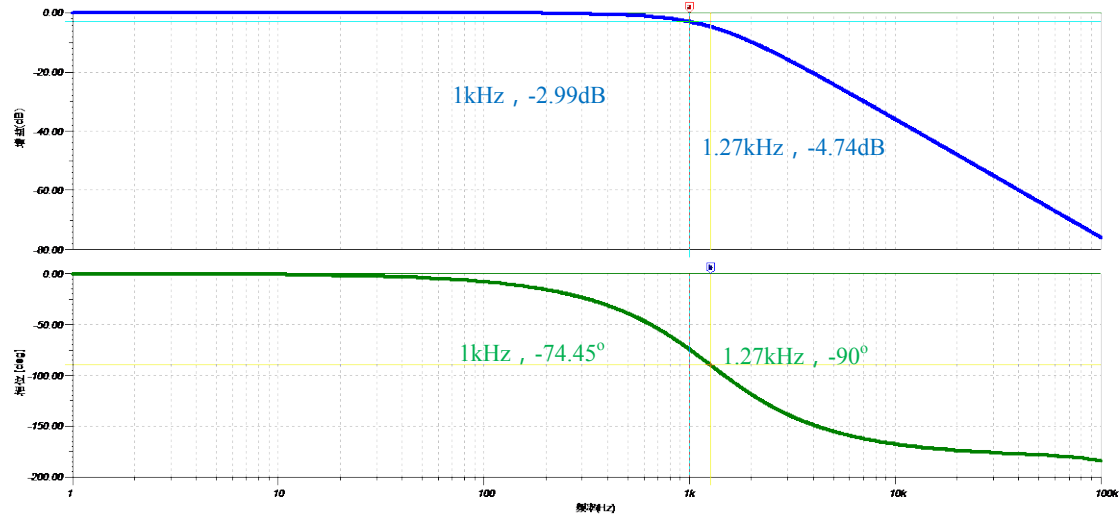


图 Section84-4 举例 1 电路的仿真频率特性

通过测量标尺，可以发现，在 1kHz 时，理论增益应为-3.01dB，实际增益为-2.99dB，比较吻合。在相频特性图中，用测量标尺，输入-90°，得到特征频率为 1.27kHz，将此频率在幅频特性图中查找，此处的增益为-4.74dB，折合为 0.579 倍，与设计要求的贝塞尔型滤波器 $Q=0.58$ 非常吻合。

最后，题目要求用两组参数实现，以验证“二阶滤波器设计的非唯一性”。有多种方法

可以做到这点，我们采用改变 C_2 的方法。按照要求，选择 $C_2=33\text{nF}$ ，得到新的结果为：

$$R_1 = 5740.74\Omega ; R_2 = 836.56\Omega$$

在 E96 系列中，最接近的是 R_1 取 $5.76\text{k}\Omega$ ， R_2 取 845Ω 。

仿真实测表明，在 1kHz 时，理论增益应为 -3.01dB ，实际增益为 -3.03dB ，比较吻合。在相频特性图中，用测量标尺，输入 -90° ，得到特征频率为 1.26kHz ，将此频率在幅频特性图中查找，此处的增益为 -4.74dB ，折合为 0.579 倍，与设计要求的贝塞尔型滤波器 $Q=0.58$ 非常吻合。

Section85. 6 元件二阶 SK 型低通滤波器

在 4 个阻容元件 SK 型二阶低通滤波器基础上，将跟随器改变成比例器，就形成了 6 元件二阶 SK 型二阶低通滤波器，它与 4 元件电路最大的区别是，一个运放即可完成滤波器和比例器的功能。电路如图 Section85-1 所示。

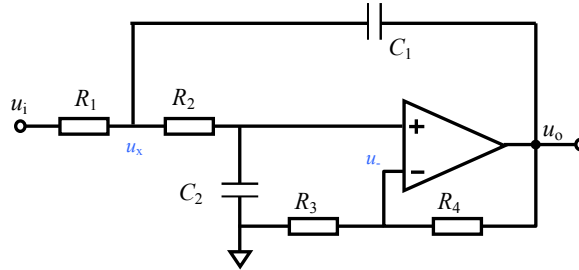


图 Section85-1 6 元件 SK 型二阶低通滤波器

传递函数分析

与 4 元件二阶 SK 型低通滤波器的分析方法类似，可以列出如下关系式：

设：

$$A_m = \frac{R_3 + R_4}{R_3}$$

则有：

$$U_o = U_x \times \frac{1}{1 + SR_2C_2} \times A_m, \text{ 即 } U_x = \frac{1 + SR_2C_2}{A_m} U_o$$

在 u_x 点列出 KCL 方程：

$$\frac{U_i - \frac{1 + SR_2C_2}{A_m} U_o}{R_1} = \frac{\frac{1 + SR_2C_2}{A_m} U_o - U_o}{\frac{1}{SC_1}} + \frac{\frac{1 + SR_2C_2}{A_m} U_o}{\frac{1 + SR_2C_2}{SC_2}}$$

进行化简：

$$U_i \frac{1}{R_1} = U_o \frac{1 + SR_2C_2}{A_m R_1} + U_o \frac{(1 + SR_2C_2 - A_m)SC_1}{A_m} + U_o \frac{SC_2}{A_m}$$

$$U_i = U_o \frac{1 + SR_2C_2 + (1 + SR_2C_2 - A_m)SR_1C_1 + SR_1C_2}{A_m}$$

写出传函：

$$A(S) = \frac{U_o}{U_i} = A_m \frac{1}{1 + SR_2C_2 + (1 + SR_2C_2 - A_m)SR_1C_1 + SR_1C_2}$$

$$= A_m \frac{1}{1 + SR_2C_2 + (1 - A_m)SR_1C_1 + SR_1C_2 + S^2R_1R_2C_1C_2}$$

$$= A_m \frac{1}{1 + S((R_1 + R_2)C_2 + (1 - A_m)R_1C_1) + S^2R_1R_2C_1C_2}$$

转换到频域，有：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \frac{1}{1 + j\omega(C_2(R_1 + R_2) + (1 - A_m)R_1C_1) + (j\omega)^2C_1C_2R_1R_2}$$

(Section85-1)

已知阻容参数求滤波器参数——滤波器分析

对照二阶低通标准式，式(Section81-4d)，可以看出：

$$A_m = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \quad (\text{Section85-2a})$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad (\text{Section85-2b})$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(C_2(R_1 + R_2) + (1 - A_m)R_1 C_1)} \quad (\text{Section85-2c})$$

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计

任务：已知 A_m , f_0 , Q ，据此选择 2 个电容，4 个电阻，完成对电路的设计工作。

第一步，同 4 元件电路的分析方法一致，我们先假设两个电容为已知，而且决定 A_m 的 R_3 、 R_4 可以单独求解。然后解出 R_1 和 R_2 。设 $R_1 = x$ ，据式(Section85-2b)可得：

$$R_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2 x} \quad (1)$$

将式(1)代入式(Section85-2c)，得：

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{C_1 C_2 x \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2 x}}}{(C_2(x + \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2 x}) + (1 - A_m)x C_1)} = \frac{\frac{1}{2\pi f_0}}{C_2 x + \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 x} + (1 - A_m)x C_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi f_0}}{\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 x} + ((1 - A_m)C_1 + C_2)x} \\ \frac{Q}{4\pi^2 f_0^2 C_1 x} + Q((1 - A_m)C_1 + C_2)x - \frac{1}{2\pi f_0} &= 0 \\ Q + 4\pi^2 f_0^2 C_1 x \times Q((1 - A_m)C_1 + C_2)x - 4\pi^2 f_0^2 C_1 x \frac{1}{2\pi f_0} &= 0 \\ 4\pi^2 f_0^2 C_1 Q((1 - A_m)C_1 + C_2)x^2 - 2\pi f_0 C_1 x + Q &= 0 \end{aligned}$$

解此方程，将 x 再写成 R_1 ，则有：

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2\pi f_0 C_1 \pm \sqrt{4\pi^2 f_0^2 C_1^2 - 4 \times 4\pi^2 f_0^2 C_1^2 Q^2 ((1 - A_m) + \frac{C_2}{C_1})}}{2 \times 4\pi^2 f_0^2 C_1 Q((1 - A_m)C_1 + C_2)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times Q^2 ((1 - A_m) + \frac{C_2}{C_1})}}{4\pi f_0 Q((1 - A_m)C_1 + C_2)} \quad (\text{Section85-3}) \end{aligned}$$

$$R_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2 R_1} \quad (\text{Section85-4})$$

第二步，在选择电容 C_2 时，应有一定的约束。

首先， R_1 表达式的根号内必须为正值。

$$1 - 4 \times Q^2 \left((1 - A_m) + \frac{C_2}{C_1} \right) \gg 0$$

$$\frac{C_2}{C_1} \leq \frac{1}{4 \times Q^2} - 1 + A_m$$

$$C_2 \leq \left(\frac{1}{4 \times Q^2} - 1 + A_m \right) C_1$$

(Section85-5a)

其次， R_1 表达式的分母不得为 0，也不要接近 0。

$$4\pi f_0 Q((1 - A_m)C_1 + C_2) \neq 0$$

即

$$C_2 \neq (A_m - 1)C_1$$

(Section85-5b)

第三步，确定满足指定 A_m 的电阻 R_3 和 R_4 。理论上说，只要选择两个电阻，使得：

$$A_m = \frac{R_3 + R_4}{R_3}$$

但是，为了保证更好的电路性能，对这两个电阻的选择最好遵循以下规则：

1) 两个电阻既不要太大，也不要太小。

2) 最好能够满足下式：

$$\frac{R_3 \times R_4}{R_3 + R_4} = R_1 + R_2$$

(Section85-6)

举例 1：

设计一个二阶 SK 型低通滤波器。要求，中频增益为 10 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.58$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：因题目要求中频增益为 10 倍，有两种方法可以实现。一种方法是在 4 元件 SK 型基础上，后面增加一级 10 倍增益同相放大，这很简单。但是，这需要 2 个运放。另一种方法是使用 6 元件 SK 型电路，结构如图 Section85-1 所示。我们采用后者。

第一步，准备工作。已知 Q ，利用式(Section81-7)，求得 $K=0.790987$ ，根据式(Section81-6)，解得 $f_0=1264.244\text{Hz}$ 。

第二步，确定 C_1 和 C_2 。利用表 Section84-1，选择 $C_1=100\text{nF}$ 。利用式(Section85-5a)的约束， C_2 不得超过 943nF，不得等于 900nF。依据表 Section84-2 的 E 系列标称值，可以选择 C_2 为 E6 系列中的 220nF。

第三步，计算并选择电阻值 R_1 和 R_2 。利用式(Section85-3)，计算 $R_{1a}=-668.06\Omega$ ， $R_{1b}=348.86\Omega$ ，后者是合理值。据此，根据表 Section84-2 的 E 系列标称值，选择 E96 系列的 $348\Omega=R_1$ 。根据式(Section85-4)计算得 $R_2=2064.9\Omega$ ，选择 E96 系列的 $2.05\text{k}\Omega=R_2$ 。至此，计算和选择电阻值 R_1 和 R_2 完毕。

第四步，计算并选择电阻值 R_3 和 R_4 。最简单的方法是选择 $R_3=1\text{k}\Omega$ ， $R_4=9.09\text{k}\Omega$ ，这是一个常见的 10 倍配置。这样已经足够好了。但是，如果一定要满足式(Section85-6)，可以按照下式计算：

$$R_1 + R_2 = 2050 + 348 = 2398\Omega$$

$$\frac{R_3 \times 9R_3}{R_3 + 9R_3} = 0.9R_3 = R_1 + R_2 = 2398\Omega, \text{ 解得 } R_3 = 2664.444\Omega$$

在 E96 系列中选择最为接近的, $R_3=2.67k\Omega$, 理论计算 $R_4=9R_3=24.03k\Omega$, 在 E96 中选择最为接近的, $R_4=24.3k\Omega$ 。

最后, 按照上述选择, 在 TINA-TI 中设计电路如图 Section85-2 所示。

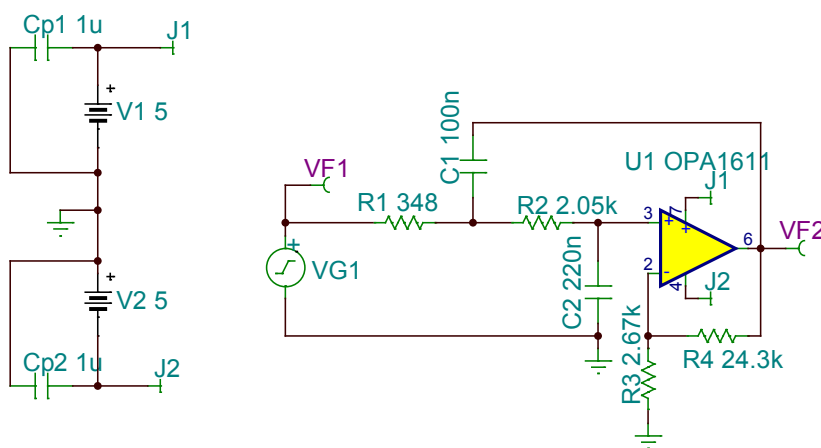


图 Section85-2 举例 1 电路

对此电路在 TINA-TI 中实施仿真, 得到如图 Section85-3 所示的频率特性图。

可以看出, 1Hz 处, 理论增益应为 20dB, 实测增益为 20.09dB, 基本吻合。1kHz 处, 理论增益应为 20.09dB-3.01dB=17.08dB, 实测增益为 17.3dB, 有一点差距, 这源自于 4 个电阻的选择均含有误差。关于 Q 值的实测非常重要。从相频特性图中找到 -90° 频率, 为 1.27kHz, 在幅频特性图中, 找到 1.27kHz, 实测增益为 15.57dB。按照归一化计算:

$$Q = 20.09\text{dB} - 15.57\text{dB} = -4.52\text{dB} = 10^{-4.52/20} = 0.59$$

与题目要求的 $Q=0.58$ 稍有差距, 也来源于电阻的选择。

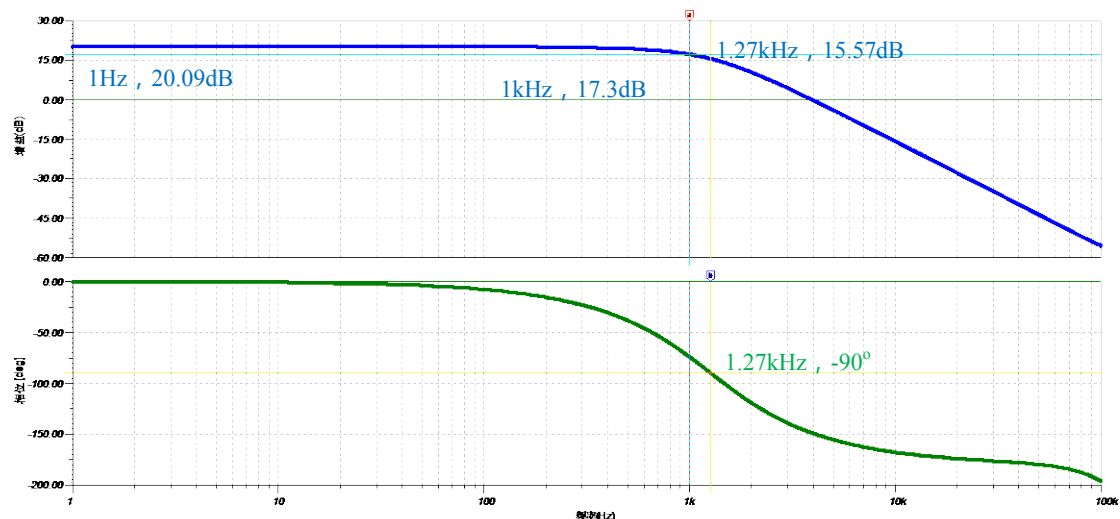


图 Section85-3 举例 1 电路仿真频率特性

在实际电路设计中, 测量结果甚至比这更差。那两个电容的选择可能引入更大的误差, 因此选择良好的电容, 才是滤波器设计的关键。

此处, 稍介绍一下器件的容差。

任何一个电阻或者电容, 都存在标称值, 容差范围, 以及温度稳定性三个指标。其标

称值为 E96 系列 $1\text{k}\Omega$ ，是说明生产厂家在这个电阻出厂的时候，保证在正常温度下，其误差在 $1\text{k}\Omega$ 基础上不超过 $\pm 1\%$ ，即一大堆出厂合格电阻，最大的不会超过 1010Ω ，最小不小于 990Ω ，但是它在相同温度下的实测值，到底是 1000Ω 还是 1010Ω ，抑或 990Ω ，取决于你的运气。

而对于 E24 系列电阻，其误差则不会超过 $\pm 5\%$ 。

温度稳定性一般指温度发生 1°C 变化，实测值发生的变化与标称值的比值。一般用 ppm 作为单位。比如，温度稳定性为 15ppm ，标称值为 $1\text{k}\Omega$ 的电阻，当温度发生 10°C 变化，电阻值变化量为：

$$\Delta R = \frac{15}{1000000} \times \frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^\circ\text{C} \times 1000\Omega = 0.15\Omega$$

相对于电阻器，电容器的容差一般更大，温度稳定性更差。

Section86. 易用型二阶 SK 型低通滤波器

并不是每个滤波器的设计都需要复杂的计算。对懒人来说，记住前面那些公式，是一件折磨人的事情。于是，超级懒人们——那些勤奋的科学家——就对前述电路进行了适当的约束，使得电路设计变得异常简单，变成易用型的。

4 元件等阻容式

图 Section86-1 可能是最为简单的二阶低通滤波器，它由两个相等的电阻、两个相等的电容组成。把这个条件代入 Section84-3 的表达式中，得到：

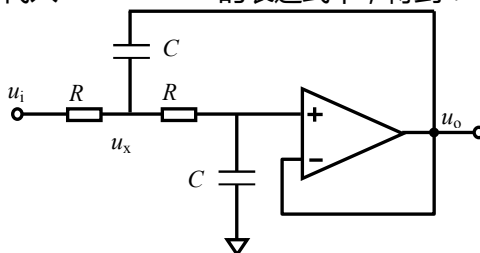


图 Section86-1 SK 型 4 元件等阻容低通滤波器

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega C_2(R_1 + R_2) + (j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2} = \frac{1}{1 + j\omega 2RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{0.5} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned} \quad \text{(Section86-1)}$$

可得：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{(Section86-2)}$$

$$Q = 0.5 \quad \text{(Section86-3)}$$

即，这是一个 $Q=0.5$ 的贝塞尔滤波器。

根据式(Section81-7)，得到 K 为 0.6435。

$$f_c = 0.6435 f_0; \quad f_0 = 1.554 f_c \quad \text{(Section86-4)}$$

举例 1：

设计一个二阶 SK 型低通滤波器，截止频率为 1kHz，中频电压增益为 1。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：题目要求中频电压增益为 1，可以选用 4 元件电路。同时，题目没有要求 Q 值，因此，只要截止频率等于 1kHz 即可，这样最懒惰的电路——等阻容电路就可以使用了。

据式(Section86-4)，得：

$$f_0 = 1.554 f_c = 1554 \text{Hz}$$

据式(Section86-3)，得：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 1554 \text{Hz}$$

选择 $C=100\text{nF}$ ，得：

$$R = \frac{1}{2\pi f_c C} = \frac{1}{6.28 \times 1554 \times 100 \times 10^{-9}} = 1024\Omega$$

TINA-TI 仿真电路如图 Section86-2 所示，仿真结果如图 Section86-3 所示。在 1kHz 处，电压增益为-2.99dB，与期望值-3.01dB 相差很小。这个误差来源于理论计算是 1024Ω，而实际电路中选用了 E96 系列的 102kΩ。

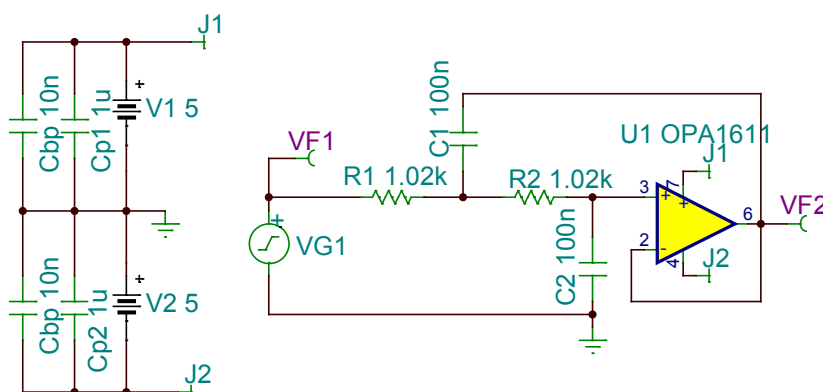


图 Section86-2 举例 1 仿真电路

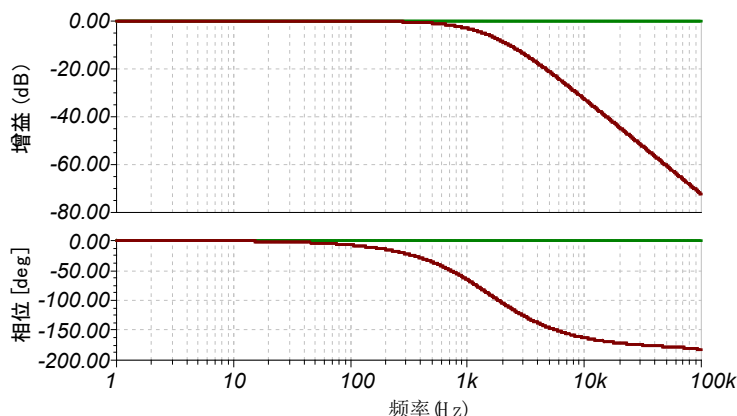


图 Section86-3 举例 1 仿真频率特性

对 4 元件电路的思考

4 元件等阻容式电路，虽然设计极为简单，但毕竟它只能实现 $Q=0.5$ 的滤波器，具有较强的局限性。但是，这个电路给了我们启示：能否在 4 元件电路中，既简化电路设计，又能实现 Q 值任意变化，这需要我们从头分析。

在标准 SK 电路中，式(Section84-4c)很有用：

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_2 (R_1 + R_2)}$$

当电阻电容均相等时， $Q=0.5$ 。这就是等阻容滤波器。如果仅仅是电容相等，则有：

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_2 (R_1 + R_2)} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2}$$

这是一个有趣的表达式，只有两个电阻相等时， Q 具有最大值 0.5。其余情况下， Q 总是小于 0.5。这个结论击碎了我们的梦想。

要想让 Q 达到 0.5 以上，看来只有让 C_1 大于 C_2 了。其中， C_1 是 C_2 的两倍，是一个较好的选择，因为这可以用两个电容并联实现。这就诞生了下面的电路。

4 元件巴特沃斯易用型

电路如图 Section86-4 所示。

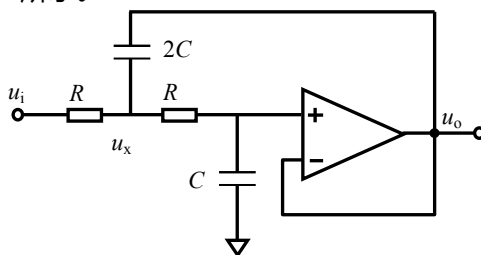


图 Section86-4 SK 型 4 元件巴特沃斯低通滤波器

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega C_2(R_1 + R_2) + (j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2} = \frac{1}{1 + j\omega 2RC + (j\omega)^2 2C^2 R^2} \quad (\text{Section86-5})$$

可得：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}RC} \quad (\text{Section86-6})$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \quad (\text{Section86-7})$$

这是一个特征频率、截止频率均为 $1/2\pi\sqrt{2}RC$ 的易用性巴特沃斯低通滤波器。

举例 2：

设计一个二阶 SK 型低通滤波器，要求 $Q=0.707$ ，截止频率为 1kHz，中频电压增益为 1。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：正中下怀，用图 Section86-4 刚好能满足要求。

直接选择 $C=100\text{nF}$ ，则图中上面的那个电容用两个 C 并联即可。据式(Section86-6)，得：

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\pi f_c C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\pi \times 1000 \times 100 \times 10^{-9}} = 1125.4\Omega$$

选择电阻为 E96 系列的 113kΩ。仿真电路如图 Section86-5 所示。仿真结果表明，1kHz 处，增益为 -3.05dB，相移为 -90.33°，与理论值较为吻合。

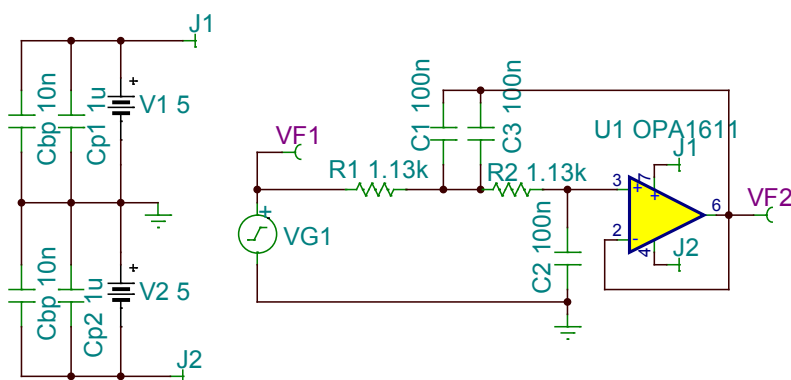


图 Section86-5 举例 2 仿真电路

6 元件易用型电路

6 元件电路，理论上可以实现任意增益和任意 Q 值。对它实施一些约束，也可以实现易用型电路，如图 Section86-6 所示。

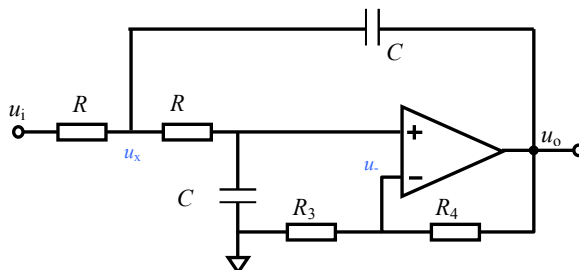


图 Section86-6 SK 型 6 元件二阶低通滤波器—易用型

据式[Section85-1]，将等阻容代入，得：

$$A(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega(3 - A_m)RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} \quad [\text{Section86-8}]$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} ; f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad [\text{Section86-9}]$$

$$Q = \frac{1}{3 - A_m} \quad [\text{Section86-10}]$$

此式说明，这个电路的 Q 值与中频增益密切相关，互相影响。一般情况下，是根据 Q 值要求，选择合适的增益。因为在表达式中， Q 不得为负值，因此 A_m 必须小于 3。

这个电路中， A_m 是大于等于 1 的，因此它可以实现 Q 为大于 0.5 的任意值。

举例 3：

设计一个二阶 SK 型低通滤波器。不要求中频增益，要求截止频率为 1kHz， $Q=1.0$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：可用 Section84 所述标准 SK 型电路实现，也可用 6 元件易用型实现。本例采用后者。

第一步，准备工作。根据式[Section81-6]和式[Section81-7]：

$$K = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}} = 0.786$$

$$f_0 = Kf_c = 0.786 \times 1000 = 786\text{Hz}$$

第二步，选择 $C=100\text{nF}$ ，据式[Section86-9]计算电阻。

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.28 \times 786 \times 100 \times 10^{-9}} = 2026\Omega$$

取 E96 系列最接近值， $R=2.05\text{k}\Omega$ 。

第三步，设计增益电路。据式[Section86-10]，得：

$$A_m = 3 - \frac{1}{Q} = 2 = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

选择 $R_3=R_4=1\text{k}\Omega$ 即可。但是在仿真实验中，我为了尽量减少输出失调，选择了增益电阻均为 $6.49\text{k}\Omega$ ，仿真电路如图 Section86-7 所示，结果如图 Section86-8 所示。按照理论

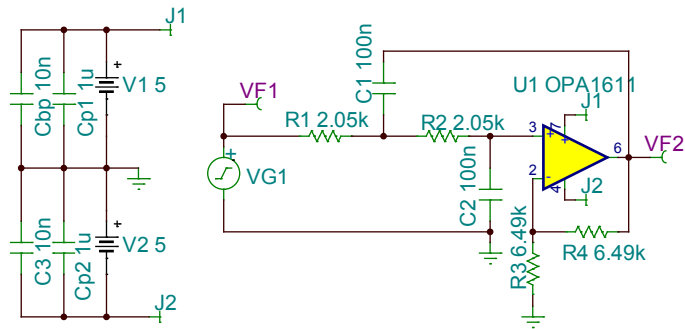


图 Section86-7 举例 3 仿真电路

分析，要满足式(Section85-6)，增益电阻应为 $8.2\text{k}\Omega$ 。

结果表明：中频增益为 6.02dB ，吻合。 1kHz 处增益为 2.81dB ，与理论值 3.01dB 有差距，缘自电阻选择误差。 -90° 相移点为 776.43Hz ，与理论值 786Hz 有差距，原因相同。在 776.43Hz 处，增益为 6.02dB ，与理论值吻合。

表 Section86-1 总结了全部 SK 型二阶低通滤波器。读者可以在不同的电路结构中，选择自己认为合适的。我建议读者自己编写一个程序，以实现自动设计。

表 Section86-1 二阶 SK 型低通滤波器总结

电路类型	4 元件标准	6 元件标准	4 元件等阻容	4 元件巴特沃斯	6 元件等阻容
Q 值	任意	任意	0.5	0.707	0.5~无穷大
增益	1	任意大于等于 1	1	1	1~3
缺点	需要计算	需要计算	Q 不可选	Q 不可选	Q , A_m 互相影响

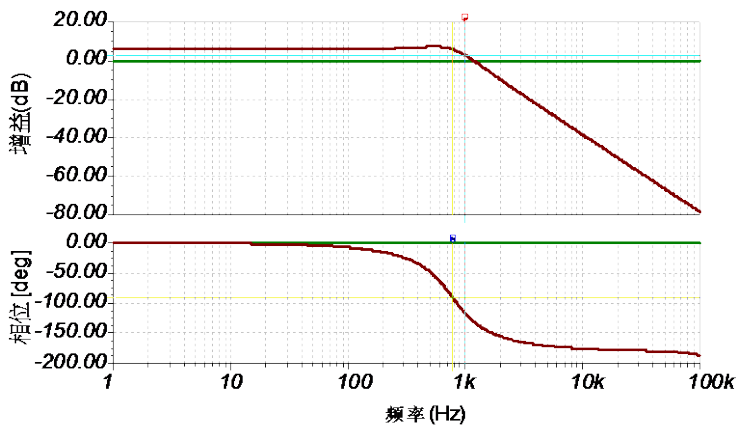


图 Section86-7 举例 3 仿真频率特性

Section87. MFB 型低通滤波器

Multiple Feedback, MFB 型低通滤波器如图 Section87-1 所示, 它与 SK 型的结构完全不同, 属于反相输入滤波器。它可以实现增益和 Q 值独立调节, 这一点与 6 元件 SK 型类似。

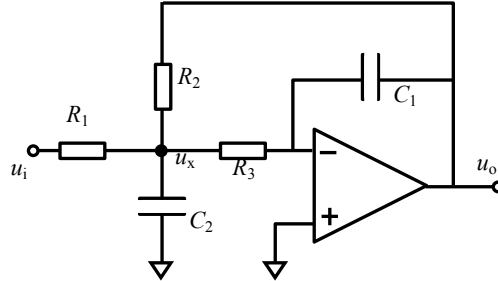


图 Section87-1 MFB 型低通滤波器

传递函数分析

$$\frac{U_x - 0}{R_3} = \frac{0 - U_o}{\frac{1}{SC_1}}, \text{ 即 } U_x = -U_o SR_3 C_1 \quad (1)$$

对 u_x 点, 列出方程:

$$\frac{U_i - U_x}{R_1} = U_x SC_2 + \frac{U_x}{R_3} + \frac{U_x - U_o}{R_2} = U_x SC_2 - U_o SC_1 + \frac{U_x - U_o}{R_2} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 得:

$$\frac{U_i + U_o SR_3 C_1}{R_1} = -U_o S^2 R_3 C_1 C_2 - U_o SC_1 + \frac{-U_o SR_3 C_1 - U_o}{R_2}$$

整理并得出传函:

$$\begin{aligned} R_2 U_i &= -U_o (S^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 + SC_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_2) + R_1) \\ A(S) = \frac{U_o}{U_i} &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + SC_1 (R_2 + R_3 + \frac{R_3 R_2}{R_1}) + S^2 R_2 R_3 C_1 C_2} \end{aligned}$$

写成频域表达式为:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + (j\omega)C_1(R_2 + R_3 + \frac{R_3 R_2}{R_1}) + (j\omega)^2 R_2 R_3 C_1 C_2} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + (j\omega)C_1(R_2 + R_3(1 - A_m)) + (j\omega)^2 R_2 R_3 C_1 C_2} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0}) \frac{C_1(R_2 + R_3(1 - A_m))}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned} \quad (\text{Section87-1})$$

已知阻容参数求滤波器参数——滤波器分析

对照标准低通表达式(Section81-4d)

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

可得：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}}; f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (\text{Section87-2a})$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}}{C_1 (R_2 + R_3 (1 - A_m))} \quad (\text{Section87-2b})$$

$$A_m = -\frac{R_2}{R_1} \quad (\text{Section87-2c})$$

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计

已知中频增益 A_m ，特征频率 f_0 ，以及品质因数 Q ，求电路中阻容参数。

先假设两个电容为已知，剩下三个电阻，面对三个滤波器指标约束，是可解的。

根据式(Section87-2a)，得：

$$R_2 R_3 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2}$$

据式(Section87-2b)，得：

$$R_2 + R_3(1 - A_m) = \frac{1}{2\pi f_0 C_1 Q}$$

即

$$\begin{aligned} R_3^2(A_m - 1) + \frac{R_3}{2\pi f_0 C_1 Q} - \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} &= 0 \\ R_3 &= \frac{-\frac{1}{2\pi f_0 C_1 Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1^2 Q^2} + \frac{4(A_m - 1)}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2}}}{2(A_m - 1)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2\pi f_0 C_1 Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1^2 Q^2} + \frac{4(A_m - 1)}{4\pi^2 f_0^2 C_1^2 Q^2} \frac{C_2}{C_1 Q^2}}}{2(A_m - 1)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2\pi f_0 C_1 Q} \pm \sqrt{1 + \frac{4(A_m - 1)C_1 Q^2}{C_2}}}{2(A_m - 1)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2\pi f_0 C_1 Q} \pm \frac{1}{2\pi f_0 C_1 Q} \sqrt{1 + \frac{4(A_m - 1)C_1 Q^2}{C_2}}}{2(A_m - 1)} \end{aligned}$$

存在约束的，是根号内部必须大于 0。因此有：

$$1 + \frac{4(A_m - 1)C_1 Q^2}{C_2} \geq 0$$

即，对两个电容的约束式为：

$$C_2 \geq 4(1 - A_m)Q^2 C_1$$

[Section87-3]

由此可得电阻 R_3 为：

$$R_3 = \frac{1 \mp \sqrt{1 + \frac{4(A_m - 1)C_1 Q^2}{C_2}}}{(1 - A_m)4\pi f_0 C_1 Q}$$

[Section87-4]

根据式[Section87-2a]得：

$$R_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2 R_3}$$

[Section87-5]

据式[Section87-2c]得：

$$R_1 = -\frac{R_2}{A_m}$$

[Section87-6]

因此，对 MFB 型二阶低通滤波器，在已知 f_0 ， Q ， A_m 的情况下，按照下述步骤设计：

- 1) 根据表格 Section84-1 选择 C_1 ，根据式[Section87-3]对 C_2 的约束，选择合适的 C_2 。
- 3) 根据式[Section87-4]，[Section87-5]计算 R_3 ， R_2 。
- 4) 根据式[Section87-6]，计算 R_1 。

举例 1：

设计一个二阶低通滤波器。要求，中频增益为-10 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.58$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：确定电路结构为 MFB 型二阶低通滤波器，可以仅用一只运放实现上述要求。

- 1) 准备工作：根据 $Q=0.58$ ，利用式[Section81-7]，求得 $K=0.791$ 。则有：

$$f_0 = \frac{f_c}{K} = \frac{1000}{0.791} = 1264.2\text{Hz}$$

- 2) 利用前述公式，分别计算如下表所示。

	C_1	C_2 下限	C_2	R_3	R_2	R_1
计算值		148nF		1550.9Ω	4644.7Ω	464.47Ω
选取值	10nF		220nF	1.54kΩ	4.64kΩ	464Ω

按照上述结果设计的 MFB 滤波器电路如图 Section87-2 所示，仿真结果如图 Section87-3 所示。其中， R_3 选取了两个合理解中的一个较大值。

实际上， R_3 的另一个解为 422.25Ω，也是合理的，如下表所示。

	C_1	C_2 下限	C_2	R_3	R_2	R_1
计算值		148nF		422.25Ω	17060Ω	1706Ω
选取值	10nF		220nF	422Ω	16.9kΩ	169kΩ

实际设计 MFB 滤波器时，要根据电路的其他要求，合理选择其中一组解。

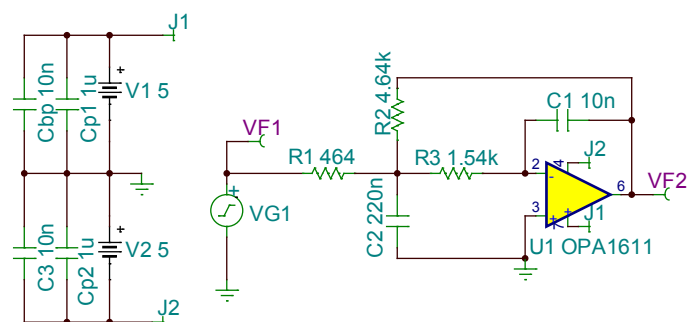


图 Section87-2 举例 1 电路

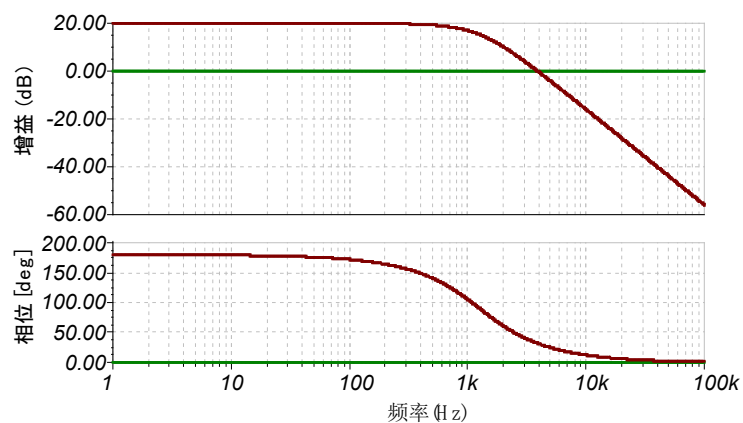


图 Section87-3 举例 1 仿真频率特性

Section88. 高阶低通滤波器

为什么用高阶？

二阶滤波器仅仅实现了-40dB/10 倍频的滚降速率。这还远远不够。

举一个例子：心电信号来自于人体，其幅度大约为 1mV，频率范围一般在 0.01Hz~100Hz，而主要能量集中在 0.25Hz~35Hz。对心电信号的准确检测，有利于及早发现病变。但是，很遗憾，人体的表面，还存在强烈的，周边交流供电设备产生的 50Hz 或者 60Hz 工频（北美及日韩等采用）干扰，以及人体肌肉产生的肌电信号（多集中在几十 Hz 到几百 Hz）。微小的心电信号混杂在其中，检测较为困难。

采用 40Hz 砖墙式低通滤波器，则可以有效滤除超过 40Hz 以上的信号，那么绝大部分肌电信号，以及工频干扰都会被滤除。但这仅是我们的期望。

如果用一阶低通滤波器，当截止频率设为 40Hz，那么在 40Hz 处，有用信号已经被衰减成 0.707 倍，而 50Hz 处的干扰，也仅被衰减了 0.64 倍，二阶滤波器会稍好些，但是仍然难以满足要求。我们的目标是，在 40Hz 处，衰减不严重，有用信号被完美保留，在 50Hz 处，有足够的衰减，将工频干扰彻底滤除。

这只能用高阶滤波器实现。

高阶滤波器的参数定义

高阶滤波器关于 Q 值的定义，仍来源于二阶滤波器：特征频率处的增益值，就是 Q 。

高阶滤波器的特征频率定义，是相移在中频基础上滞后 $n \times 45^\circ$ 的频率点， n 为阶数。比如，5 阶低通同相滤波器，中频相移应为 0° ，相移等于 $-5 \times 45^\circ = -225^\circ$ （也就是 135° ）的频率点即为特征频率。比如，6 阶反相滤波器，中频相移应为 -180° ，其特征频率应为相移等于 $(-180^\circ - 270^\circ = -450^\circ = 90^\circ)$ 的频率点。

高阶滤波器的截止频率定义，仍是“增益等于中频增益的 0.707 倍”的频率点。

基于 Q 值，高阶滤波器仍分为巴特沃斯型($Q=0.707$)、切比雪夫型($Q>0.707$)、贝塞尔型($Q<0.707$)。

高阶滤波器的组成方法

如表 Section88-1 所示，任何一个高阶滤波器都被拆分成若干独立级，每一级都由一阶或者二阶组成，其下标是其级序号。

比如表中四阶滤波器一行，表明要形成一个四阶滤波器，必须由两级二阶滤波器串联形成，其中第 1 级的特征频率为 f_{0_1} ，第 1 级的品质因数为 Q_1 。第 2 级的特征频率为 f_{0_2} ，第 2 级的品质因数为 Q_2 。

比如表中七阶滤波器一行，表明要形成一个七阶滤波器，必须由一级一阶滤波器，加上三级二阶滤波器串联形成。其中第 1 级为一阶滤波器，其特征频率为 f_{0_1} ，没有品质因数概念。第 2 级后均为二阶滤波器。第 2 级的特征频率为 f_{0_2} ，品质因数为 Q_2 。第 3 级的特征频率为 f_{0_3} ，品质因数为 Q_3 。第 4 级的特征频率为 f_{0_4} ，品质因数为 Q_4 。

表 Section88-1 高阶滤波器组成

	第 1 级	第 2 级	第 3 级	第 4 级	第 5 级
三阶	一阶 f_{0_1}	二阶 (f_{0_2}, Q_2)			
四阶	二阶 (f_{0_1}, Q_1)	二阶 (f_{0_2}, Q_2)			
五阶	一阶 f_{0_1}	二阶 (f_{0_2}, Q_2)	二阶 (f_{0_3}, Q_3)		
六阶	二阶 (f_{0_1}, Q_1)	二阶 (f_{0_2}, Q_2)	二阶 (f_{0_3}, Q_3)		
七阶	一阶 f_{0_1}	二阶 (f_{0_2}, Q_2)	二阶 (f_{0_3}, Q_3)	二阶 (f_{0_4}, Q_4)	
八阶	二阶 (f_{0_1}, Q_1)	二阶 (f_{0_2}, Q_2)	二阶 (f_{0_3}, Q_3)	二阶 (f_{0_4}, Q_4)	
九阶	一阶 f_{0_1}	二阶 (f_{0_2}, Q_2)	二阶 (f_{0_3}, Q_3)	二阶 (f_{0_4}, Q_4)	二阶 (f_{0_5}, Q_5)
十阶	二阶 (f_{0_1}, Q_1)	二阶 (f_{0_2}, Q_2)	二阶 (f_{0_3}, Q_3)	二阶 (f_{0_4}, Q_4)	二阶 (f_{0_5}, Q_5)

设计高阶滤波器需要的已知条件

设计一个高阶滤波器，需要明确以下已知条件：

截止频率 f_c

任何一个高阶滤波器，都有截止频率，即实际增益为中频增益的-3.01dB 处的频率。这是设计高阶滤波器的第一个已知条件。

滤波器阶数

高阶滤波器的阶数越高，可以获得更加接近于砖墙滤波器的效果，但成本也越高，设计实现难度也相应增加。应合理选择滤波器阶数。

滤波器类型

对一个高阶滤波器来说，还需要根据滤波器的设计目的，确定滤波器类型，包括巴特沃斯型、贝塞尔型、切比雪夫型。巴特沃斯型和贝塞尔型，都是固定参数，无需再深入选择。而切比雪夫型，则需要选择带内波动最大值，一般用 dB 表示。比如 0.5dB 切比雪夫，是指该滤波器的幅频特性中，不包含单纯的下降段，在通带内实际增益与中频增益的差距，在 $\pm 0.5\text{dB}$ 之内，如图 Section88-1 所示，图中实测最大波动为-0.498dB。

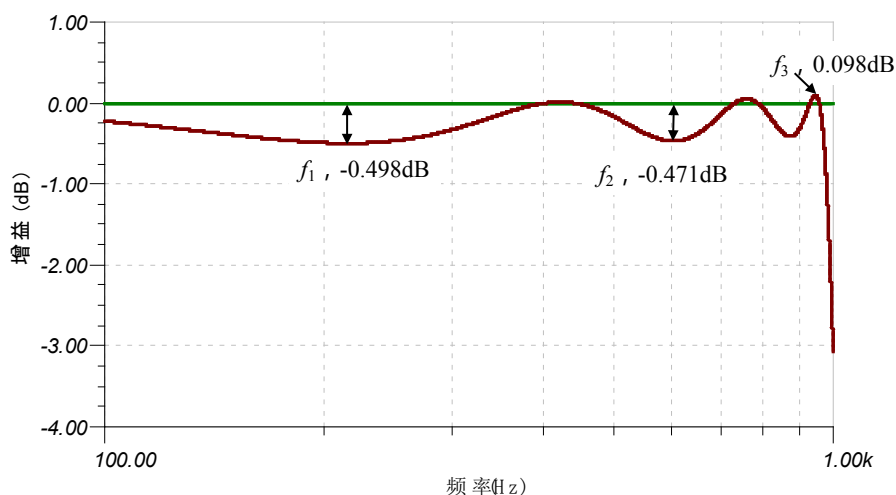


图 Section88-1 七阶 0.5dB 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

高阶滤波器系数表

表 Section88-1 是我总结的高阶滤波器系数表，其中巴特沃斯、贝塞尔、0.5dB 切比雪夫、1dB 切比雪夫的原始数据来自于 TI 公司编著的“Op Amps for everyone, Third Edition”，经过我自己的运算得出。而 0.25dB 切比雪夫、0.1dB 切比雪夫，则直接摘录于 ADI 公司 Hank Zumbahlen 编著的“Linear Circuit Design Handbook”。

这个表格包含 3 阶到 10 阶。对不同类型的滤波器，都具有 2 列数据，分别为频率系数 $1/K$ ，以及品质因数 Q 。表中 Q 值为空白的，表示该级为一阶滤波器。

表 Section88-1 高阶滤波器系数表

	巴特沃斯		贝塞尔		0.5dB切比雪夫		1dB切比雪夫		0.25dB切比雪夫		0.1dB切比雪夫	
	1/K	Q	1/K	Q	1/K	Q	1/K	Q	1/K	Q	1/K	Q
3	1.000		1.323		0.537		0.451		0.612		0.936	
	1.000	1.000	1.442	0.694	0.915	1.707	0.911	2.018	0.923	1.508	0.697	1.341
4	1.000	0.541	1.430	0.522	0.540	0.705	0.492	0.785	0.592	0.657	0.951	2.183
	1.000	1.307	1.604	0.805	0.932	2.941	0.925	3.559	0.946	2.536	0.651	0.619
5	1.000		1.502		0.342		0.280		0.401		0.475	
	1.000	0.618	1.556	0.563	0.652	1.178	0.634	1.399	0.673	1.036	0.703	0.915
	1.000	1.618	1.755	0.916	0.961	4.545	0.962	5.555	0.961	3.876	0.963	3.281
6	1.000	0.518	1.605	0.510	0.379	0.684	0.342	0.761	0.418	0.637	0.470	0.600
	1.000	0.707	1.690	0.611	0.734	1.810	0.723	2.198	0.748	1.556	0.764	1.332
	1.000	1.932	1.905	1.023	0.966	6.513	0.964	8.006	0.972	5.521	0.972	4.635
7	1.000		1.648		0.249		0.202		0.294		0.353	
	1.000	0.555	1.716	0.532	0.489	1.092	0.472	1.297	0.509	0.960	0.538	0.846
	1.000	0.802	1.822	0.661	0.799	2.576	0.795	3.156	0.804	2.191	0.813	1.847
	1.000	2.247	2.050	1.126	0.979	8.840	0.980	10.900	0.978	7.468	0.979	6.234
8	1.000	0.510	1.778	0.506	0.289	0.677	0.260	0.753	0.321	0.630	0.363	0.593
	1.000	0.601	1.833	0.560	0.583	1.611	0.573	1.956	0.596	1.383	0.611	1.207
	1.000	0.900	1.953	0.711	0.839	3.466	0.835	4.267	0.845	2.931	0.850	2.453
	1.000	2.563	2.189	1.225	0.980	11.527	0.979	14.245	0.983	9.717	0.983	8.082
9	1.000		1.857		0.195		0.158		0.232		0.279	
	1.000	0.527	1.879	0.520	0.388	1.060	0.373	1.260	0.406	0.932	0.431	0.822
	1.000	0.653	1.948	0.589	0.661	2.213	0.656	2.713	0.667	1.881	0.678	1.585
	1.000	1.000	2.080	0.761	0.873	4.478	0.871	5.527	0.874	3.776	0.878	3.145
	1.000	2.879	2.322	1.322	0.987	14.583	0.987	18.022	0.986	12.266	0.986	10.180
10	1.000	0.506	1.942	0.504	0.234	0.673	0.209	0.749	0.259	0.627	0.294	0.590
	1.000	0.561	1.981	0.538	0.480	1.535	0.471	1.864	0.491	1.318	0.507	1.127
	1.000	0.707	2.063	0.620	0.717	2.891	0.713	3.560	0.723	2.445	0.730	2.043
	1.000	1.101	2.204	0.810	0.894	5.611	0.892	6.938	0.897	4.724	0.899	3.921
	1.000	3.196	2.450	1.415	0.987	17.994	0.986	22.280	0.989	15.120	0.989	12.516

高阶滤波器设计方法

根据滤波器类型、阶数，可以在表格中圈定一组数据。比如要设计一个 7 阶滤波器，类型为 1dB 切比雪夫，截止频率为 f_c ，则圈定数据如表 Section88-1 中的方框所示，得到 4 行数据，其含义是：

第一行代表第一级的参数。有两列，左列为频率系数 $1/K$ ，0.202，右列为品质因数，空格代表该级为一阶滤波器。一阶滤波器的特征频率为：

$$f_0 = \frac{f_c}{K} = f_c \times \frac{1}{K}$$

(Section88-1)

一阶滤波器通常由一个电阻和一个电容形成，有如下关系：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

第二行代表第二级的参数。有两列，左列为频率系数 $1/K$ ，0.472，右列为品质因数 Q ，1.297，代表该级为二阶滤波器。该二阶滤波器的品质因数为 1.297，特征频率为：

$$f_0 = \frac{f_c}{K} = f_c \times \frac{1}{K}$$

根据本书 Section84~Section87 内容，已知特征频率、品质因数，完成设计即可。

第三行代表第三级的参数。可知，将第三级设计成一个特征频率为 $f_c \times 0.795$ ，品质因数为 3.156 的二阶低通滤波器即可。

第四行代表第四级的参数。可知，将第四级设计成一个特征频率为 $f_c \times 0.980$ ，品质因数为 10.9 的二阶低通滤波器即可。

高阶滤波器的增益分配和类型选择

首先，高阶滤波器的设计结果不是唯一的，对同样的要求，实现的方案很多，没有标准答案。

在增益分配上，可以采用多种方法实现。比如一个 5 阶滤波器，要求 10 倍增益，你可以采用每一块均为 $10^{0.2}=1.5849$ 倍增益，最终实现 10 倍增益；也可以采用第一块一阶滤波器完成 10 倍增益，而在后面 2 个二阶滤波器都采用单位增益；或者第一块一阶滤波器完成 5 倍增益，第二块二阶滤波器完成 2 倍增益，第三块二阶滤波器采用单位增益。

在类型选择上，也可以采用多种方法。比如一个负 20 倍增益的 6 阶滤波器，你可以采用：第一块二阶 MFB 型，反相，第二块 SK 型，第三块也是 SK 型，最终实现反相输出；也可以采用三块均为 MFB 型，最终还是反相输出。

到底怎么做，应以保证性能情况下，尽量方便设计为原则。

举例 1：

设计一个 9 阶低通滤波器。要求，中频增益为 10 倍，截止频率为 1000Hz，切比雪夫型，0.1dB 带内波动。用仿真软件实证。

解：先确定电路结构。我不喜欢设计含增益的滤波器。因为是 9 阶，其中必然包含一个一阶低通滤波器，而一阶低通滤波器的增益是非常好设计的。因此，我计划把 10 倍增益交给一阶滤波器完成。前面只要选择 4 个独立的二阶滤波器，用 SK 型 4 元件电路实现即可。

其次，在表 Section88-1，找到 9 阶和切比雪夫 0.1dB 的交叉位置，如表中方框：

0.1dB 切比雪夫		f_0
$1/K$	Q	
9 阶	0.279	279Hz
	0.431	431Hz
	0.678	678Hz
	0.878	878Hz
	0.986	986Hz

据式(Section88-1)，可以计算出各级滤波器的特征频率，写于表格右侧。

第三，根据系数，设计各块滤波器：

1) 对一阶低通滤波器, 选择电容为 100nF, 利用式(Section79-1), 得:

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 279 \times 100 \times 10^{-9}} = 5704\Omega$$

同时, 设置增益电阻分别为 1kΩ 和 9kΩ, 以完成 10 倍增益。

2) 对 4 个二阶滤波器, 设计方法相同, 以 $Q=0.822$, 特征频率为 431Hz 的第二级为例:

选择 $C1=1\mu\text{F}$, 利用式(Section84-6a), 得出 $C2$ 需小于 370nF, 选择 $C2=330\text{nF}$, 利用式(Section84-5a)和式(Section84-5b), 计算两个电阻值: $R1=904\Omega$, $R2=457\Omega$ 。

依次对剩余的三个二阶滤波器进行设计, 即可得到全部电路如图 Section88-2 所示。

仿真的频率特性如图 Section88-3 所示。关键测试结果如下:

1) -3.01dB 点, 对中频增益为 20dB, 实际增益为 16.99dB 的频率为 999.46Hz。与设计要求的 1000Hz 完全吻合。

2) 整体特征频率, 在相频特性图中, 找到 9 阶对应的-405°点, 为 809.08Hz, 此处增益为 20.04dB, 换算成中频增益的倍数为 1.0046 倍, 此即为 Q 值。

3) 最大波动为 19.9dB, 比中频增益小 0.1dB, 符合设计要求。

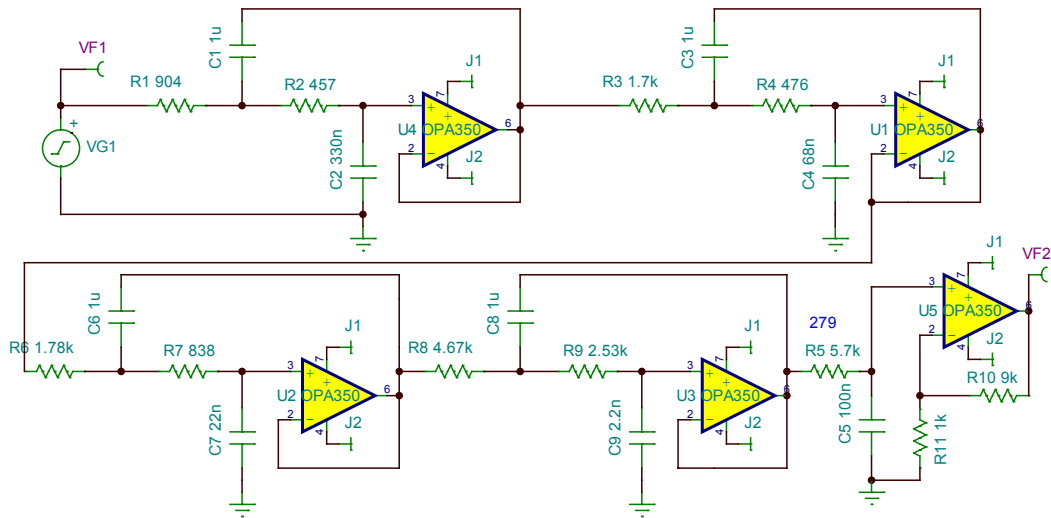


图 Section88-2 举例 1 电路, 9 阶 0.1dB 切比雪夫低通滤波器

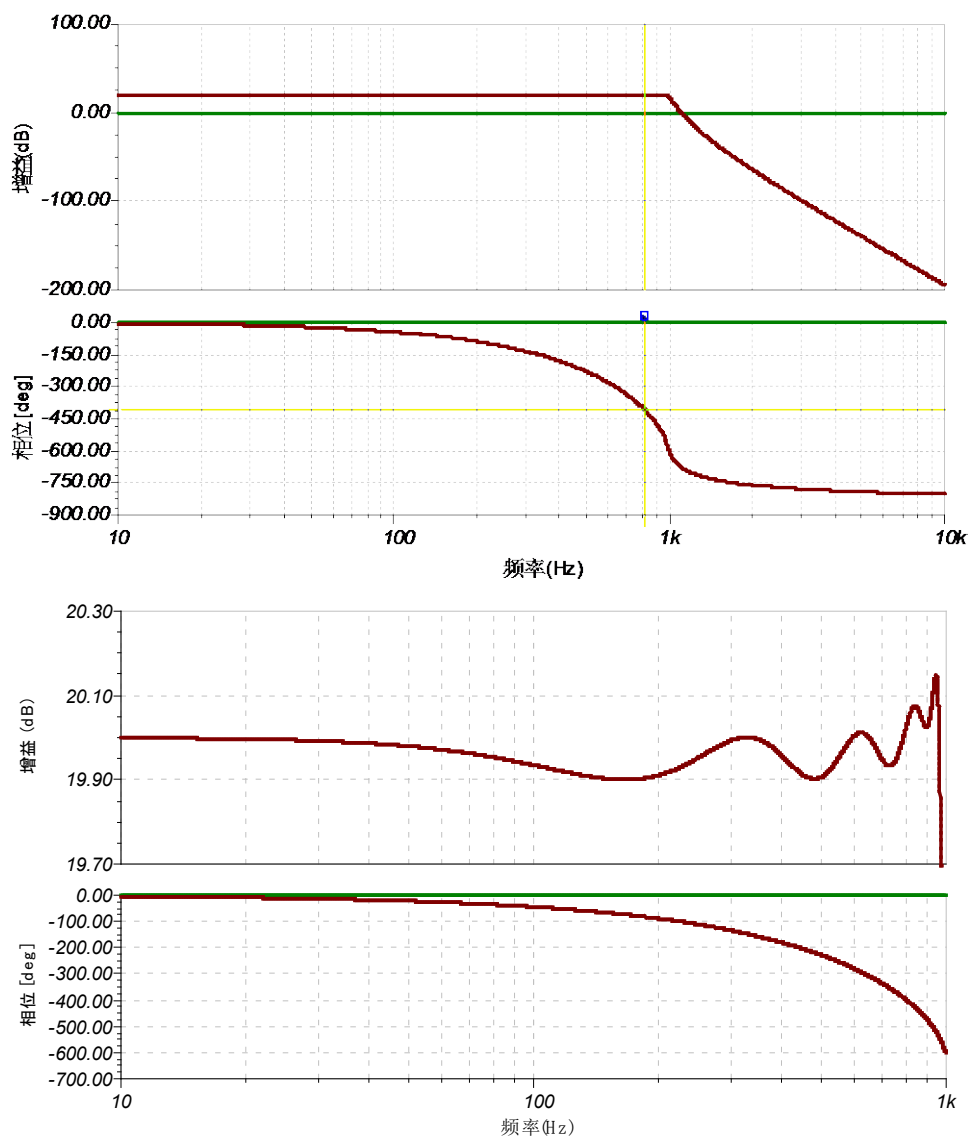


图 Section88-3 举例 1 的频率响应 (含细节)

Section89. 单电源低通滤波器

前面讲述内容，均假设运放工作在双电源供电情况下，既有正电源，也有负电源。在消费电子领域，供电电压通常是电池，其电压值一般为 1.2V~3.7V。在这种情况下，一般都采用单一电源直接供电。即运放的供电只有正电源和地。

此时，直接使用原先的滤波器电路，就会出现工作异常。因此，必须对原电路进行适当改造，才能使用。

单电源供电存在的问题

图 Section89-1 是一个双电源供电的低通滤波器。在输入信号为 0V 时，运放的正输入端、负输入端、输出端均为 0V。当输入信号在 0V 基础上发生波动时（即有明显输入信号时），运放的两个输入端和输出端都将出现基于 0V 的正负波动，其瞬时电压都介于 -5V~+5V 的供电电压范围内。运放工作正常。

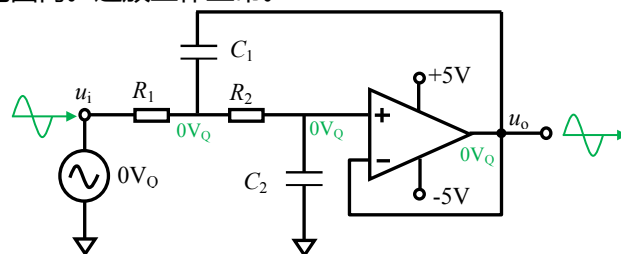


图 Section89-1 SK 型低通滤波器双电源供电

如果将这个电路的供电电源直接改为单电源供电，如图 Section89-2 所示，问题就来了。在信号静默时（即输入为 0V，没有波动），运放的正输入端为 0V，假设运放是一个理想运放，或者为一个输入轨至轨（可以接受电源供电范围内的输入）、输出轨至轨（可以输出电源范围内的电压）的运放，此时运放的负输入端和输出端也为 0V。当输入信号瞬时值大于 0V 时，输出会出现大于 0 的值，但是一旦输入信号出现小于 0V 的值，输出绝不可能产生小于 0V 的值，就出现了如图中输出位置的红色半波波形。

输入是有正有负的正弦波，输出变成了只有正半周的波形，电路出现异常。

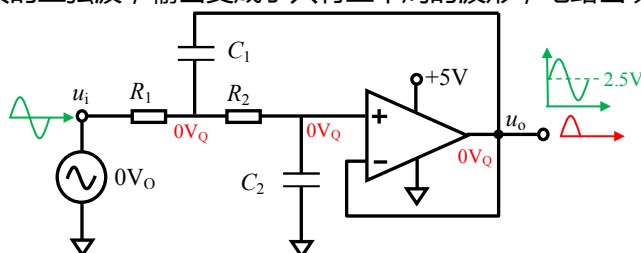


图 Section89-2 SK 型低通滤波器单电源直接供电（错误电路）

当正负电源供电时，输入 0V 相当于正负电源的中心，相当于舞者在舞台中央开始跳舞一样，非常舒服。当单一正电源供电，输入 0V，就相当于舞台被切割掉一半，舞者还是站在原先舞台的中央，一不小心就会掉下去。这很不好。

单电源供电情况下，理想的情况是，当输入信号为 0V 时，运放输入端、输出端均静

默在电源的 1/2 处，比如图 Section89-2 中绿色输出波形，静默值为 2.5V。当输入开始波动时，输出将围绕着 2.5V 波动。这就像那个舞者，他可以选择先站在那一半舞台的中央，虽然新舞台小了点，但还是可以继续跳舞的。

在这种思路下，我们需要对以前学过的每一个电路，都实施单电源改造。它要求，第一，电路的输出静默电位必须合适，一般在电源电压的 1/2 处，也有较为特殊的，比如在 2.048V。第二，改变电路静默电位，一般需要引入电阻，这可能会引起滤波器电路中的等效电阻发生变化，我们还需要保证针对信号的等效电阻维持不变。

4 元件单电源二阶 SK 型低通滤波器

单电源 4 元件二阶 SK 型低通滤波器如图 Section89-3 所示。其改造原理是，不改变双电源电路计算结果——即电路中的阻容选择。在原电路基础上，将双电源电路中的 R_1 ，用两个电阻 R_{1A} 和 R_{1B} 取代它， $R_{1A} // R_{1B} = R_1$ ，并且要求：如果要求输出静默电位为 2.5V，即为电源电压的 1/2，则 $R_{1A} = R_{1B}$ ；如果要求输出静默电位是其它值 U_{OQ} ，需要保证：

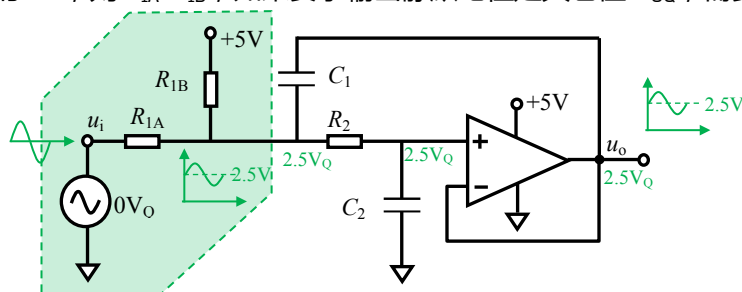


图 Section89-3 4 元件 SK 型低通滤波器单电源电路

$$\frac{R_{1A}}{R_{1A} + R_{1B}} \times 5 = U_{OQ} ; R_{1A} // R_{1B} = R_1$$

(Section89-1)

这样做，一方面给电路中 R_2 左侧提供了一个合适的静态电位，也就是保证了输出的静态电位，另一方面，由于两个电阻并联后等于原先计算的 R_1 ，这不会改变原先电路中的阻容参数，保持了滤波器性态不变。图 Section89-4 给出了这种思路的戴维宁等效解释。

唯一需要注意的是，这个电路的中频增益不再是 1 倍，而是 0.5 倍。因为两个相等电阻的分压，使得等效加载信号电压变为 $0.5u_i$ 。

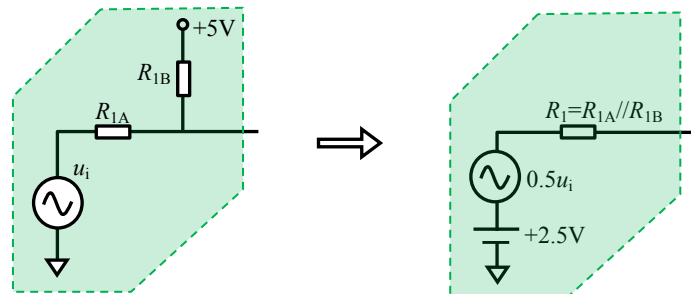


图 Section89-4 输入端等效电路

这种用电源电压介入，提升输出静默电位的方法，在低通滤波器单电源改造中经常使用。但是这种方法也存在明显问题：如果电源不干净（即电源电压上存在毛刺、纹波），它将使得输入信号中直接受到了电源污染。在高质量滤波电路中，为了避免电源对信号的污染，可以采用高质量、低噪声的基准源代替 +5V 直流电源。

6 元件单电源二阶 SK 型低通滤波器

6 元件电路的可贵之处，在于它的增益可调性。这个电路一旦变为单电源的，就涉及到增益的变化，需要一些计算。电路如图 Section89-5 所示。与前述 4 元件电路一样，这个电路也需要考虑如何实现输出静默电位在指定值，以及中频增益的改变。

我们先来看看问题：假如以前设计好了一个双电源供电的 10 倍增益，指定 Q 值的低通滤波器，此时好不容易获得了 R_1 、 R_2 、 C_1 、 C_2 、 R_3 、 R_4 ，要变成单电源供电，输出静默电位得是 2.5V，那么运放的输入端静默电位应是 0.25V，即图中的 $2.5V/A_m$ ，要让 R_2 左侧静默电位是 0.25V， R_{1A} 和 R_{1B} 需要是 0.1 倍分压。此时，静默电位设计完成了，但是总的中频增益却下降了，因为输入信号经 R_{1A} 和 R_{1B} 分压后，变为 $0.9u_i$ ，最终，中频增益只有 9 倍。

如何能够即保证输出静默电位是 2.5V，又保证总的中频增益仍满足设计要求，就需要严格设计，缜密计算了。

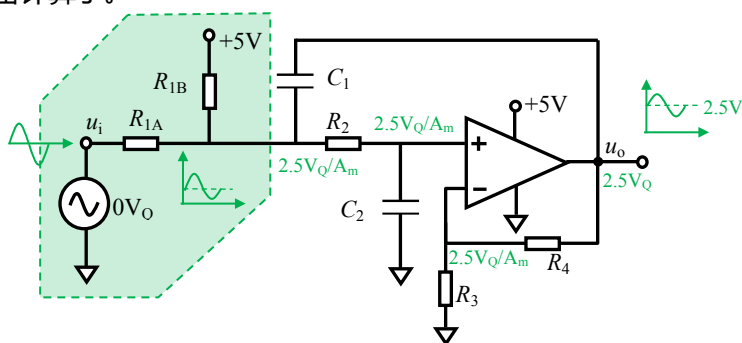


图 Section89-5 6 元件 SK 型低通滤波器单电源电路

已知“中频增益 A ，截止频率 f_c ，品质因数 Q ”，输入信号静默电位为 $0V$ ，供电电压为 E_C ，输出信号静默电位为 U_{OQ} ，要求单电源供电，分析方法如下：

设两个电阻 R_{1A} 和 R_{1B} 的电源分压比为 k ，即：

$$k = \frac{R_{1A}}{R_{1A} + R_{1B}} \quad (1)$$

则 R_{1A} 和 R_{1B} 连接处 X 位置的静默电位为 U_{XQ} ，由于电阻 R_2 上没有静态电流流过，就没有静态压降，因此运放正输入端的静默电位也是 U_{XQ} 。

对于静态而言， U_{OQ} 为已知（一般为 2.5V）：

$$E_C \times k \times A_m = U_{OQ} ; A_m = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

则有：

$$k \times A_m = \frac{U_{OQ}}{E_C} \quad (2)$$

对于信号而言，信号衰减比为 $1-k$ 。动态超低频率时，即有下式成立：

$$u_o = u_i(1 - k) \times A_m$$

超低频率时的总信号增益为已知：

$$A = (1 - k) \times A_m \quad (3)$$

联立式(2)(3)可求得：

$$A_m = A + \frac{U_{OQ}}{E_C}$$

[Section89-2]

$$k = \frac{U_{OQ}}{E_C \times A_m} = \frac{U_{OQ}}{A \times E_C + U_{OQ}}$$

[Section89-3]

这两个表达式告诉我们，在单电源电路中，当我们需要总体的中频增益为 A 时，6 元件电路中的 A_m 必须是式[Section89-2]，按此要求独立设计 6 元件电路即可得到 R_1 、 R_2 、 C_1 、 C_2 、 R_3 、 R_4 。然后，用两个电阻 R_{1A} 、 R_{1B} ，依据式[Section89-3]获得的 k ，按下式代替 R_1 ：

$$\begin{cases} k = \frac{R_{1A}}{R_{1A} + R_{1B}} \\ R_1 = \frac{R_{1A} \times R_{1B}}{R_{1A} + R_{1B}} \end{cases}$$

[Section89-4]

举例 1：

设计一个 2 阶 SK 型低通滤波器。要求单电源+3.7V 供电，输出静默电位为 1.85V，中频增益为 10 倍，截止频率为 1000Hz，巴特沃斯型。用仿真软件实证。

解：按照题目要求，采用图 Section89-5 所示的 6 元件 SK 型单电源电路。整理条件，得 $E_C=3.7V$ ， $U_{OQ}=1.85V$ ， $Q=0.7071$ ， $A=10$ ， $f_c=1000Hz$ 。

由于题目要求是巴特沃斯型，可知其特征频率就是截止频率， $f_0=1000Hz$ 。

据式[Section89-2]，得：

$$A_m = A + \frac{U_{OQ}}{E_C} = 10.5$$

下面按照 Section85 内容独立计算 6 元件的参数。

确定 C_1 和 C_2 。利用表 Section84-1，选择 $C_1=100nF$ 。利用式[Section85-5]的约束， C_2 不得超过 985nF，不得等于 950nF。依据表 Section84-2 的 E 系列标称值，可以选择 C_2 为 E6 系列中的 680nF。

计算并选择电阻值 R_1 和 R_2 。利用式[Section85-3]，式[Section85-4]计算得 $R_1=638\Omega$ ， $R_2=584\Omega$ 。

计算并选择电阻值 R_3 和 R_4 。选择 $R_3=1k\Omega$ ， $R_4=9.53k\Omega$ ，实现 10.5 倍的 A_m 。

按照式[Section89-3]，得：

$$k = \frac{U_{OQ}}{E_C \times A_m} = \frac{U_{OQ}}{A \times E_C + U_{OQ}} = 0.0476$$

按照式[Section89-4]，求解方程，得：

$$\begin{aligned} R_{1B} &= \frac{R_1}{k} = 13398\Omega \\ R_{1A} &= \frac{kR_{1B}}{1-k} = 670\Omega \end{aligned}$$

将此计算结果代入电路，仿真电路如图 Section89-6 所示。给输入加载 10Hz，幅度为 0.18V 的正弦波，用仿真软件提供的示波器，得到输入输出波形如图 Section89-7 所示。可以看出，输出静默电位大约在 1.85V，输出信号幅度大约为 1.8V，甚至输出波形最大值处已经出现了微弱的削顶。仿真频率特性如图 Section89-8 所示。可以测得，1Hz 处，增益为

20.02dB，与理论值 20dB 基本吻合，1kHz 处，增益为 16.89dB，与理论值 17.01dB 有微弱差距，相移为-92.87°，与理论值-90°也有微弱差距。这些都来源于滤波器设计中 E96 系列电阻带来的误差。在一般的滤波器设计中，这点误差不算什么。

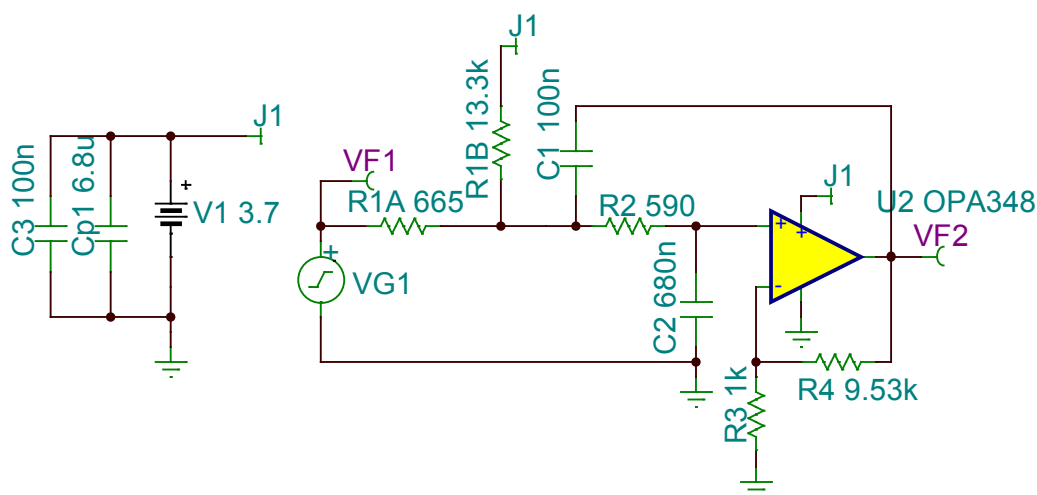


图 Section89-6 举例 1 仿真电路

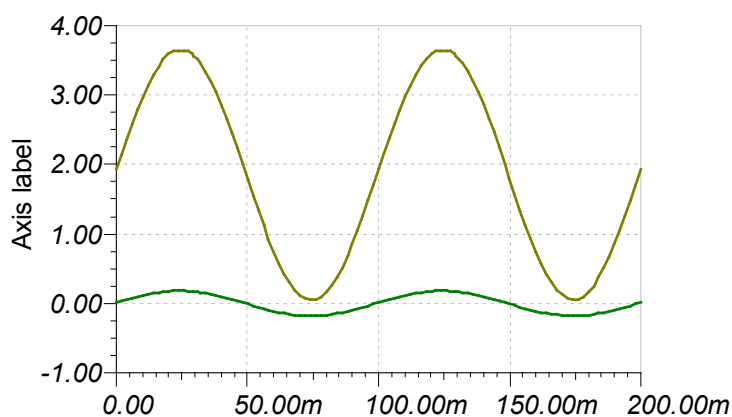


图 Section89-7 举例 1 输入 0.18V，10Hz 正弦波仿真示波器输出

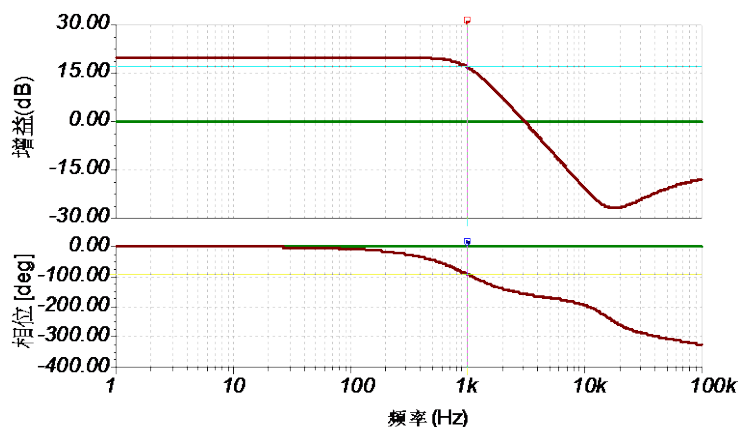


图 Section89-8 举例 1 仿真频率特性

单电源二阶 MFB 型低通滤波器

MFB 型低通滤波器的单电源改造，相对较为容易。其电路如图 Section89-9 所示。电路中， R_1 、 R_2 、 R_3 、 C_1 、 C_2 仍利用双电源电路的计算结果。只是增加了两个分压电阻 R_4 和 R_5 ，以强制给运放正输入端提供一个静态电位 U_{+Q} ，迫使输出静态电位维持在设计要求指定的 U_{OQ} 。

可以看出，这种改变似乎不会影响滤波器的频率特性。而对静态特性，有下式成立：

$$U_{+Q} = E_C \times \frac{R_4}{R_4 + R_5} \quad (4)$$

$$U_{XQ} = U_{OQ} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_{OQ}}{1 - A_m} \quad (5)$$

在静态时，只有 R_3 上没有电流流过，且运放处于虚短状态，才能保证输出静态电位的稳定不变，因此有：

$$U_{XQ} = U_{-Q} = U_{+Q}, \text{ 即}$$

$$E_C \times \frac{R_4}{R_4 + R_5} = \frac{U_{OQ}}{1 - A_m}$$

可以解得：

$$R_5 = R_4 \times \left(\frac{E_C}{U_{OQ}} \times (1 - A_m) - 1 \right) = kR_4$$

[Section89-5]

独立选择 R_4 ，并保证 R_5 是 R_4 的 k 倍即可。

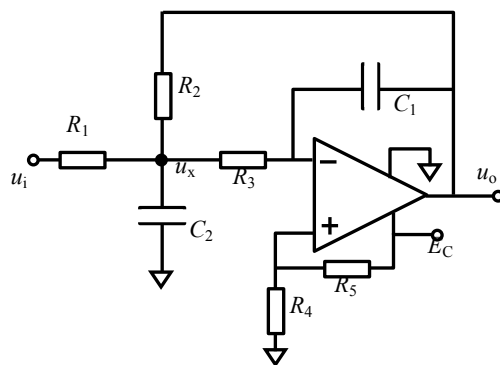


图 Section89-9 单电源 MFB 型低通滤波器

举例 2：

设计一个二阶低通滤波器。要求，供电电压为 5V，输出静默电位为 2.5V，输入静默电位为 0V，中频增益为 -10 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.58$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：此例为 Section87 中举例 1 的单电源版本，除供电变化外，其余要求均相同。因此，关于滤波器的电阻、电容值均采用该例中已有值。独立设计电路中 R_4 和 R_5 即可。

取 $R_4=1k\Omega$ ，据式(Section89-5)：

$$R_5 = R_4 \times \left(\frac{E_C}{U_{OQ}} \times (1 - A_m) - 1 \right) = R_4 \left(\frac{5}{2.5} \times 11 - 1 \right) = 21R_4$$

据此，仿真电路如图 Section89-10 所示。示波器显示输入输出波形如图 Section89-11

所示，图中为基于 0V 的输入信号，频率 10Hz，幅度 240mV。仿真频率特性如图 Section89-12 所示。与理论值对比，基本吻合。

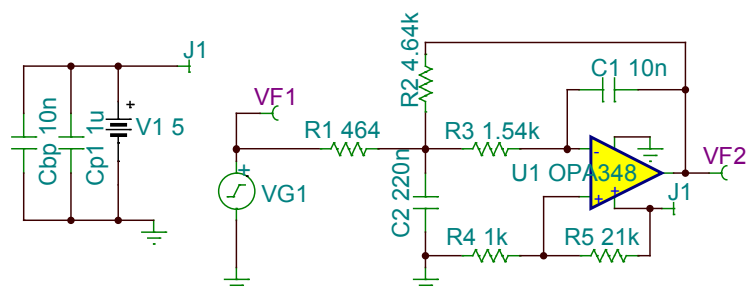


图 Section89-10 举例 2 仿真电路

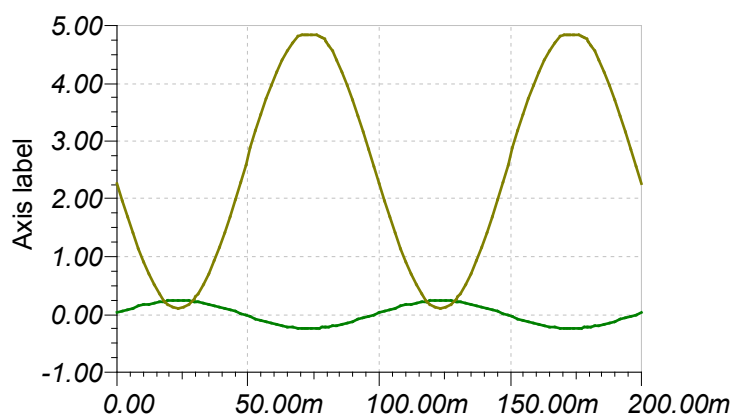


图 Section89-11 举例 2 输入输出波形

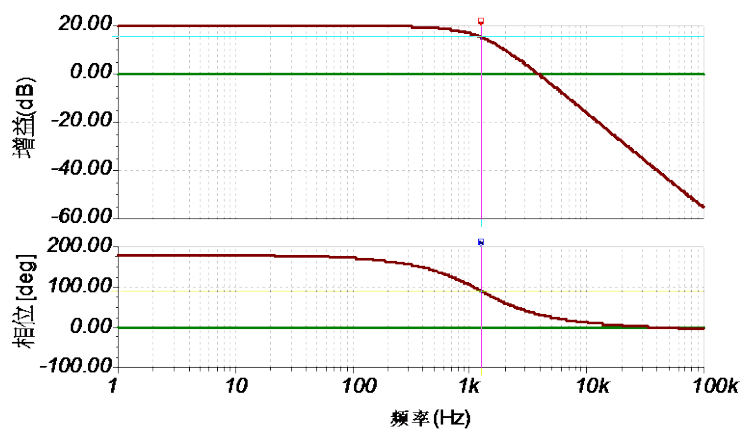


图 Section89-12 举例 2 仿真频率特性

单电源滤波器中的提升型和传递型

前述单电源滤波器有一个特点，输入信号基线为 0V，输出信号基线为 2.5V，我们称这种单电源滤波器为提升型。它用于将双极输入信号演变成基线为 2.5V 的单极信号。

在单电源滤波器中，还有另外一种电路，其输入信号来自于提升型单电源滤波器，即基线为 2.5V，其输出基线也是 2.5V，这种滤波器电路被称为传递型。比如用两个运放制作一个 4 阶滤波器，第一个运放实现二阶滤波，属于提升型，那么第二个运放实现的二阶滤波器，就一定是传递型的。

所有单电源电路，包括滤波器、比例器等，都存在提升型和传递型两类。

图 Section89-13 是一个传递型 SK 型 4 元件单位增益二阶低通滤波器，它与标准双电源电路几乎一模一样，只是将电源改为单电源即可。

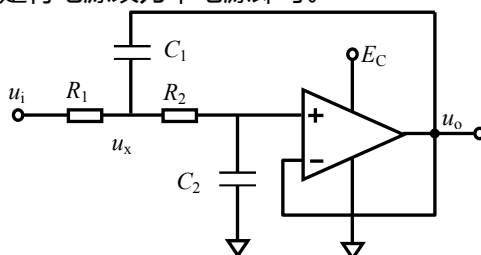


图 Section89-13 传递型 SK 单位增益低通滤波器

图 Section89-14 是一个传递型 MFB 型二阶低通滤波器。看起来，它与图 Section89-9 的提升型 MFB 滤波器一模一样，唯一的区别在于 R_4 和 R_5 的选择。由于 u_i 已经有 2.5V 的静默电位，要保证 u_o 仍保持 2.5V 的静默电位，只需要选择 R_4 和 R_5 ，以保证运放正输入端的静默电位为 2.5V 即可。

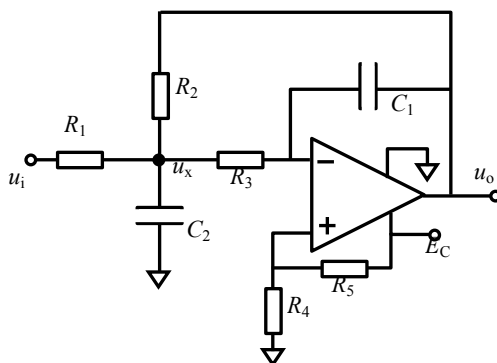


图 Section89-14 传递型单电源 MFB 型低通滤波器

这样看来，传递型电路的设计比提升型更为简单。然而，对 6 元件含增益的 SK 型低通滤波器来说，不做“伪地”，要实现传递型则是不可能的。为什么呢？

原因是，我们使用 6 元件电路的根本目的在于一方面要滤波，另一方面要对通频带内信号实施放大。而传递型 6 元件 SK 型低通滤波器，是无法实现放大的。

图 Section89-15 是一个传递型 6 元件 SK 型低通滤波器（当然，这个电路是无效的），可以看出，为了保证输出静默电位为 2.5V，运放的负输入端静默电位必须是 $2.5V_Q/A_m$ ，其中 $A_m=1+R_4/R_3$ ，进而可以反推出， R_{1B} 头顶电位必须是 $2.5V_Q/A_m$ 。由于输入信号含有 $2.5V_Q$

的静默电位，要使得 R_{1B} 头顶电位为 $2.5V_Q/A_m$ ， R_{1A} 和 R_{1B} 必须组成 $1/A_m$ 分压关系。按照此分压关系，输入信号也将被先分压 $1/A_m$ ，再放大 A_m 倍，最终只能得到 1 倍的信号增益。

因此，按此电路结构，6 元件 SK 型传递型低通滤波器，只能实现 1 倍增益，无法实现含有电压增益的滤波效果。

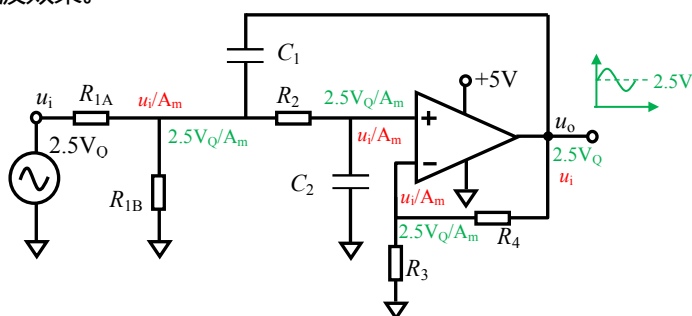


图 Section89-15 6 元件 SK 型低通滤波器单电源电路无法实现传递型

要实现单电源下的传递型 6 元件 SK 型低通滤波器，只有通过“伪地”实现。即将图中 R_3 下端原本的接地，改成接“伪地”：一个 $2.5V$ 的电位点，且能吞吐足够大的电流。关于伪地，本节暂不介绍。

高阶单电源低通滤波器

高阶单电源低通滤波器由几个一阶、二阶滤波器级联组成。第一级电路一般是提升型的，第二级以后均为传递型。当整个高阶滤波器有增益要求时，需要稍稍谨慎：SK 型传递型是无法实现增益的。

除此之外，设计高阶单电源低通滤波器的方法很简单，只需要按照双电源高阶滤波器的设计方法，完成各级滤波器的参数设计，然后按照本节内容，对其实施单电源改造即可。

Section90. 滤波器设计中的注意

SK 型低通滤波器中的高频馈通现象

图 Section90-1 是一个 4 元件 SK 型低通滤波器，图 Section90-2 是其仿真频率特性。从频率特性看，从 100kHz 开始，它的增益不再继续下降，反而出现缓慢上升，并最终稳定在 -37dB 附近。这种现象，称为低通滤波器的高频馈通现象。它使得低通滤波器在频率特别高时，反而滤波效果变差。

而同样的 MFB 型低通滤波器，则不会这样。

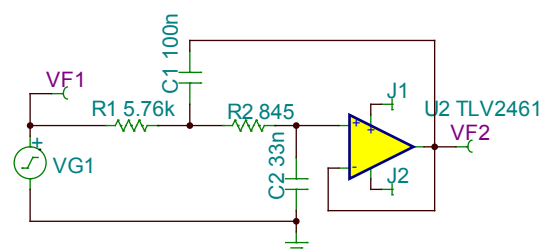


图 Section90-1 SK 型二阶低通滤波器

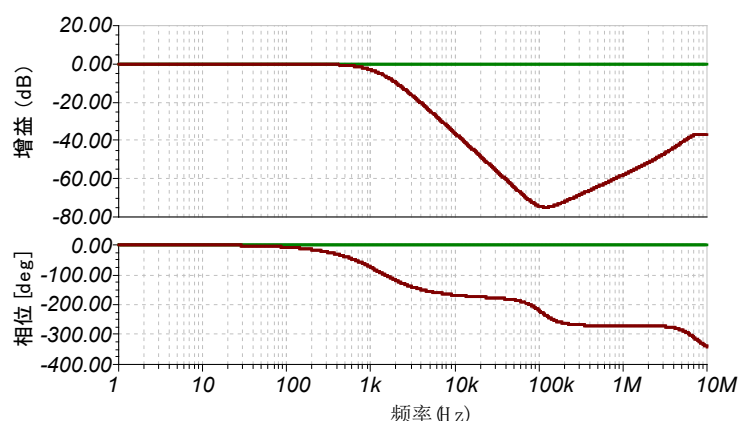


图 Section90-2 SK 型低通滤波器的高频馈通现象

造成高频馈通现象的主要原因，是 SK 型滤波器独有的结构。如图 Section90-3 是包含运放内部结构的电路图。在输入信号频率很高时，运放的开环电压增益急剧下降，导致等效的输出受控电压源 $A_{uo}u_{id}$ 急剧下降，甚至逼近 0V。此时，输入信号经过 R_1 ，以及几乎短路的 C_1 到达运放输出端，与运放内部的输出电阻构成了分压关系。

$$u_o = u_i \frac{r_o}{R_1 + r_o}$$

运放的开环输出电阻，与输入信号频率有关，一般在高频时可以达到几十甚至上百 Ω ，这就造成分压比不会太小，使得高频时滤波效果变差。此时，信号的流向是从输入端直接馈送到输出端的，因此叫高频馈通。

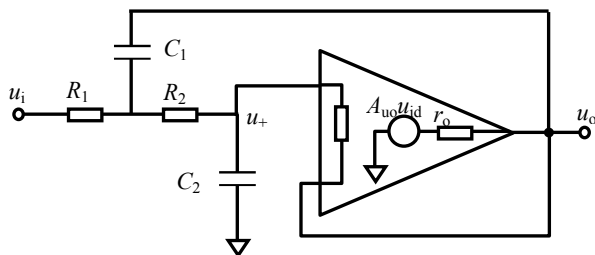


图 Section90-3 对高频馈通的微观解释

避免或者减少高频馈通有两种方法，第一选择 MFB 型滤波器，第二在 SK 型滤波器中，使用带宽足够大的运放。同时，也能看出，电阻 R_1 取值越大，高频馈通形成的分压比越小，越有利于抑制高频馈通。当然，运放开环输出电阻越小，也有利于抑制高频馈通。但是，不要对此有过高的奢望。

一旦出现高频馈通，又无法采取上述方法，则可以在后级增加一个无源低通滤波器。

滤波器中运放的带宽选择

二阶滤波器的传函是建立在虚短成立的基础上的，请大家回忆，此前我们实施的所有传函推导中，都利用了运放虚短结论。而运放的虚短成立条件为：

$$\frac{A_{uo}\dot{M}}{1 + A_{uo}\dot{F}} \approx \frac{\dot{M}}{\dot{F}}, \text{ 即 } A_{uo}\dot{F} \gg 1, \text{ 也即 } A_{uo} \gg \frac{1}{\dot{F}}$$

即在任何情况下，运放的开环电压增益应该比闭环电压增益大很多，一般大 100 倍。

有很多关于此的公式可以利用。但如此的谨慎必要性不大。记住以下结论，通常会有用：

任何一个低通滤波器，都有 Q 值和截止频率 f_c ，以及通带内中频增益 A_m ，对此滤波器，选择运放的增益带宽积或者单位增益带宽 GBW 为：

$$GBW > 100 \times A_m \times f_c \times Q_{\max} \quad \text{[Section90-1]}$$

其中，如果 Q 小于 1， $Q_{\max}=1$ ，如果 Q 大于 1， $Q_{\max}=Q$ 。

这是一个相对保守的公式。

对于高通滤波器，运放的带宽选择与下限截止频率毫无关系。因为，任何一个高通滤波器，都希望频率越高时，增益越进入平坦区，理论上它希望运放的带宽是无穷大。但是，总会有频率上限的，也就是任何高通滤波器，受运放本身带宽的影响，其实都是一个宽带通滤波器，它存在上限截止频率。这个上限截止频率，是设计中必要告诉你的。

一旦你获得了高通滤波器的频率上限要求，请按照本书式(Section74-6)，计算运放的 GBW。

举例 1：

设计一个二阶 SK 型低通滤波器。要求，中频增益为 1 倍，截止频率为 50kHz，巴特沃斯型。选用 6 种不同的运放，以验证 GBW 小于、等于、远大于式(Section90-1)要求时，滤波器的实际表现。

解：根据前述内容，设计符合要求的滤波器电路如图 Section90-4 所示，6 个电路的

阻容参数完全相同。为保证其正常工作，电源电压选为 $\pm 2.5\text{V}$ ，是全部运放都可以承受的。

按照式(Section90-1)，计算得该电路中运放的 GBW 应大于 5MHz 。据此，我们选择 GBW 分别为 5MHz 的 TLV2461， 10MHz 的 TLC081， 150MHz 的 OPA300，以及低于要求的， 2MHz 的 TLE2064， 500kHz 的 TLV2432， 90kHz 的 OPA379。

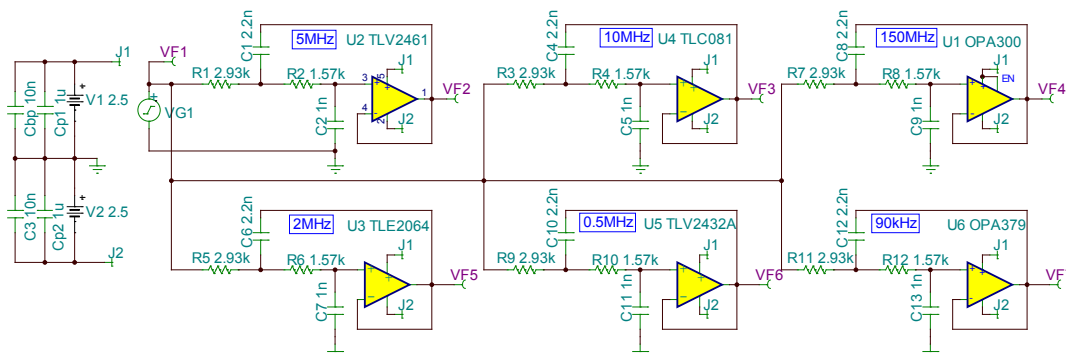


图 Section90-4 举例 1：运放 GBW 对滤波器影响实验

对上述电路的仿真频率特性，如图 Section90-5 所示。从图中看出，GBW 为 90kHz 的低速低压(1.8V)低功耗($2.5\mu\text{A}$)运放 OPA379，即 VF7 特性，已经完全不符合设计要求。而 500kHz 的 TLV2432，其频率特性为 VF6，与理想特性存在一定的差异，肉眼可见。GBW 为 2MHz 的 TLE2064，其频率特性为 VF5，基本与大部队吻合。 5MHz 、 10MHz 、 150MHz 三款运放，其频率特性分别为 VF2、VF3、VF4，基本是重合的。

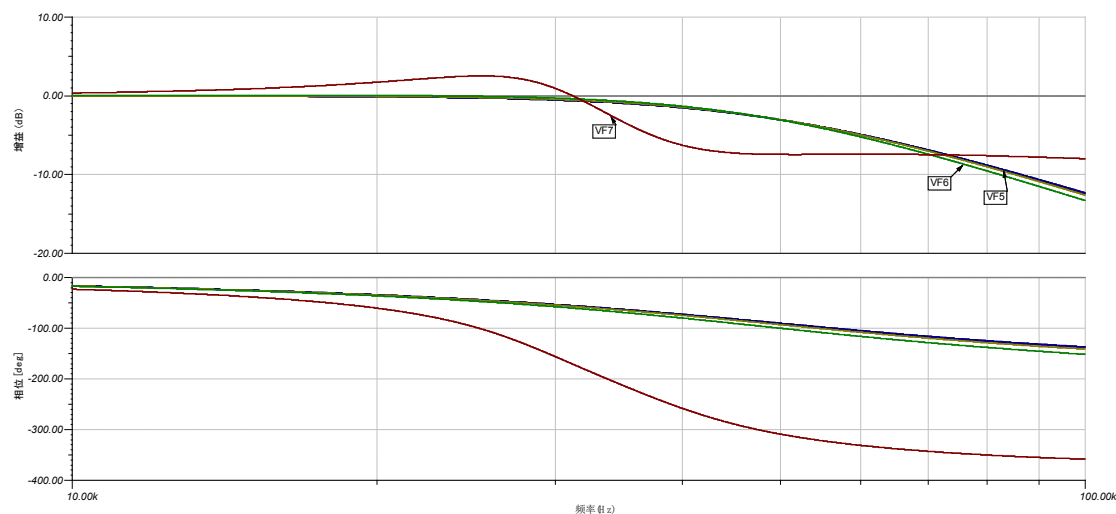


图 Section90-5 举例 1 仿真频率特性

单电源滤波器中的运放选择

对于单电源滤波器，在选择运放时，除一般性约束外，还需要考虑由于单电源供电的特殊性带来的约束。

单电源滤波器，一般工作在电池供电场合，其供电电压本身就偏低，一般为 1.5V 到 3.7V ，此时必须选择轨至轨运放。

所谓的轨至轨运放，英文为 Rail to Rail Op Amp。Rail 其实是电源电压，有正电源轨和负电源轨，就像火车轨道，是约束线。

轨至轨运放分为三种情况：

1) 输出轨至轨，RRO，是指该运放的最大输出电压可以非常接近于正电源轨，最小输出电压可以非常接近于负电源轨，相差一般在 100mV 以内，此称为输出至轨电压。比如一个非 RRO 运放，OP07，其输出特性如图 Section90-6 左侧所示，可看出，它的输出正至轨电压在负载很轻的情况下（负载电阻很大，输出电流很小）为 1V，输出负至轨电压为 2V，在 0V-5V 单电源供电情况下，输出信号只能在 2V-4V 这个范围内波动，这显然太小了。

而 RRO 运放，如右图的 AD8515，在轻负载情况下（1mA 输出电流），其输出至轨电压

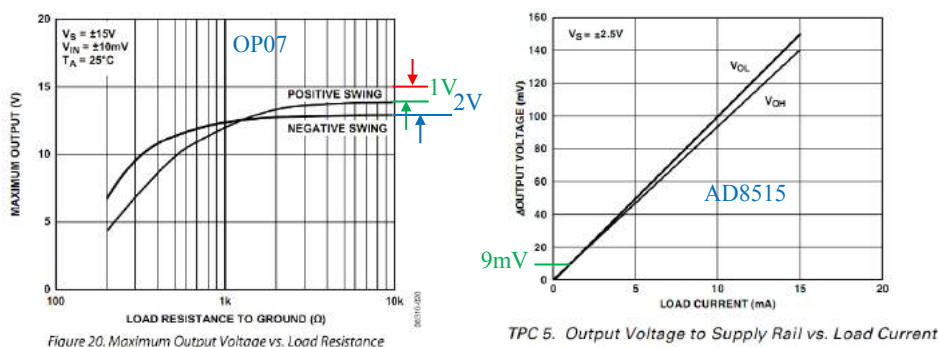


图 Section90-6 输出至轨电压

只有 9mV（正负差不多一样），同样在 0V-5V 单电源供电情况下，输出信号能在 9mV-4.991V 这个范围内波动，这显然足够了。

2) 输入轨至轨，RRI，是指该运放的输入电压范围可以接近电源轨，甚至超过电源轨。

3) 输入输出轨至轨，RRIO，是指该运放兼备 RRI 和 RRO 特性。

对 SK 型滤波器，一般要求最好是 RRIO 运放。对 MFB 型滤波器，则一般只要求 RRO 运放。别小看这一点区别，多这么一项要求，可选择的运放范围就会大幅度减少。

单电源运放

有些运放，在数据手册中明确标注：Single-Supply Operation，单电源工作。于是有些人将运放分为单电源运放和双电源运放。前面我们讲的单电源滤波器，似乎只能选择标注有 Single-Supply 的“单电源运放”，这是错误的。

其实运放本身，没有接地脚，它只负责在正负电源之间存在一定压差的情况下努力工作，压根就不考虑你用的是 0V-5V，还是 $\pm 2.5V$ ，或者说它根本不知道你怎么使用的电源。因此，从理论上讲，根本不存在单电源运放和双电源运放的区别。

之所以说单电源运放，是因为这类运放一般都具有较低的最小工作电压、具有输入输出轨至轨特性，也许还有低功耗特性，特别适合于工作在单电源电池供电的场合，而已。

4.4. 运放组成的高通滤波器

运放组成的高通滤波器，在很多情况下，是运放组成的低通滤波器的“镜像”。一般来说，有某种结构的低通滤波器，就有与之类似的高通滤波器。

但是，它们之间又不是完全“镜像”的。依赖镜像，可以让我们轻松实现“创新”，比如有人发明了 MFB 型低通滤波器，我们就可以照猫画虎发明出 MFB 型高通滤波器——仅仅是将电阻电容对调。但是更有价值的是：如果镜像失败，我们会怎么思考？这才是决定学习成效的关键。

Section91. 4 元件二阶 SK 型高通滤波器

在标准 SK 型拓扑的基础上，将低通滤波器（图 Section84-1 和-2）中的电阻和电容位置互换，就得到了 SK 型二阶高通滤波器，如图 Section91-1 所示。

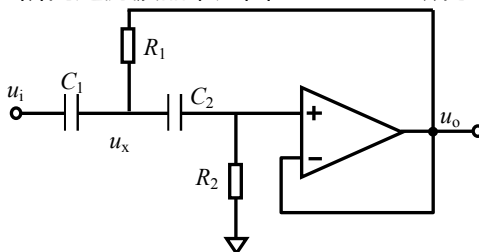


图 Section91-1 SK 型单位增益高通滤波器

回顾式(Section84-1)

$$A(S) = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4} \quad (\text{Section84-1})$$

针对图 Section91-1 具体电路， $Z_4 = R_1$ ， $Z_3 = R_2$ ， $Z_2 = 1/SC_2$ ， $Z_1 = 1/SC_1$ ，代入得：

$$A(S) = \frac{1}{\frac{1}{S^2 R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{1}{SR_2 C_1} + \frac{1}{SR_2 C_2} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{S} \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{S^2} \times \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

转换到频域：

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{(j\omega)^2} \times \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ &= \frac{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + j\omega R_1 R_2 C_1 C_2 \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \end{aligned} \quad (\text{Section91-1})$$

已知阻容参数求滤波器参数——滤波器分析

对比高通滤波器的归一化标准式：

$$A(j\Omega) = A_m \frac{(j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

可得如下关系：

$$A_m = 1$$

(Section91-2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

(Section91-3)

为了解得 Q 值，在式(Section91-1)的分母第二项中乘以 ω_0/ω_0 ，得：

$$\begin{aligned} \dot{A}(j\omega) &= \frac{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} R_1 R_2 C_1 C_2 \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \\ &= \frac{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2} \left(\frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1 C_2} \right) + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \end{aligned}$$

因此，得：

$$Q = \frac{R_2 C_1 C_2}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2} \times (C_1 + C_2)} = \frac{\sqrt{R_2 C_1 C_2}}{\sqrt{R_1} \times (C_1 + C_2)} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \times \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}$$

(Section91-4)

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计

从上式可以看出，滤波器只有两个设计目标，即 f_0 和 Q ，因此对 2 个电容，2 个电阻共 4 个未知量，可以先确定两个电容，然后求解两个电阻即可。

从 Q 的表达式可以看出，如果假设两个电容相同，仍可以通过选择两个电阻，实现任意的 Q 值，因此为简化，我们假设两个电容相等为 C 。

由式(Section91-3)得：

$$R_1 R_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2} \quad (1)$$

由式(Section91-4)得：

$$\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \times \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2} = 0.5 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = Q$$

即：

$$\frac{R_2}{R_1} = 4Q^2 \rightarrow R_2 = 4Q^2 R_1 \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)，得：

$$\begin{aligned} R_1^2 \times 4Q^2 &= \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2} \\ R_1 &= \frac{1}{4\pi f_0 C Q} \end{aligned}$$

(Section91-5)

根据式(2)，得：

$$R_2 = 4Q^2 \frac{1}{4\pi f_0 C Q} = \frac{Q}{\pi f_0 C} \quad (Section91-6)$$

因此，对 4 元件 SK 型二阶高通滤波器，在已知 f_0 、 Q 的情况下，按照下述步骤设计：

- 1) 根据表格 Section84-1 选择 $C_1=C_2=C$ 。
- 2) 根据式(Section91-5)，计算 R_1 。
- 3) 根据式(Section91-6)，计算 R_2 。

举例 1：

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求，中频增益为 1 倍，截止频率为 1kHz， $Q=1.2$ 。
并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：由于增益为 1，可以确定电路结构为 4 元件 SK 型二阶高通滤波器。

- 1) 准备工作，根据 $Q=1.2$ ，利用式(Section81-9)，求得 $K=0.7358$ ，根据截止频率 1kHz，换算出特征频率为 1359Hz。
 - 2) 选择两个电容相等，均为 100nF。
 - 3) 利用式(Section91-5)，计算 $R_1=488\Omega$ 。按照 E96 系列取 487 Ω 。
 - 4) 利用式(Section91-6)，计算 $R_2=2811\Omega$ 。按照 E96 系列，取 2.80k Ω 。
- 仿真电路如图 Section91-2，仿真结果如下：

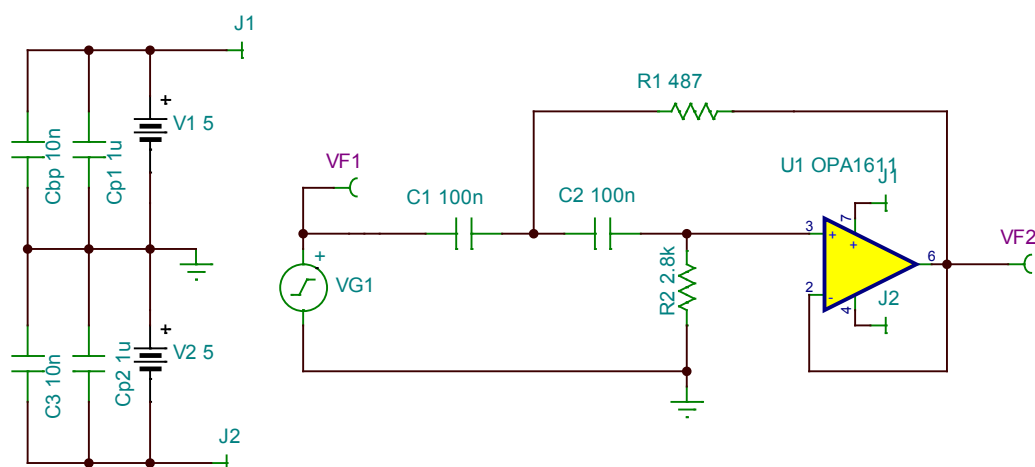


图 Section91-2 举例 1 电路

实测 1kHz 处增益为-3.07dB，换算为 0.702 倍，与设计要求的 0.707 倍基本吻合。

实测 90 度相移发生在 1.36kHz，与特征频率要求的 1359Hz 基本吻合。在 1.36kHz 处，实测增益为 1.56dB，换算为 1.197 倍，与设计要求的 1.2 倍基本吻合。

Section92. 6 元件二阶 SK 型高通滤波器

电路如图 Section92-1。它可以实现任意的 Q 值，任意的增益 A_m 。

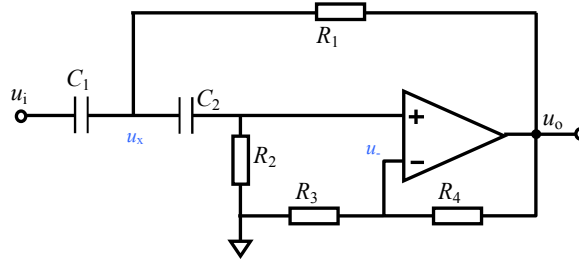


图 Section92-1 6 元件 SK 型二阶高通滤波器

设：

$$A_m = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

(Section92-1)

中间变量 u_x 与输出的关系为：

$$U_x \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{SC_2}} \times A_m = U_x \frac{SC_2 R_2}{1 + SC_2 R_2} \times A_m = U_o, \text{ 即 } U_x = U_o \times \frac{1 + SC_2 R_2}{A_m SC_2 R_2}$$

(1)

KCL 方程为：

$$\frac{U_i - U_x}{\frac{1}{SC_1}} = \frac{U_x - U_o}{R_1} + \frac{U_o}{A_m R_2}$$

(2)

将式(1)代入式(2)，整理得：

$$\begin{aligned} \frac{U_i - U_o \times \frac{1 + SC_2 R_2}{A_m SC_2 R_2}}{\frac{1}{SC_1}} &= \frac{U_o \times \frac{1 + SC_2 R_2}{A_m SC_2 R_2} - U_o}{R_1} + \frac{U_o}{A_m R_2} \\ U_i &= U_o \times \frac{1 + SC_2 R_2}{A_m SC_2 R_2} + \frac{U_o \times \frac{1 + SC_2 R_2 - A_m SC_2 R_2}{A_m SC_2 R_2}}{SC_1 R_1} + \frac{U_o}{SC_1 A_m R_2} \\ U_i &= \frac{1}{A_m} U_o \left(1 + \frac{1 + SC_2 R_2 - A_m SC_2 R_2}{S^2 C_1 R_1 C_2 R_2} + \frac{1}{SC_2 R_2} + \frac{1}{SC_1 R_2} \right) \\ &= \frac{1}{A_m} U_o \left(1 + \frac{1}{S^2 C_1 R_1 C_2 R_2} + \frac{1}{S} \left(\frac{1 - A_m}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right) \\ A(S) = \frac{U_o}{U_i} &= A_m \times \frac{1}{1 + \frac{1}{S} \left(\frac{1 - A_m}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) + \frac{1}{S^2 C_1 R_1 C_2 R_2}} \\ &= A_m \times \frac{1}{1 + \frac{1}{S} \left(\frac{(1 - A_m) R_2 C_2 + R_1 C_2 + R_1 C_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) + \frac{1}{S^2 R_1 R_2 C_1 C_2}} \end{aligned}$$

转换到频域：

$$\begin{aligned}\dot{A}(j\omega) &= A_m \times \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{(1-A_m)R_2C_2 + R_1C_2 + R_1C_1}{R_1R_2C_1C_2} \right) + \frac{1}{(j\omega)^2 R_1R_2C_1C_2}} \\ &= A_m \times \frac{(j\omega)^2 R_1R_2C_1C_2}{1 + j\omega((1-A_m)R_2C_2 + R_1C_2 + R_1C_1) + (j\omega)^2 R_1R_2C_1C_2}\end{aligned}$$

[Section92-2]

已知阻容参数求滤波器参数——滤波器分析

对比高通滤波器的归一化标准式：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{(j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

可得如下关系：

$$A_m = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

[Section92-3]

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}$$

[Section92-4]

为了解得 Q 值，在式(Section91-1)的分母第二项中乘以 ω_0/ω_0 ，得：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{(j\omega)^2 R_1R_2C_1C_2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{(1-A_m)R_2C_2 + R_1C_2 + R_1C_1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}} + (j\omega)^2 R_1R_2C_1C_2}$$

因此，得：

$$Q = \frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{(1-A_m)R_2C_2 + R_1C_2 + R_1C_1}$$

[Section92-5]

与 4 元件电路类似，可设 $C_1 = C_2 = C$ ，由此分析和设计都将简化：

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_1R_2}}$$

[Section92-4a]

$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{(1-A_m)R_2 + 2R_1}$$

[Section92-5a]

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计

根据式(Section92-4a)，得：

$$R_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2 R_2}$$

(3)

根据式(Section92-5a)，得：

$$(1-A_m)R_2 + 2R_1 = \frac{1}{2\pi f_0 C Q}$$

(4)

将式(3)代入式(4)，得

$$(1 - A_m)R_2 + \frac{1}{2\pi^2 f_0^2 C^2 R_2} = \frac{1}{2\pi f_0 C Q}$$

$$\begin{aligned} (1 - A_m)2\pi^2 f_0^2 C^2 R_2^2 - \frac{\pi f_0 C}{Q} R_2 + 1 &= 0 \\ R_2 &= \frac{\frac{\pi f_0 C}{Q} \pm \sqrt{(\frac{\pi f_0 C}{Q})^2 - 8(1 - A_m)\pi^2 f_0^2 C^2}}{2(1 - A_m)2\pi^2 f_0^2 C^2} = \frac{\frac{\pi f_0 C}{Q} \pm \frac{\pi f_0 C}{Q} \sqrt{1 - 8(1 - A_m)Q^2}}{2(1 - A_m)2\pi^2 f_0^2 C^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8(A_m - 1)Q^2}}{4(1 - A_m)Q\pi f_0 C} \end{aligned}$$

因为 A_m 大于1, 分母一定为负数。上式为了得到电阻 R_2 为正值, 根号前只能取负号。

$$R_2 = \frac{\sqrt{1 + 8(A_m - 1)Q^2} - 1}{4(A_m - 1)Q\pi f_0 C}$$

[Section92-6]

$$R_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2 R_2} = \frac{(A_m - 1)Q}{\pi f_0 C (\sqrt{1 + 8(A_m - 1)Q^2} - 1)}$$

[Section92-7]

因此, 对 6 元件 SK 型二阶高通滤波器, 在已知 f_0 , Q , A_m 的情况下, 按照下述步骤设计:

- 1) 根据表格 Section84-1 选择 $C_1=C_2=C$ 。
- 2) 根据式[Section92-6], 式[Section92-7]计算 R_2 , R_1 。
- 3) 根据一般规则选择电阻 R_3 。
- 4) 根据式[Section92-1], 计算 R_4 。

举例 1:

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求, 中频增益为 10 倍, 截止频率为 1kHz, $Q=0.58$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解: 因中频增益 A_m 为 10 倍, 选用 6 元件电路合适, 确定电路结构如图 Section92-1, 其中两个电容相等。

先做准备工作, 根据 Q 和截止频率, 确定特征频率, 据式[Section81-9], 求得:

$$\begin{aligned} K = \frac{f_c}{f_0} &= \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}} = 1.2642 \\ f_0 &= \frac{f_c}{K} = \frac{1000}{1.2642} = 791\text{Hz} \end{aligned}$$

- 1) 根据表格 Section84-1 选择 $C_1=C_2=C=100\text{nF}$ 。
- 2) 根据式[Section92-6]计算得 $R_2=775\Omega$, 按照 E96 系列, 取 $R_2=768\Omega$, 据式[Section92-7]计算得 $R_1=5223\Omega$, 按照 E96 系列, 取 $R_1=5.23\text{k}\Omega$ 。
- 3) 本例选择运放为 OPA1641 (TINA-TI 中只有 OPA1641 的双运放版 OPA1642), 其偏置电流仅为 20pA, 一般无需考虑外部电阻的匹配。按照常规, 尽量让电阻小, 且不要太小。选择电阻 $R_3=100\Omega\sim 1\text{k}\Omega$ 即可。本例选择 $R_3=1\text{k}\Omega$ 。
- 4) 根据式[Section92-1]计算得 $R_4=9\text{k}\Omega$, 按照 E96 系列, 取 $R_4=9.09\text{k}\Omega$ 。由此, 得到仿真电路如图 Section92-2。对此电路的仿真结果如图 Section92-3。仿真实测表明, 电路基

本满足设计要求。

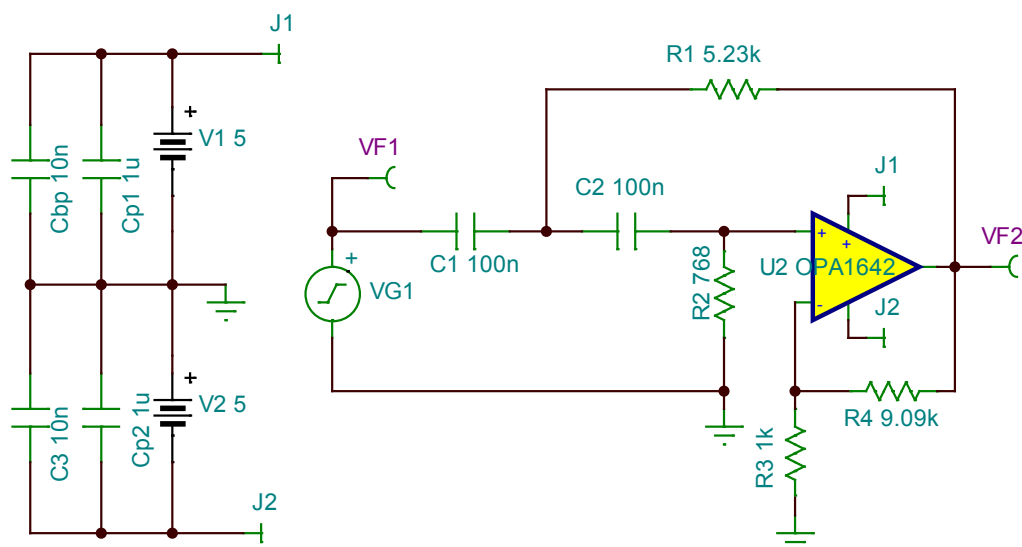


图 Section92-2 举例 1 电路

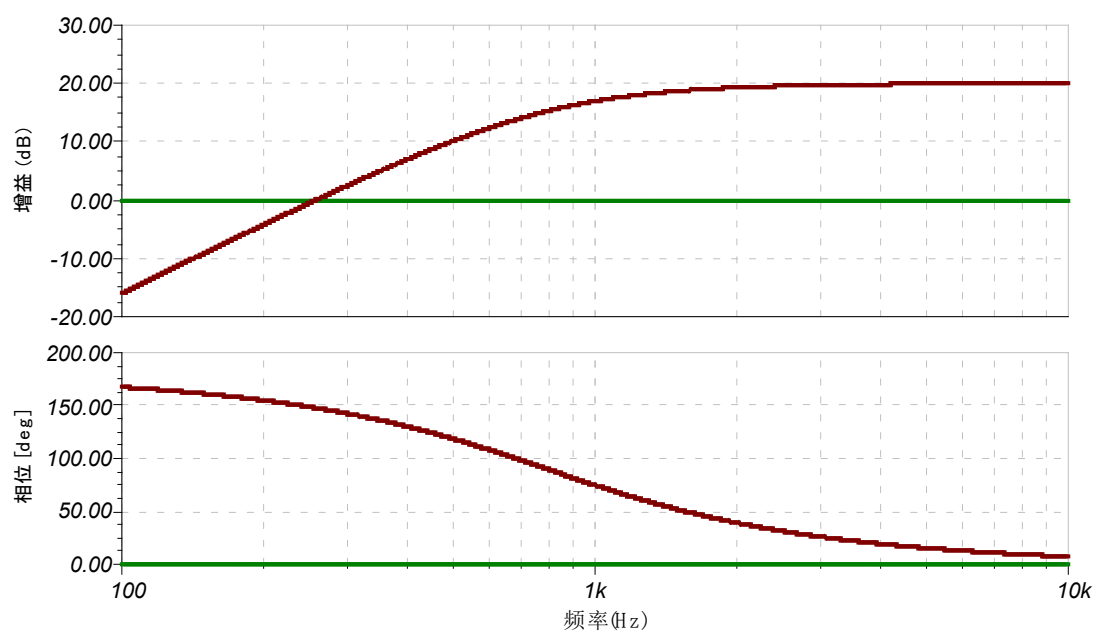


图 Section92-3 举例 1 电路的频率特性 TINA-TI 仿真

Section93. 易用型二阶 SK 型高通滤波器

与低通滤波器类似，SK 型高通也有易用型电路。

4 元件等阻容型

电路如图 Section93-1 所示。4 元件电路频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + j\omega R_1 R_2 C_1 C_2 \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (\text{Section91-1})$$

将阻容相等条件代入，可得：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + j\omega 2RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} = \frac{\left(j \frac{\omega}{1}\right)^2 \frac{1}{RC}}{1 + j \frac{\omega}{1} \times \frac{1}{0.5} + \left(j \frac{\omega}{1}\right)^2 \frac{1}{RC}} = \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{1}{Q} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

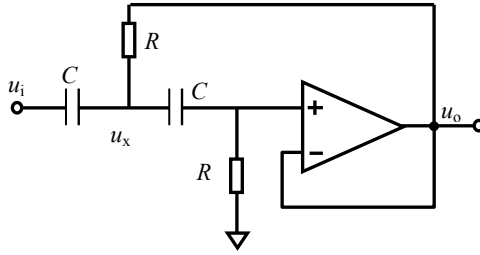


图 Section93-1 SK 型 4 元件等阻容型

可知：

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{RC} \\ f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \end{cases}$$

(Section93-1)

$$Q = 0.5$$

可知此电路的 Q 值为 0.5，属于贝塞尔型高通滤波器。

利用式(Section81-9)关于特征频率与截止频率的关系：

$$K = \frac{f_c}{f_0} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}} = 1.5538$$

(Section81-9)

可知：

$$f_c = K f_0 = 1.5538 f_0 = \frac{1.5538}{2\pi RC}$$

(Section93-2)

4 元件巴特沃斯型

根据 4 元件分析结论，式[Section91-4]，要实现巴特沃斯型，必须使得 $Q=0.7071$ 。

$$Q = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \times \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}$$

[Section91-4]

在两个电容相等情况下，将 $R_2=2R_1$ ，代入得：

$$Q = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 0.7071$$

因此，4 元件巴特沃斯型电路如图 Section93-2 所示。

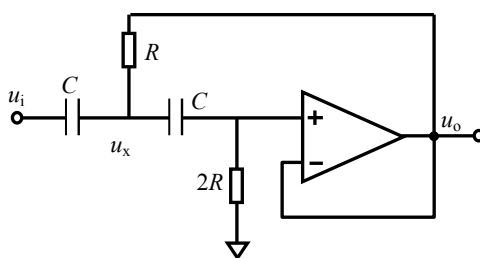


图 Section93-2 SK 型 4 元件巴特沃斯型

此时，根据 4 元件标准表达式[Section91-1]，电路的频域表达式演变为：

$$\begin{aligned} \dot{A}(j\omega) &= \frac{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + j\omega R_1 R_2 C_1 C_2 \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{(j\omega)^2 2R^2 C^2}{1 + j\omega 2RC + (j\omega)^2 2R^2 C^2} \\ &= \frac{(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{1}{\sqrt{2} \times 0.5} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{1}{Q} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned}$$

据此可知：

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \times RC} \\ f_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \times 2\pi RC} \\ Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

[Section93-3]

同时，可知截止频率等于特征频率，则有：

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{RC} ; f_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section93-4]

6 元件易用型

与低通滤波器类似，高通滤波器也可以形成 6 元件易用型，电路如图 Section93-3 所示。

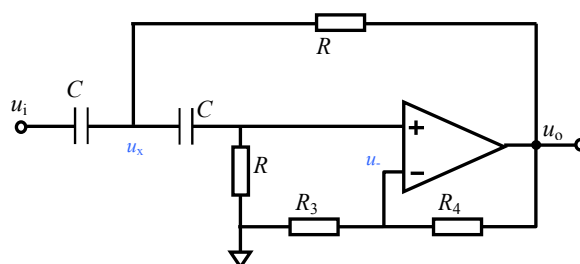


图 Section93-3 SK 型高通 6 元件易用型

6 元件二阶高通的标准频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + j\omega((1 - A_m)R_2 C_2 + R_1 C_2 + R_1 C_1) + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

令两个电容相等，两个电阻也相等，得到新的频域表达式为：

$$\begin{aligned} \dot{A}(j\omega) &= A_m \times \frac{(j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + j\omega(3 - A_m)RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} = A_m \times \frac{(j \frac{\omega}{1})^2}{1 + j \frac{\omega}{1} \times (3 - A_m) + (j \frac{\omega}{1})^2} \\ &= \frac{(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{1}{Q} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned}$$

据此可知，

$$Q = \frac{1}{3 - A_m}$$

[Section93-5]

即要实现不同的 Q 值，只需要设定不同的 A_m 即可实现。而电路的特征频率为：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section93-6]

这个电路唯一的缺点是，品质因数 Q 与中频增益互相影响，且有：

$$A_m = 3 - \frac{1}{Q} < 3$$

[Section93-7]

举例 1：

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求，中频增益为 10 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.7071$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：确定电路结构为 6 元件 SK 型二阶高通滤波器。

- 1) 准备工作，根据 $Q=0.7071$ ，利用式(Section81-9)，求得 $f_0=f_c=1\text{kHz}$ 。
- 2) 选择两个电容相等，均为 100nF。
- 3) 利用式(Section92-6)和式(Section92-7)，计算 R_2, R_1 。

$$R_2 = \frac{\sqrt{1 + 8(A_m - 1)Q^2} - 1}{4(A_m - 1)Q\pi f_0 C} = 635.57\Omega$$

$$R_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_c^2 R_2 C^2} = \frac{1}{4\pi^2 \times 10^6 \times 635.57 \times 10^{-14}} = 3985.495\Omega$$

取 E96 系列最接近值, $R_2=634\Omega$, $R_2=4.02k\Omega$ 。

4) 利用式(Section92-1), 计算 R_3 , R_4 。

取 $R_3=1k\Omega$, $R_4=9.09k\Omega$ 。

仿真电路如图 Section93-4 所示。仿真实验结果如图 Section93-5 所示。中频电压增益为 20.07dB, 1kHz 时, 增益为 17.02dB, 相移为 89.73° , 与理论结果较为吻合。

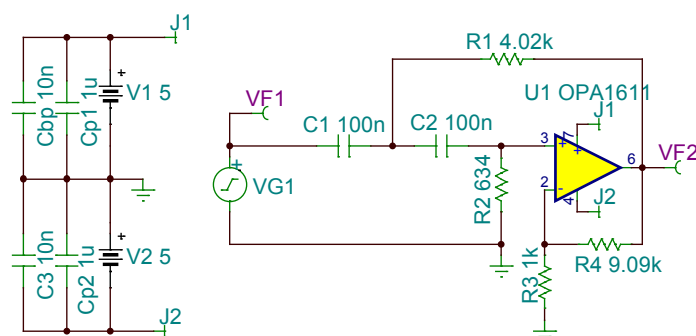


图 Section93-4 举例 1 仿真电路

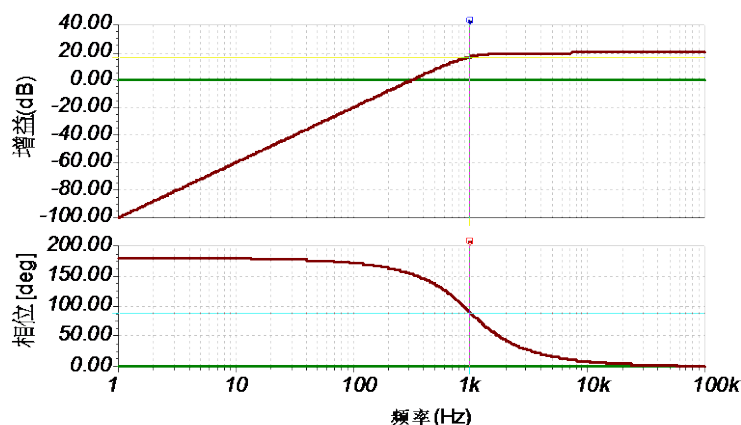


图 Section93-5 举例 1 仿真频率特性

举例 2 :

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求, 中频增益为 10 倍, 截止频率为 1kHz, $Q=0.5$ 。用两种方法实现同样的要求, 并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解: 初步确定两种方法为: 1) 第一级用一个 4 元件等阻容型高通 SK 滤波器, 实现增益为 1, $Q=0.5$, 第二级用一个 10 倍增益电路。2) 用一个 10 倍增益的 6 元件 SK 高通滤波器。

方法一: 先求解特征频率, 根据式(Section81-9)得:

$$K = \frac{f_c}{f_0} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}} = 1.5538$$

则有:

$$f_0 = \frac{f_c}{K} = 643.6\text{Hz}$$

采用 4 元件等阻容型高通 SK 型滤波器电路如图 Section93-6 所示，选择电容为 100nF，根据式(Section93-1)可得：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.28 \times 643.6 \times 100 \times 10^{-9}} = 2474\Omega$$

取 E96 系列电阻（本书表 Section84-2），为 2.49kΩ。后级 10 倍增益电路相对简单，R7 取 1kΩ，增益电阻 R4 取 9.09kΩ。运放采用带宽为 40MHz 的超低噪声、超低失真音频运放 OPA1611，供电为±5V，形成图 Section93-6 电路。

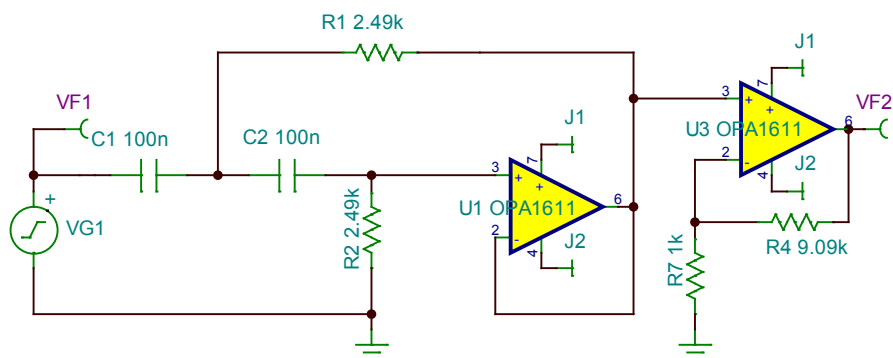


图 Section93-6 举例 2 方法一电路

仿真实验得到的频率特性如图 Section93-7 所示。图中上边曲线为幅频特性，下边为相频特性。仿真验证的次序为：

- 1) 先确定中频增益，即仿真图中频率最大点的增益，为 20.08dB，与设计要求 10 倍(20dB)基本吻合。
- 2) 在幅频特性图中使用标尺，找到增益为 20.08-3.01=17.07dB 的频率点，为 993.7Hz，这就是实测的下限截止频率，与设计要求 1kHz 有点差别，但不大，约为 0.63%。误差来源主要是 E96 系列电阻最大存在 1%的误差。
- 3) 在相频特性图中使用标尺，找到相移为 90°的频率点，为 639.1Hz，这就是实测的特征频率，与设计中计算出的 643.6Hz 存在 0.70%的误差，这也源自 E96 系列电阻误差。

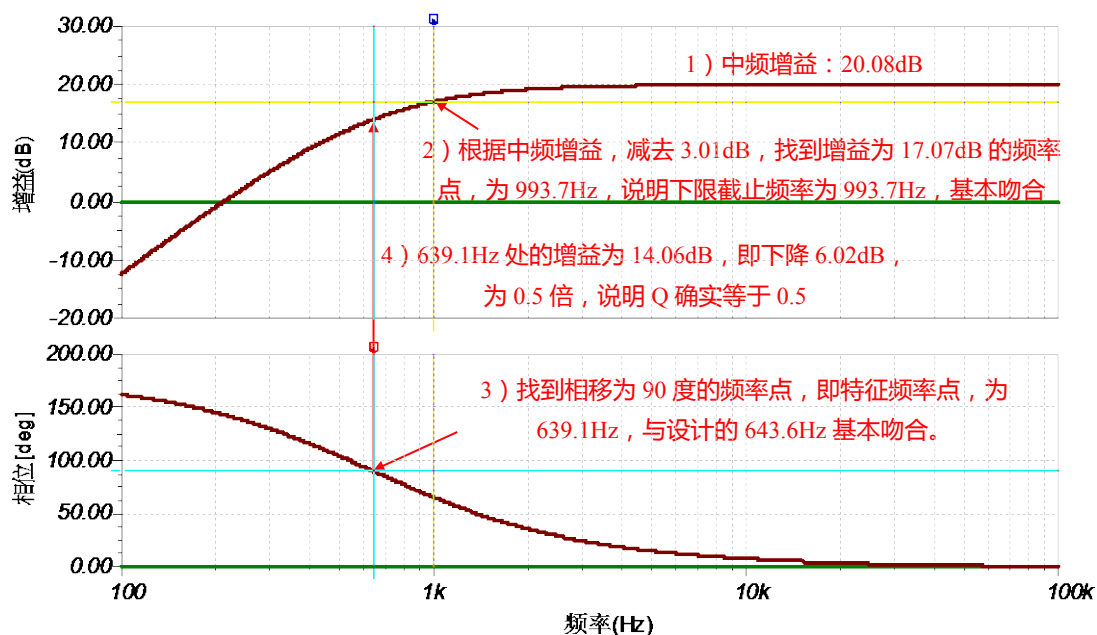


图 Section93-7 举例 2 方法一电路的频率特性

4) 回到幅频特性图中,再使用标尺,测量频率为 639.1Hz 处的增益,为 14.06dB,与中频增益存在 6.02dB 的差值,恰好就是 0.5 倍的意思。根据 Q 值定义为特征频率处的增益,可知此电路的 Q 值为 0.5,与设计值完全吻合。

方法二：采用一个运放组成 6 元件 SK 型高通滤波器,电路结构如图 Section92-1。

1) 已知 $Q=0.5$, 根据式(Section81-9), 计算得：

$$f_0 = \frac{f_c}{K} = 643.6\text{Hz}$$

2) 选择两个电容均为 100nF；其实也可以选择其它值,选择后计算出电阻,如果电阻太大,可以增大电容,电阻太小,就需要减小电容。

3) 根据式(Section92-6)和式(Section92-7), 取 $A_m=10$, 得： $R_2=922.9\Omega$, $R_1=6626\Omega$, 取 E96 系列最接近值为： $R_2=931\Omega$, $R_1=6.65\text{k}\Omega$ 。计算出的电阻值不大不小正合适。

4) 根据 10 倍增益, 选择 $R_4=9.09\text{k}\Omega$, $R_3=1\text{k}\Omega$ 。

5) 运放选择带宽为 38MHz 的 CMOS 运放 OPA350 (其实也可以选择方法一的 OPA1611), 供电电压 $\pm 2.5\text{V}$ 。形成如图 Section93-8 所示的电路。

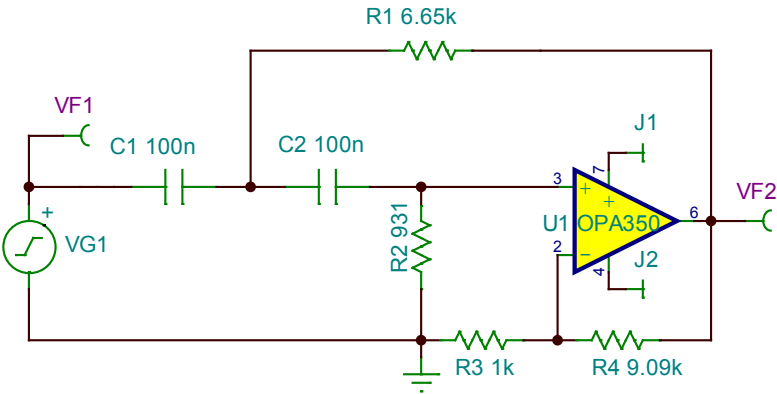


图 Section93-8 举例 2 方法二电路

仿真结果测量方法和方法一相同,结果列于表 Section93-1 中。

表 Section93-1 方法二测量结果

	中频增益	下限截止频率	特征频率	Q 值
理论值	10 倍	1000Hz	643.6Hz	0.5
测量方法	100kHz 处增益	17.06dB 处的频率	90°处的频率	实测特征频率点处的增益
测量数据	20.07dB	953.73Hz	639.33	14.3dB
换算实测值	10.08	953.73Hz	639.33	0.5146
误差	0.80%	-4.6%	-0.66%	2.9%

从测量结果看,方法二存在比较大的误差,最大达到-4.6%,这与方法一差距很大。究其原因,主要在于增益设置上。从传函上分析,方法一的设置,都是在 $A_m=1$ 下进行的,后级电路即便存在电阻误差,也仅仅影响单纯的增益;而方法二中,所有设置,都经过 $A_m=10$ 下进行的,这些设置的误差,其实都会被放大 10 倍影响幅频特性和相频特性。因此,前级电阻电容出现的 1%误差,就有可能造成最终结果出现 10%的误差。

因此,从频率特性准确性上分析,方法一具有更好的稳定性。

举例 3：

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求，中频增益为 0.5 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.707$ 。并用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：先实现截止频率 1kHz， $Q=0.707$ ，增益为 1 倍的高通滤波器，再串联一级 0.5 倍衰减器。而滤波器采用 4 元件易用型巴特沃斯实现。

准备工作：根据截止频率确定特征频率。因 $Q=0.707$ ，可知 $f_0 = f_c = 1\text{kHz}$ 。

确定 $C=100\text{nF}$ ，根据式[Section93-3]，解得：

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\pi f_0 C} = 1125.4\Omega$$

根据 4 元件巴特沃斯型电路结构，此电阻应放置在 R_1 位置，而 R_2 用两倍电阻实现。因此，在 E96 系列中选取 $R_1=1.13\text{k}\Omega$ ， $R_2=2.26\text{k}\Omega$ ，形成如图 Section93-10 所示，其仿真频率特性如图 Section93-11 所示。

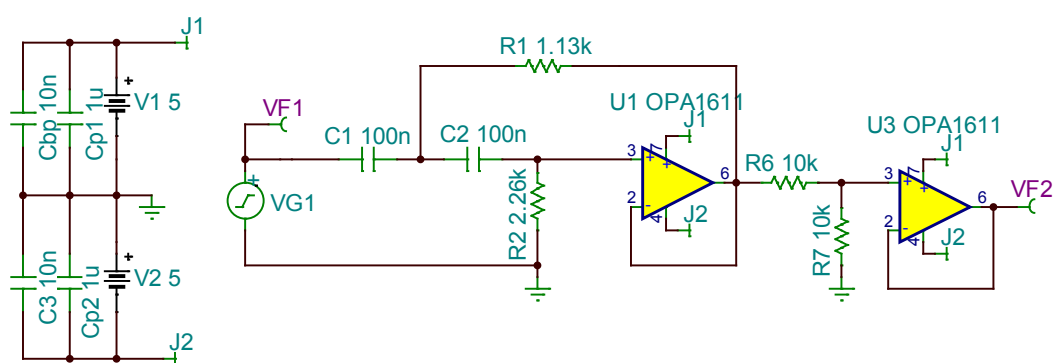


图 Section93-10 举例 3 方案一

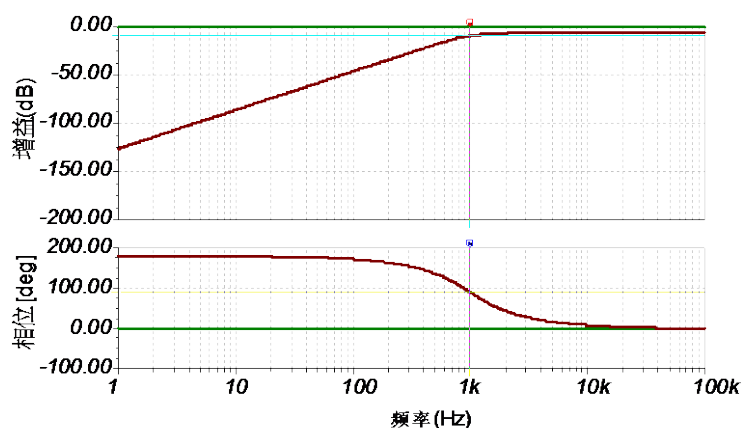


图 Section93-11 举例 3 方案一仿真频率特性

电路中实现 0.5 倍衰减，采用了两个 $10\text{k}\Omega$ 电阻分压加跟随器方式，也可以采用反相比例器实现——如果设计要求中对反相不在意的话。

从结果看，这个电路实现了设计要求，但是采用了 2 个运放。这有点不划算。而下一节介绍的 MFB 型高通滤波器，仅用一个运放就可以实现。

Section94. MFB 型高通滤波器

MFB 型高通滤波器，是在 MFB 型低通滤波器基础上，将所有的电阻、电容互换得到的。毕竟，高通是低通的镜像，这个互换是有道理的。电路如图 Section94-1 所示。

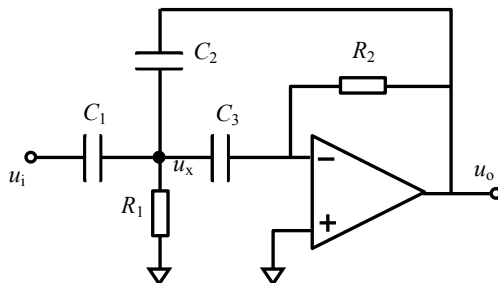


图 Section94-1 MFB 型高通滤波器

传函推导

这次，我们不再使用节点电压法，而试着用本书第三章讲述的负反馈方框图法求解传函，看是否能得出正确的结论。

首先重温负反馈方框图法。其核心是求解出两个系数：反馈系数 \dot{F} 和衰减系数 \dot{M} 。当然，这些系数都得使用复频域表达式（用 S ），或者频域表达式（用 $j\omega$ ）。然后，总的电压增益为：

$$\dot{A} = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \frac{\dot{M}}{\dot{F}}$$

所谓的反馈系数，是指仅有输出端电压存在的情况下：

$$\dot{F} = \frac{\dot{U}_- - \dot{U}_+}{\dot{U}_o}$$

从图中可以看出，它有两个反馈支路：从 C_2 顶端加载时， R_2 右端从输出断开接地；从 R_2 右端加载时， C_2 顶端从输出断开接地。它可以使用叠加原理，分成 \dot{F}_1 和 \dot{F}_2 。

而衰减系数，是指仅有输入电压存在的情况下：

$$\dot{M} = \frac{\dot{U}_+ - \dot{U}_-}{\dot{U}_i}$$

根据前述描述，以复频域表达式写出几个系数如下：

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\frac{1}{SC_3} + \frac{\frac{R_1}{S(C_1 + C_2)}}{R_1 + \frac{1}{S(C_1 + C_2)}}}{R_2 + \frac{1}{SC_3} + \frac{\frac{R_1}{S(C_1 + C_2)}}{R_1 + \frac{1}{S(C_1 + C_2)}}} = \frac{\frac{1}{SC_3} + \frac{R_1}{SR_1(C_1 + C_2) + 1}}{R_2 + \frac{1}{SC_3} + \frac{R_1}{SR_1(C_1 + C_2) + 1}} \\ &= \frac{SR_1(C_1 + C_2) + 1 + SR_1C_3}{SR_1(C_1 + C_2) + 1 + SR_1C_3 + (SR_1(C_1 + C_2) + 1)SR_2C_3} \\ &= \frac{1 + SR_1(C_1 + C_2 + C_3) + SR_2C_3 + S^2R_1R_2C_3(C_1 + C_2)}{1 + SR_1(C_1 + C_2 + C_3) + SR_2C_3 + S^2R_1R_2C_3(C_1 + C_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{\frac{\frac{1}{SC_1} \times R_1 \times \frac{1+SR_2C_3}{SC_3}}{\frac{R_1}{SC_1} + \frac{1+SR_2C_3}{S^2C_1C_3} + \frac{R_1+SR_1R_2C_3}{SC_3}}}{\frac{1}{SC_2} + \frac{\frac{1}{SC_1} \times R_1 \times \frac{1+SR_2C_3}{SC_3}}{\frac{R_1}{SC_1} + \frac{1+SR_2C_3}{S^2C_1C_3} + \frac{R_1+SR_1R_2C_3}{SC_3}}} \times \frac{SR_2C_3}{1+SR_2C_3} \\
 &= \frac{\frac{R_1+SR_1R_2C_3}{\frac{SR_1C_3+1+SR_2C_3+SR_1C_1+S^2R_1R_2C_1C_3}{R_1+SR_1R_2C_3}}}{\frac{1}{SC_2} + \frac{R_1+SR_1R_2C_3}{SR_1C_3+1+SR_2C_3+SR_1C_1+S^2R_1R_2C_1C_3}} \times \frac{SR_2C_3}{1+SR_2C_3} \\
 &= \frac{SR_1C_3+1+SR_2C_3+SR_1C_1+S^2R_1R_2C_1C_3+SR_1C_2+S^2R_1R_2C_2C_3}{\frac{SR_2C_3}{1+SR_2C_3}} \\
 &= \frac{S^2R_1R_2C_2C_3}{\frac{SR_1C_3+1+SR_2C_3+SR_1C_1+S^2R_1R_2C_1C_3+SR_1C_2+S^2R_1R_2C_2C_3}{S^2R_1R_2C_2C_3}} \\
 &= \frac{1}{1+S(R_1C_3+R_2C_3+R_1C_1+R_1C_2)+S^2(R_1R_2C_1C_3+R_1R_2C_2C_3)} \\
 F = F_1 + F_2 &= \frac{1+SR_1(C_1+C_2+C_3)+S^2R_1R_2C_2C_3}{1+S(R_1C_3+R_2C_3+R_1C_1+R_1C_2)+S^2(R_1R_2C_1C_3+R_1R_2C_2C_3)}
 \end{aligned}$$

求解 M 的方法很简单，它和 F_2 的唯一区别是， C_1 和 C_2 互换位置，因此在 F_2 表达式中将两个电容互换位置即可。且它多了一个负号：

$$M = -\frac{S^2R_1R_2C_1C_3}{1+S(R_1C_3+R_2C_3+R_1C_1+R_1C_2)+S^2(R_1R_2C_1C_3+R_1R_2C_2C_3)}$$

根据负反馈理论，有：

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \frac{U_o}{U_i} = \frac{M}{F} = -\frac{S^2R_1R_2C_1C_3}{1+SR_1(C_1+C_2+C_3)+S^2R_1R_2C_2C_3} \\
 &= -\frac{C_1}{C_2} \times \frac{\frac{1}{C_2} + \frac{SR_1(C_1+C_2+C_3)}{C_2} + S^2R_1R_2C_3}{1} \\
 &= -\frac{C_1}{C_2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{S} \times \frac{C_1+C_2+C_3}{R_2C_2C_3} + \frac{1}{S^2} \times \frac{1}{R_1R_2C_2C_3}}
 \end{aligned}$$

转换到频域，表达式为：

$$\begin{aligned}
 A(j\omega) &= -\frac{C_1}{C_2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega} \times \frac{C_1+C_2+C_3}{R_2C_2C_3} + \frac{1}{(j\omega)^2} \times \frac{1}{R_1R_2C_2C_3}} \\
 &= -\frac{C_1}{C_2} \times \frac{(j\omega)^2 R_1R_2C_2C_3}{1 + j\omega \times R_1(C_1+C_2+C_3) + (j\omega)^2 R_1R_2C_2C_3} \\
 &= -\frac{C_1}{C_2} \times \frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \times \omega_0 R_1(C_1+C_2+C_3) + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}
 \end{aligned}$$

(Section94-1)

已知阻容参数求滤波器参数——滤波器分析

对比高通滤波器的归一化标准式：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{(j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

可得如下关系：

$$A_m = -\frac{C_1}{C_2}$$

[Section94-2]

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}}$$

[Section94-3]

$$Q = \frac{1}{\omega_0 R_1 (C_1 + C_2 + C_3)} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}}{R_1 (C_1 + C_2 + C_3)}$$

[Section94-4]

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计方法一

与 4 元件电路类似，可设电容为已知，且 $C_3 = C_2 = C$ ，由此分析和设计都将简化：

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_1 R_2}}$$

[Section94-3a]

$$Q = \frac{C\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 (C_1 + 2C)}$$

[Section94-4a]

根据式[Section94-3a]得：

$$R_1 R_2 = \frac{1}{4\pi^2 C^2 f_0^2}$$

[1]

根据式[Section94-2]得：

$$C_1 = -A_m C_2 = -A_m C$$

[Section94-5a]

根据式[Section94-4a]，且将式[2]代入得：

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C^2}{(C_1 + 2C)^2 Q^2} = \frac{C^2}{(2C - A_m C)^2 Q^2} = \frac{1}{(2 - A_m)^2 Q^2}$$

[2]

综合式[1]和式[2]，将两式相乘得：

$$R_1 = \frac{1}{2\pi C f_0 Q (2 - A_m)}$$

[Section94-6a]

将结果代入式[1]得：

$$R_2 = \frac{2\pi C f_0 Q (2 - A_m)}{4\pi^2 C^2 f_0^2} = \frac{Q (2 - A_m)}{2\pi C f_0}$$

[Section94-7a]

已知滤波器参数求电路中的电阻、电容——滤波器设计方法二

可设电容为已知，且 $C_3 = C_1 = C$

根据式[Section94-2]得：

$$C_2 = -\frac{C_1}{A_m} = -\frac{C}{A_m}$$

[Section94-5b]

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}}; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}} = \frac{1}{2\pi C \sqrt{-\frac{R_1 R_2}{A_m}}}$$

[Section94-3b]

$$Q = \frac{1}{\omega_0 R_1 (C_1 + C_2 + C_3)} = \frac{\sqrt{-\frac{R_1 R_2}{A_m}}}{R_1 (2 - \frac{1}{A_m})}$$

[Section94-4b]

据式[Section94-3b]，有：

$$R_1 R_2 = -\frac{A_m}{4\pi^2 C^2 f_0^2}$$

(3)

据式[Section94-4b]，有：

$$-\frac{R_2}{R_1 A_m} = (2 - \frac{1}{A_m})^2 Q^2$$

(4)

式(3)除以式(4)，得：

$$-R_1^2 A_m = -\frac{A_m}{4\pi^2 C^2 f_0^2 (2 - \frac{1}{A_m})^2 Q^2}$$

即：

$$R_1 = \frac{1}{2\pi C f_0 (2 - \frac{1}{A_m}) Q}$$

[Section94-6b]

将结果代入式(3)得：

$$R_2 = -\frac{A_m 2\pi C f_0 (2 - \frac{1}{A_m}) Q}{4\pi^2 C^2 f_0^2} = \frac{(1 - 2A_m) Q}{2\pi C f_0}$$

[Section94-7b]

优缺点

MFB 型二阶高通滤波器，可以用一只运放实现自由选择的中频增益，并且 Q 值是独立的。这是它最为明显的优点。

但是它的缺点也是明显的。

第一，它用电容实现增益控制，是极不明智的，这造成增益稳定性急剧下降。

第二，它只能实现反相输出。

举例 1：

设计一个二阶 MFB 型高通滤波器。要求，只能使用一只运放，滤波器的中频增益为-0.5 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.707$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：此题是 Section93 中举例 3。当时我们没有实现，学过 MFB 型后，就可以实现了。

1) 根据品质因数和截止频率换算特征频率，得 $f_0=1\text{kHz}$ 。

2) 按照方法一求解，选择 $C=C_2=C_3=100\text{nF}$ 。

3) 由式(Section94-5)，得：

$$C_1 = -A_m C_2 = -A_m C = 50\text{nF}$$

4) 由式(Section94-6)，得：

$$R_1 = \frac{1}{2\pi C f_0 Q (2 - A_m)} = 900.3\Omega$$

5) 由式(Section94-7)，得：

$$R_2 = \frac{Q(2 - A_m)}{2\pi C f_0} = 2813.5\Omega$$

按照 E96 系列，选择 $R_1=909\Omega$ ， $R_2=2.80\text{k}\Omega$ 。仿真电路如图 Section94-2 所示。

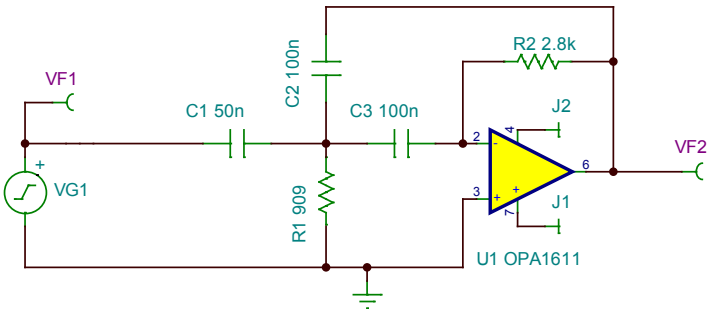


图 Section94-2 举例 1 MFB 型高通滤波器

仿真得到的频率特性如图 Section94-3 所示。按照 Section93 举例 2 所述的方法，得到测量结果如下表。

	中频增益	下限截止频率	特征频率	Q 值
理论值	0.5 倍	1000Hz	1000Hz	0.707
测量方法	100kHz 处增益	-9.02dB 处的频率	90°处的频率	实测特征频率点处的增益
测量数据	-6.01dB	1.01kHz	997.59	-9.09dB
换算实测值	0.5006	1.01kHz	997.59	0.7023
误差	0.12%	1%	-0.241%	-0.68%

结果表明，仿真结果与设计要求较为吻合。

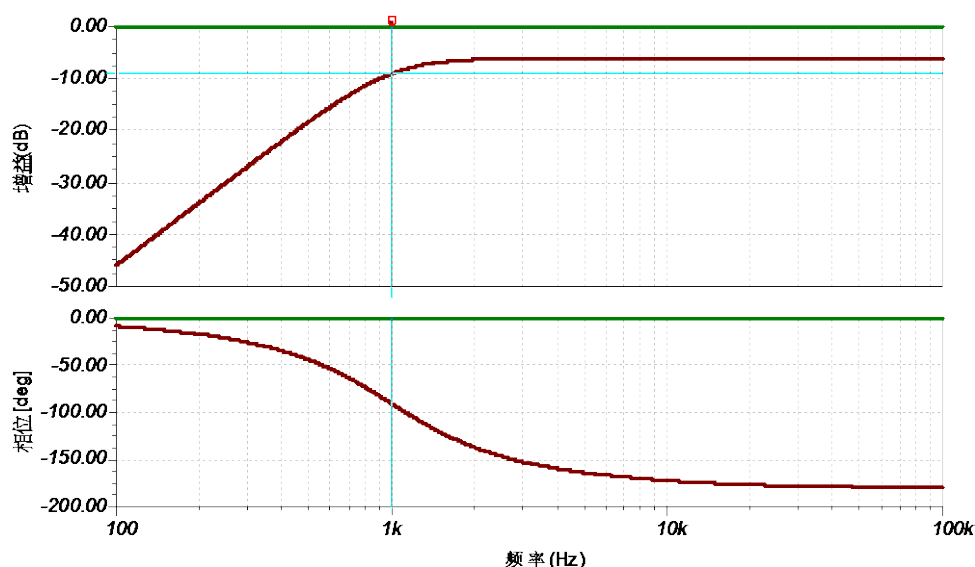


图 Section94-3 举例 1 的频率特性

举例 2：

设计一个二阶 MFB 型高通滤波器。要求，只能使用一只运放，滤波器的中频增益为-10 倍，截止频率为 1kHz， $Q=1.2$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：

- 1) 根据 Q ，据式(Section81-9)，解得 $K=0.7358$ ，即特征频率为 $f_0=1359\text{Hz}$ 。
- 2) 按照方法二求解，选择 $C=C_1=C_3=68\text{nF}$ 。
- 3) 由式(Section94-5b)，得：

$$C_2 = -\frac{C}{A_m} = 6.8\text{nF}$$

- 4) 由式(Section94-6b)，得：

$$R_1 = \frac{1}{2\pi C f_0 (2 - \frac{1}{A_m}) Q} = 683.4\Omega$$

- 5) 由式(Section94-7b)，得：

$$R_2 = \frac{(1 - 2A_m)Q}{2\pi C f_0} = 43400\Omega$$

按照 E96 系列， $R_1=681\Omega$ ， $R_2=43.2\text{k}\Omega$ ，运放选择 OPA1611，供电电压 $\pm 5\text{V}$ ，得电路如图 Section94-4。

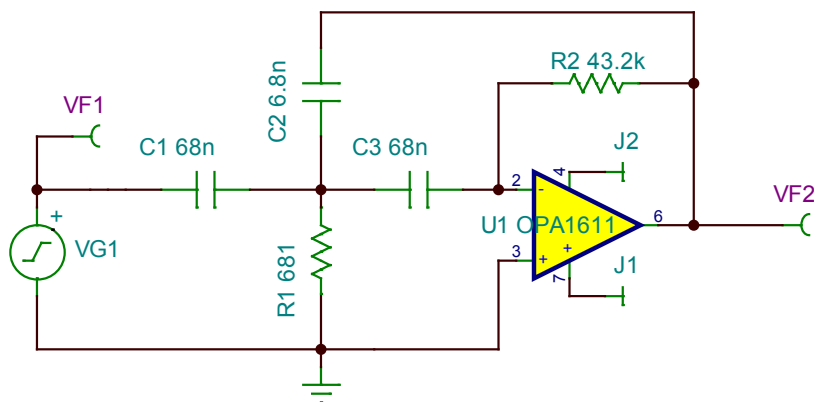


图 Section94-4 举例 2 MFB 型低通滤波器

仿真得到的频率特性如图 Section94-5 所示。按照 Section93 举例 2 所述的方法，得到测量结果如下表。

	中频增益	下限截止频率	特征频率	Q 值
理论值	10 倍	1000Hz	1359Hz	12
测量方法	100kHz 处增益	17dB 处的频率	-90°处的频率	实测特征频率点处的增益
测量数据	20.01dB	1000Hz	1.36kHz	21.55dB
换算实测值	10.01	1000Hz	1360	1194
误差	0.1%	0%	0.074%	-0.5%

结果表明，仿真结果与设计要求较为吻合。在图 Section94-5 所示的频率特性中，可以明显看到，由于 $Q=1.2$ ，该滤波器为切比雪夫型，有明显的增益隆起。

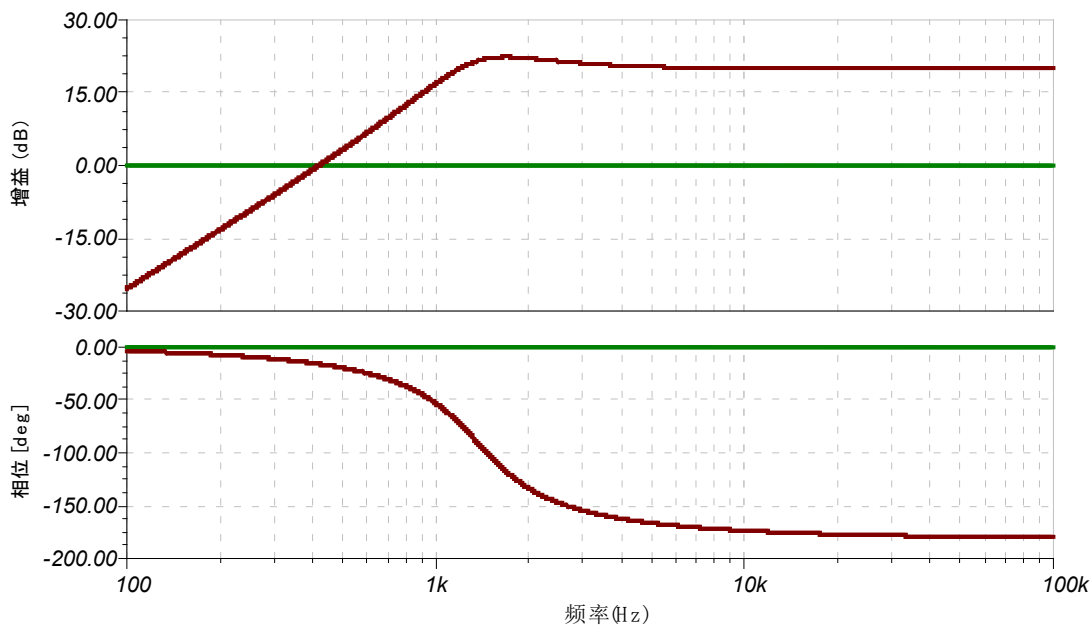


图 Section94-5 举例 2 仿真得到的频率特性

Section95. 高阶高通滤波器

高阶高通滤波器的设计方法，与高阶低通滤波器设计方法几乎完全一致：确定阶数，查找合适的表格——高通、低通使用完全相同的表格，确定每一块 $1/K$ 和 Q ，独立设计每一块，然后级联即可。

由于高通滤波器中，特征频率与截止频率的关系，与低通滤波器正好相反。因此，为了保证表 Section88-1 维持不变，在阶高通滤波器中，各级的特征频率与截止频率关系为：

$$f_0 = \frac{f_c}{1/K}$$

(Section95-1)

举例 1：

设计一个 9 阶 SK 型高通滤波器。要求，中频增益为 1 倍，截止频率为 1000Hz，巴特沃斯型。用仿真软件实证。

解：首先确定电路结构。因中频增益为 1，可以使用 SK 型 4 元件电路组成 2 阶高通滤波器，共使用 4 个，再用一个一阶高通。查表 Section88-1，找到巴特沃斯列，得如下截图。

	$1/K$	Q
9	1000	
	1000	0.527
	1000	0.653
	1000	1.000
	1000	2.879

根据 $f_c=1000\text{Hz}$ ，利用式(Section95-1)计算各级的特征频率 f_0 ，列于下表右侧，因 $1/K$ 均为 1，因此各级的特征频率均为 1000Hz。依据对应的表格和公式进行选择 and 计算：

第 n 块	阶数	$1/K$	Q	f_0	C/nF 选择 表 Section84-1	R_1 计算 式(Section91-5)	R_2 计算 式(Section91-6)
1	2	1.000	0.527	1000	100	1510	1677
2	2	1.000	0.653	1000	100	1219	2079
3	2	1.000	1.000	1000	100	796	3183
4	2	1.000	2.879	1000	100	276	9164
						式 (Section79-4)	
5	1	1.000		1000	100	1592	

按照上述选择和计算结果（绿色字），设计电路如图 Section95-1 所示。

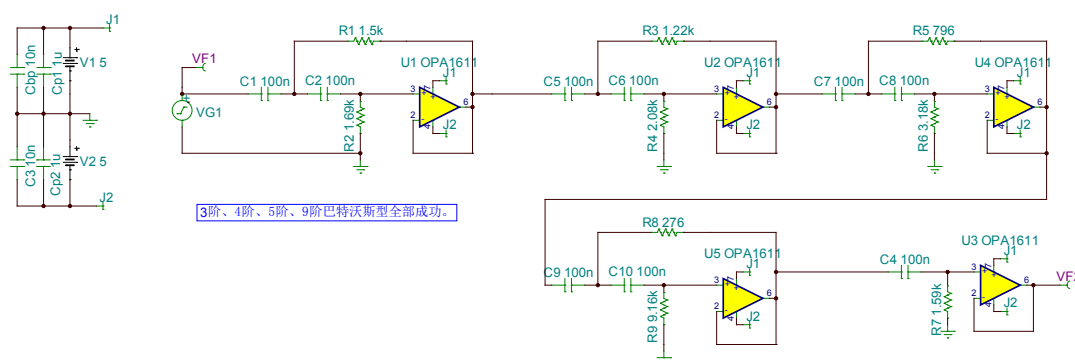


图 Section95-1 举例 1 电路，巴特沃斯型 9 阶高通滤波器

关键测试结果如下：

- 1) 中频增益，选择频率为 100kHz，实测增益为-5.67mdB，与设计要求 0dB 吻合。
- 2) -3.01dB 点的频率为 1kHz。与设计要求 1000Hz 完全吻合。
- 3) 整体特征频率，在相频特性图中，找到 9 阶对应的-315°点，为 1kHz，此处增益为-3.01dB，换算成中频增益的倍数为 0.707 倍，此即为 Q 值。可知此电路的截止频率与特征频率均为 1kHz，确实为巴特沃斯型。

举例 2：

设计一个 9 阶高通滤波器。要求，中频增益为 10 倍，截止频率为 1000Hz，切比雪夫 0.1dB 型。用仿真软件实证。

解：首先先确定电路结构。把 10 倍增益交给一阶滤波器完成，前面选择 4 个独立的二阶滤波器，用 SK 型 4 元件电路实现即可。

其次，在表 Section88-1，找到 9 阶和切比雪夫 0.1dB 的交叉位置，如下表：

		0.1dB 切比雪夫		f_0
		1/K	Q	
9 阶	0.279			1000/0.279=3584Hz
	0.431	0.822		1000/0.431=2320Hz
	0.678	1.585		1000/0.678=1475Hz
	0.878	3.145		1000/0.878=1139Hz
	0.986	10.180		1000/0.986=1014Hz

据式(Section95-1)，可以计算出各级滤波器的特征频率，写于表格右侧。

第三，根据系数，设计各块滤波器：

- 1) 对一阶高通滤波器，选择电容为 100nF，利用式(Section79-4)，得：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 3584 \times 100 \times 10^{-9}} = 444.1\Omega$$

同时，设置增益电阻分别为 1kΩ 和 9kΩ，以完成 10 倍增益。

- 2) 对 4 个二阶滤波器，设计方法相同，以 $Q=0.822$ ，特征频率为 2320Hz 为例：选择 $C1=C2=0.1\mu F$ ，利用式(Section91-5/6)计算两个电阻值： $R1=417.3\Omega$ ， $R2=1128\Omega$ 。依次对剩余的三个二阶滤波器进行设计，即可得到全部电路如图 Section95-2 所示。

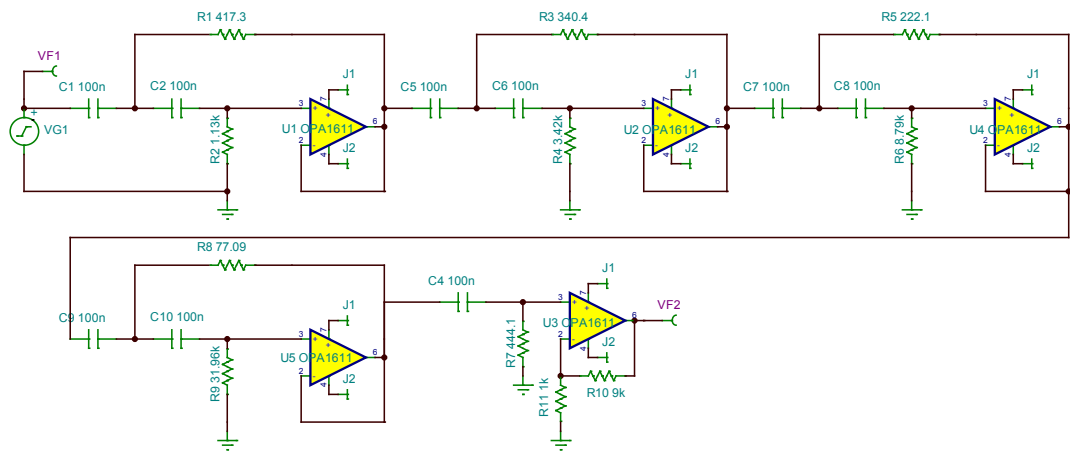


图 Section95-2 举例 2 电路，9 阶高通切比雪夫 0.1dB 滤波器

关键测试结果如下：

- 1) 中频增益，选择频率为 100kHz，实测增益为 19.99dB，与设计要求 20dB 吻合。
- 2) -3.01dB 点，即 19.99-3.01=16.98dB 的频率为 1kHz。与设计要求 1000Hz 完全吻合。
- 3) 整体特征频率，在相频特性图中，找到 9 阶对应的-315°点，为 1.24kHz，此处增益为 19.96dB，换算成中频增益的倍数为 0.9966 倍，此即为 Q 值。
- 4) 最大波动为 19.88dB，比中频增益小 0.11dB，符合设计要求。

举例 3：

设计一个 6 阶高通滤波器。要求，中频增益为 2 倍，截止频率为 7Hz，贝塞尔型。用仿真软件实证。

解：首先先确定电路结构。把 2 倍增益交给第一级滤波器完成，用 SK 型 6 元件电路实现，后面选择 2 个独立二阶滤波器，用 SK 型 4 元件电路实现即可。

其次，在表 Section88-1，找到 6 阶和切比雪夫 0.1dB 的交叉位置，如下表：

	贝塞尔型		f_0
	1/K	Q	
6 阶	1.605	0.510	7/1.605=4.361Hz
	1.690	0.611	7/1.690=4.142Hz
	1.905	1.023	7/1.905=3.675Hz

据式(Section95-1)，可以计算出各级滤波器的特征频率，写于表格右侧。

第三，根据系数，设计各块滤波器：

- 1) 对第一级 2 倍增益高通滤波器，电路采用图 Section92-1 所示的 6 元件电路，选择电容为 10μF，利用式(Section92-6/7)，计算电阻 R2=2702Ω，R1=4929Ω。

同时，设置增益电阻分别为 10kΩ 和 10kΩ，以完成 2 倍增益。

- 2) 对后 2 个二阶滤波器，设计方法相同，以 Q=0.611，特征频率为 4.142Hz 为例：选择 C1=C2=10μF，利用式(Section91-5/6)计算两个电阻值：R1=3144Ω，R2=4695Ω。

得到全部电路如图 Section95-3 所示。关键测试结果如下：

- 1) 中频增益，选择频率为 100kHz，实测增益为 6.02dB，与设计要求 2 倍吻合。
- 2) -3.01dB 点，即 6.02-3.01=3.01dB 的频率为 6.99Hz。与设计要求 7Hz 吻合。

3) 整体特征频率, 在相频特性图中, 找到 6 阶对应的 -90° 点, 为 3.97Hz, 增益为-4.59dB, 换算成归一化增益为 $-4.59-6.02=-10.61\text{dB}$, 倍数为 0.294 倍, 此即为 Q 值。可以看出, 它属于贝塞尔滤波器。

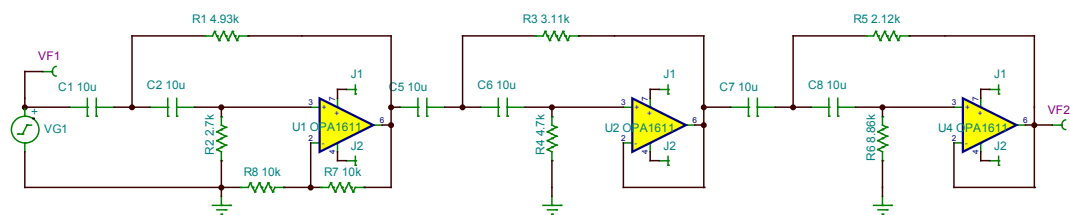


图 Section95-3 举例 3 电路, 6 阶高通贝塞尔型滤波器

Section96. 单电源高通滤波器

相对于低通滤波器，高通滤波器实施单电源改造会更加容易。原因是，高通滤波器本身就有隔直作用，电路本身的静态电位从入端开始，就不受信号源静态电位影响。

4 元件单电源 SK 型高通滤波器

左图为双电源电路，右图为改造后的单电源电路。它只是用一对儿分压电阻 R_{2A} 和 R_{2B} 代替了原电路中的 R_2 ，要求：

$$\begin{cases} \frac{R_{2A} \times R_{2B}}{R_{2A} + R_{2B}} = R_2 \\ V_S \times \frac{R_{2A}}{R_{2A} + R_{2B}} = U_{OQ} \end{cases}$$

(Section96-1)

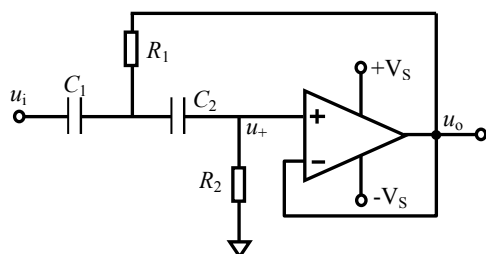


图 Section91-1 SK 型单位增益高通滤波器

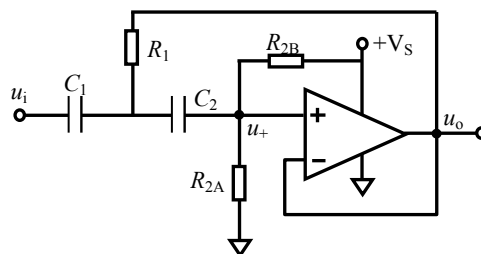


图 Section96-1 单电源 SK 型单位增益高通滤波器

其中， U_{OQ} 为期望的输出静态电压，一般为 $0.5V_S$ 。

因此，设计一个单电源 4 元件 SK 型高通滤波器的方法如下：

- 1) 按照双电源 4 元件 SK 型高通滤波器设计方法，得到 C 和 R_1 、 R_2 ；
- 2) 按照图 Section96-1 设计电路，其中：

$$\begin{cases} R_{2B} = R_2 \times \frac{V_S}{U_{OQ}} \\ R_{2A} = R_2 \times \frac{V_S}{V_S - U_{OQ}} \end{cases}$$

(Section96-2)

举例 1：

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求，单电源供电电压 2V，输出静态电压 1V，空载时输出信号不失真幅度超过 0.97V，中频增益为 1 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.707$ 。按照题目要求，完成电路结构、阻容参数设计，并选择合适的运放，用仿真软件实证。

解：首先确定电路结构。因单电源供电，且中频增益为 1，可选择单电源 SK 型 4 元件电路，如图 Section96-1。

其次，完成双电源阻容参数设计：选择电容为 100nF，按照式(Section91-5/6)计算得： $R_1=1125.4\Omega$ ， $R_2=2250.8\Omega$ 。

第三，完成单电源改造。据式(Section96-2)， $V_S=2V$ ， $U_{OQ}=1V$ ，则有：

$R_{2A}=4501.6\Omega$ ； $R_{2B}=4501.6\Omega$ ；按照 E96 系列选取， $R_1=1.13k\Omega$ ； $R_{2A}=4.53k\Omega$ ； $R_{2B}=4.53k\Omega$ 。

第四，选择合适的运放，需要考虑以下几点：

- 1) 运放最低工作电压必须小于等于 2V；
- 2) 作为高通滤波器的核心运放，其带宽在满足式(Section90-1)的同时，还需考虑是否有上限截止频率的要求。本题中没有这个要求，因此只需带宽大于 100kHz 即可。
- 3) 要求输出不失真幅度超过 0.97V，则要求空载输出至轨电压小于 30mV。

综上所述，选择 ADI 公司的运放 AD8515 较为合适。其核心参数如下：1.8V~5V 供电，5MHz 带宽，输出至轨电压 10mV，很关键的是，它的价格不高。

据此设计电路如图 Section96-2 所示，用 Multisim12.0 仿真软件实现。图 Section96-3 为该电路的仿真频率特性，基本满足设计要求。

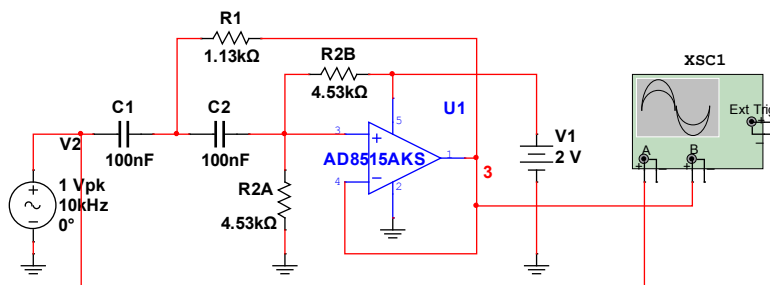


图 Section96-2 举例 1 单电源 SK 型 4 元件高通
AC Analysis

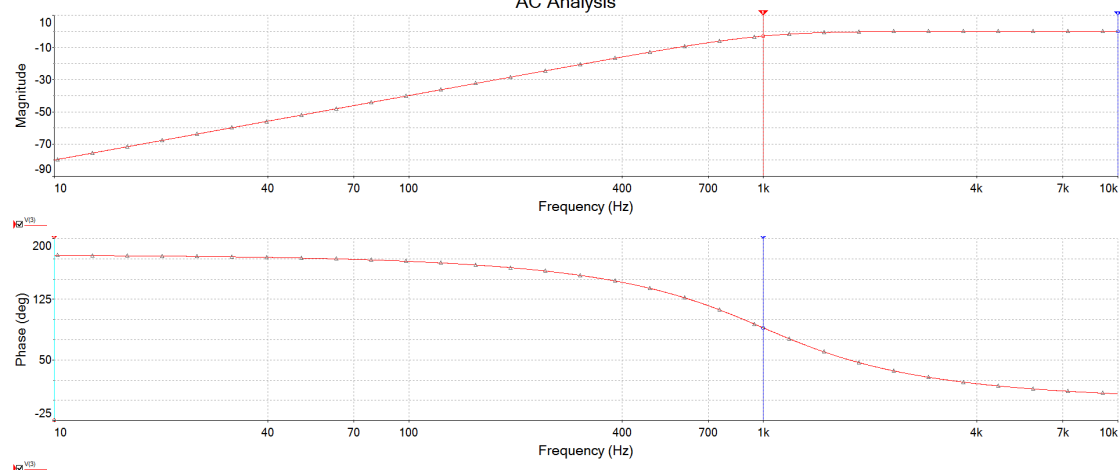


图 Section96-3 举例 1 仿真频率特性

用仿真软件提供的示波器功能，获得 100kHz、1V 输入信号时的波形如图 Section96-4 所示，基本达到了设计要求。

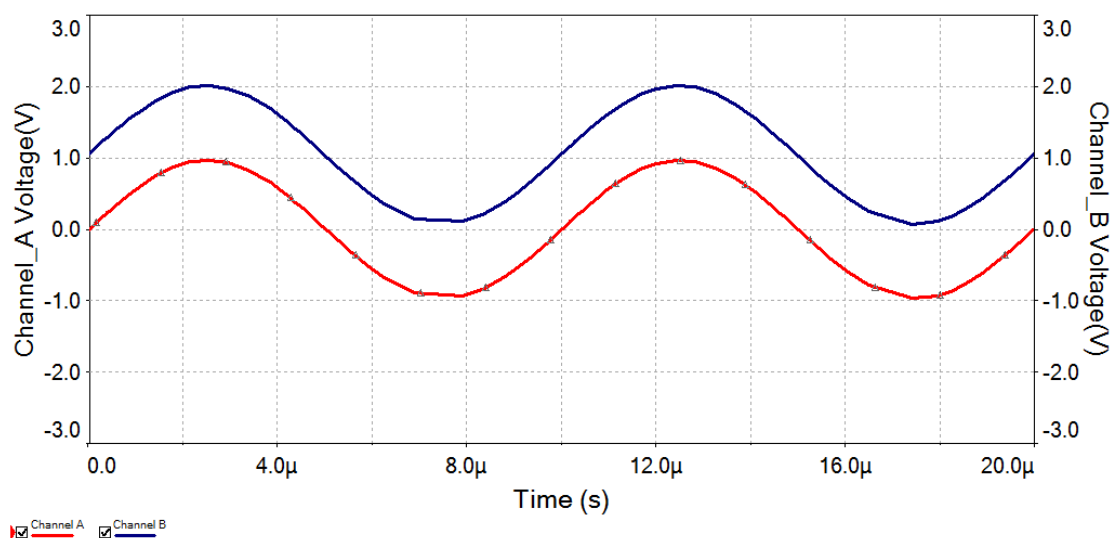


图 Section96-4 举例 1 仿真输入输出波形

6 元件单电源 SK 型高通滤波器

电路如图 Section96-5 所示。类似的，它用一对儿分压电阻 R_{2A} 和 R_{2B} 代替了原电路中的 R_2 ，要求：

$$\begin{cases} \frac{R_{2A} \times R_{2B}}{R_{2A} + R_{2B}} = R_2 \\ V_S \times \frac{R_{2A}}{R_{2A} + R_{2B}} \times A_m = U_{OQ} \end{cases}$$

[Section96-3]

其中， U_{OQ} 为期望的输出静态电压，一般为 $0.5V_S$ 。

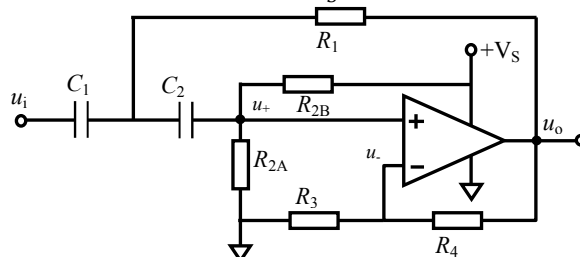


图 Section96-5 单电源 6 元件 SK 型二阶高通滤波器

因此得：

$$\begin{cases} R_{2B} = R_2 \times \frac{A_m V_S}{U_{OQ}} \\ R_{2A} = R_2 \times \frac{A_m V_S}{A_m V_S - U_{OQ}} \end{cases}$$

[Section96-4]

举例 2：

设计一个二阶 SK 型高通滤波器。要求，单电源供电电压 3.6V，输出静态电压 1.8V，空载时输出信号不失真幅度超过 1.70V，中频增益为 10 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.707$ 。按照题目要求，完成电路结构、阻容参数设计，并选择合适的运放，用仿真软件实证。

解：首先确定电路结构。因单电源供电，且中频增益为 10，可选择单电源 SK 型 6 元件电路，如图 Section96-5。

其次，完成双电源阻容参数设计：选择电容为 100nF，按照式(Section92-6/7)计算得： $R_1=3985.5\Omega$ ， $R_2=635.6\Omega$ ， $R_3=1k\Omega$ ， $R_4=9.09k\Omega$ 。

第三，完成单电源改造。据式(Section96-4)， $V_S=3.6V$ ， $U_{OQ}=1.8V$ ，则有：

$R_{2B}=12712\Omega$ ； $R_{2B}=669.05\Omega$ ；按照 E96 系列选取， $R_1=3.99k\Omega$ ； $R_{2A}=668\Omega$ ； $R_{2B}=12.7k\Omega$ 。

第四，选择合适的运放，需要考虑以下几点：

- 1) 运放最低工作电压必须小于等于 3.6V，最高工作电压必须大于等于 3.6V；
- 2) 作为高通滤波器的核心运放，其带宽在满足式(Section90-1)的同时，还需考虑是否有上限截止频率的要求。本题中没有这个要求，因此只需带宽大于 100kHz 即可。
- 3) 要求输出不失真幅度超过 1.70V，则要求空载输出至轨电压小于 100mV。

综上所述，选择 TI 公司的运放 TLV2780/2781 较为合适。其核心参数如下：1.8V~3.6V 供电，8MHz 带宽，输出至轨电压 70mV。当然，ADI 的 AD8515 也是合适的。

用 TINA-TI 设计的仿真电路如图 Section96-6 所示，仿真结果如图 Section96-7 所示。从结果看，满足设计要求。

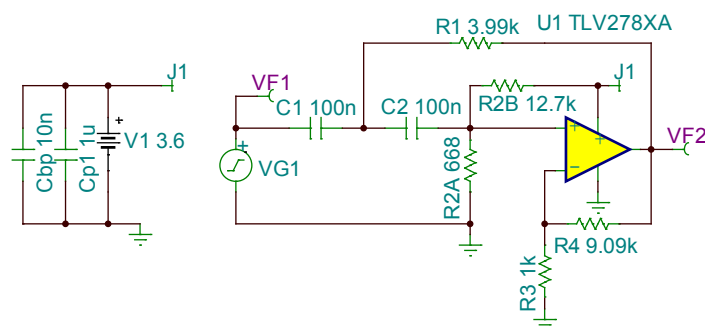


图 Section96-6 举例 2 电路

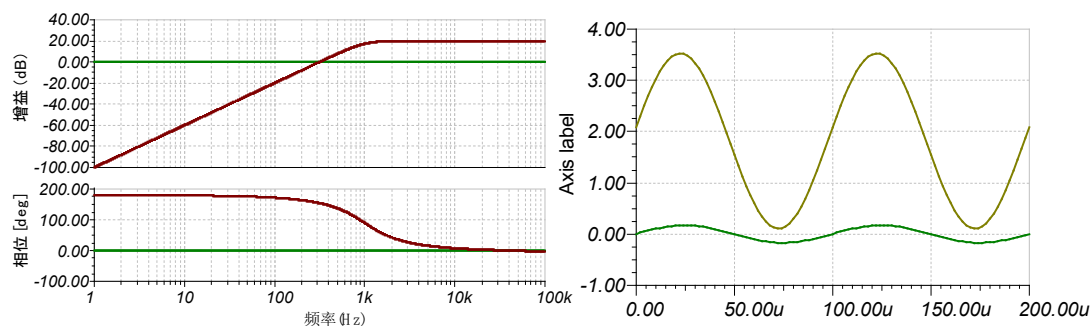


图 Section96-7 举例 2 频率特性和输入输出波形

单电源 MFB 型高通滤波器

对 MFB 型高通滤波器的单电源改造，是最为容易的：所有双电源电路计算的阻容参数，均不改变，只需要将原先接地的正输入端，增加一对分压电阻，提供一个直流电压，使其与输出静态电压相同即可。电路如图 Section96-8 所示。

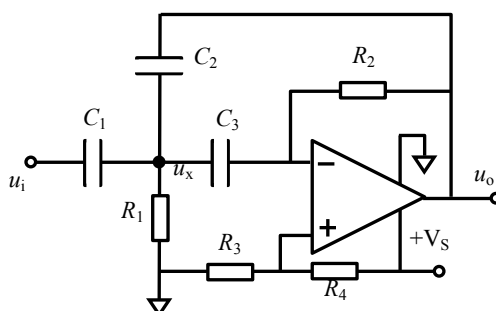


图 Section96-8 单电源 MFB 型高通滤波器

举例 3：

设计一个单电源二阶 MFB 型高通滤波器，供电电压 5V。要求，只能使用一只运放，滤波器的中频增益为 0.5 倍，截止频率为 1kHz， $Q=0.707$ ，滤波器静态输出电压为 2.5V。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：这个例子是 Section94 中举例 1 的单电源版本，要求完全相同。本例使用 MFB 求解方法二实现。电路阻容参数设计过程在此不重复，结论如图。然后，用两个 10k Ω 电阻实现 2.5V 即可。仿真电路如图 Section96-9 所示，仿真结果如图 Section96-10 所示，输入为 100kHz，4.7V 正弦波，输出被衰减了一半。

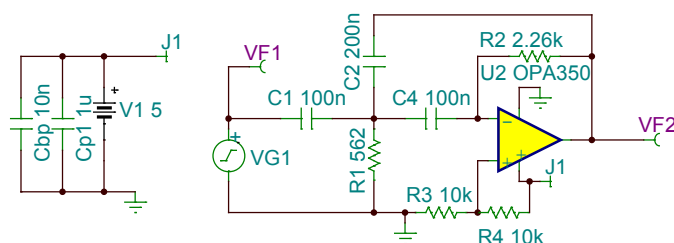


图 Section96-9 举例 3 仿真电路

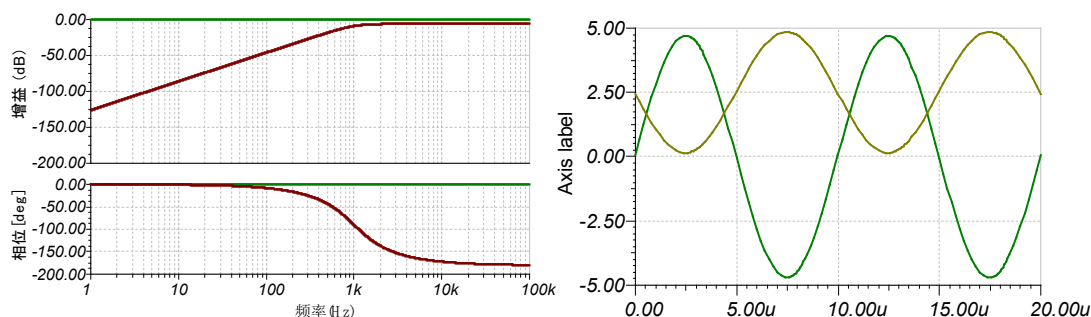


图 Section96-10 举例 3 仿真结果

4.5 运放组成的带通滤波器

运放组成的带通滤波器——Band Pass Filter，分为两类：一类由低通滤波器串联高通滤波器组成，具有两个独立频点的宽带通滤波器，这极为简单。另一类是具有单一频点的窄带通滤波器，也叫选频放大器。

Section97. 双频点带通滤波器——宽带通

双频点带通滤波器的幅频特性如图 Section97-1 所示，其中 f_L 和 f_H 相距较远。当 f_L 和 f_H 相距很近时，就演变成了下节介绍的单频点选频放大器。

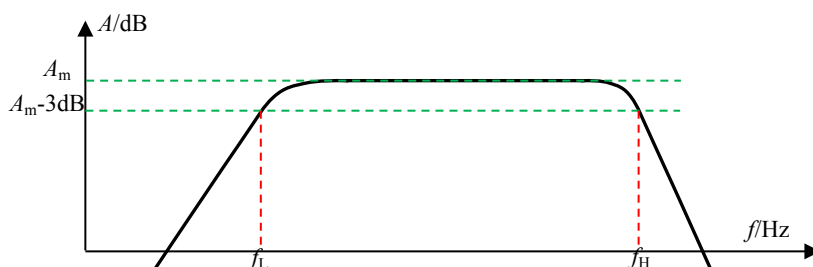


图 Section97-1 双频点带通滤波器幅频特性示意图

实现双频点带通滤波器非常简单，将一个下限截止频率为 f_L 的高通滤波器，与一个上限截止频率为 f_H 的低通滤波器直接串联，即可。其中的高通和低通滤波器，可以根据设计需要，独立设计，比如选择不同的通带内增益、不同的 Q 值等。注意需要满足：

$$A_m = A_{m1} \times A_{m2}$$

图 Section97-2 和 Section97-3 是两种不同的级联方法，区别在于先后次序。理论上，它们没有什么区别，但是在实用中，前者可能对降低总输出噪声有效，后者可能对降低输出失调电压有效，在具体应用中应具体分析。

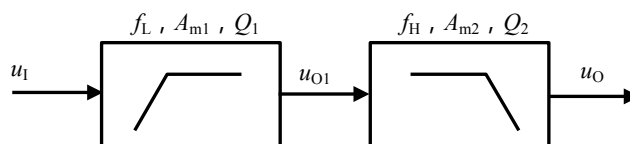


图 Section97-2 高通+低通实现双频点带通滤波器

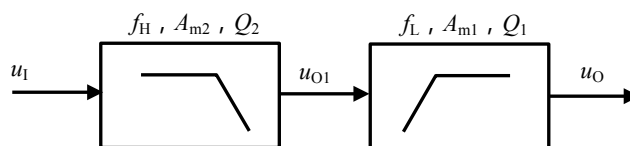


图 Section97-3 低通+高通实现双频点带通滤波器

Section98. 单频点选频放大器——窄带通

回顾传函

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section82-1})$$

$$\Omega = \frac{f}{f_0} \quad (\text{Section82-2})$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{\Omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Omega_H - \Omega_L} \quad (\text{Section82-4})$$

SK 型通用电路和频域表达式

与图 Section84-1 相比，更为通用的 SK 结构如图 Section98-1 所示。它多了一个 Z_5 ，并且将跟随器改为 G 倍增益。此结构将带来更为丰富的变化。

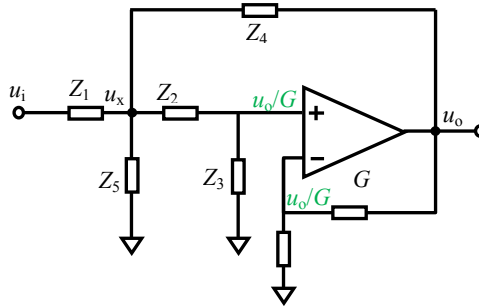


图 Section98-1 Sallen-Key 型滤波器通用模式

设图中 u_x 为临时变量，结合运放的虚短，有：

$$\begin{aligned} U_x(S) \times \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} &= U_o(S)/G, \text{ 即} \\ U_x(S) &= \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 G} U_o(S) \end{aligned} \quad (1)$$

在 u_x 点，利用 KCL，结合虚断，可得：

$$\frac{U_i(S) - U_x(S)}{Z_1} = \frac{U_x(S) - U_o(S)}{Z_4} + \frac{U_x(S)}{Z_2 + Z_3} + \frac{U_x(S)}{Z_5} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)，得：

$$\frac{U_i(S) - \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 G} U_o(S)}{Z_1} = \frac{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 G} U_o(S) - U_o(S)}{Z_4} + \frac{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 G} U_o(S)}{Z_2 + Z_3} + \frac{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 G} U_o(S)}{Z_5}$$

化简过程为：

$$\begin{aligned}
 U_i(S) &= U_o(S) \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 G} + U_o(S) \left(\frac{Z_2 + Z_3 - Z_3 G}{Z_3 G} \right) \frac{Z_1}{Z_4} + U_o(S) \frac{Z_1}{Z_3 G} + U_o(S) \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}{Z_5 Z_3 G} \\
 &= U_o(S) \times \left(\frac{Z_2 Z_4 Z_5 + Z_3 Z_4 Z_5}{Z_3 Z_4 Z_5 G} + \frac{Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 - Z_1 Z_3 Z_5 G}{Z_3 Z_4 Z_5 G} + \frac{Z_1 Z_4 Z_5}{Z_3 Z_4 Z_5 G} + \frac{Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4}{Z_3 Z_4 Z_5 G} \right) \\
 &= U_o(S) \frac{Z_2 Z_4 Z_5 + Z_3 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 - Z_1 Z_3 Z_5 G}{Z_3 Z_4 Z_5 G}
 \end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \frac{U_o(S)}{U_i(S)} \\
 &= \frac{Z_3 Z_4 Z_5 G}{Z_2 Z_4 Z_5 + Z_3 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 - Z_1 Z_3 Z_5 G} \quad (\text{Section98-1})
 \end{aligned}$$

当 $Z_5 = \infty$, $G = 1$, 此电路就是图 Section84-1, 将条件带入上式, 有：

$$A(S) = \frac{Z_3 Z_4}{Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4}$$

与式(Section84-1)结论完全相同, 说明本节此图是更为通用的。

Sallen-Key 型窄带通电路一

电路如图 Section98-2 所示。其中形成增益 G 的电阻没有标注, 读者可以自行设计。与图 Section98-1 电路相比, 区别列于下表。

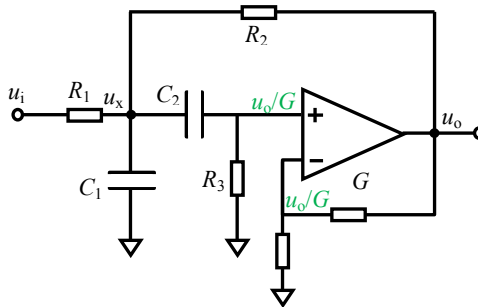


图 Section98-2 Sallen-Key 型窄带通滤波器一

公式表示	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
电路实物	R_1	C_2	R_3	R_2	C_1
带入表达式	R_1	$1/SC_2$	R_3	R_2	$1/SC_1$

将 $Z_1 \sim Z_5$ 用表中表达式代替, 代入式(Section98-1)得：

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \frac{U_o(S)}{U_i(S)} \\
 &= \frac{R_3 R_2 \frac{1}{SC_1} G}{\frac{1}{SC_2} R_2 \frac{1}{SC_1} + R_3 R_2 \frac{1}{SC_1} + R_1 \frac{1}{SC_2} \frac{1}{SC_1} + R_1 R_3 \frac{1}{SC_1} + R_1 R_2 \frac{1}{SC_1} + R_1 \frac{1}{SC_2} R_2 + R_1 R_3 R_2 - R_1 R_3 \frac{1}{SC_1} G} \\
 &= \frac{R_3 R_2 C_2 G}{R_2 + SC_2 R_3 R_2 + R_1 + SC_2 R_1 R_3 + SC_2 R_1 R_2 + SC_1 R_1 R_2 + S^2 C_2 R_1 R_3 R_2 C_1 - SC_2 R_1 R_3 G} \\
 &= \frac{R_3 R_2 C_2 G}{R_1 + R_2 + S(C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2) + S^2 C_1 C_2 R_1 R_3 R_2} \\
 &= \frac{S \frac{R_3 R_2 C_2 G}{R_1 + R_2}}{1 + S \frac{(C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2)}{R_1 + R_2} + S^2 \frac{C_1 C_2 R_1 R_3 R_2}{R_1 + R_2}}
 \end{aligned}$$

用频域表达为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{R_3 R_2 C_2 G}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{(C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2)}{R_1 + R_2} + (j\omega)^2 \frac{C_1 C_2 R_1 R_3 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3)$$

特征角频率 ω_0 发生在表达式分母中的实部为 0 处，即

$$(j\omega_0)^2 \frac{C_1 C_2 R_1 R_3 R_2}{R_1 + R_2} = -1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_3 (R_1 \parallel R_2)}}$$

在此基础上，将式(3)向式[Section82-1]形式演变：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$$

其中：

$$A_m = \frac{R_3 R_2 C_2 G}{(C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2)} = \frac{R_3 R_2 C_2 G}{m}$$

$$m = C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{(C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2) \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_3 (R_1 \parallel R_2)}}}{R_1 + R_2} = \frac{m \times \omega_0}{R_1 + R_2}$$

$$Q = \frac{R_1 + R_2}{m \times \omega_0}$$

Q 达到最大值的情况是：

$$C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2 = 0$$

Sallen-Key 型窄带通电路一的易用型电路

图 Section98-2 电路中，如果不对电阻电容实施约束，剧情就太复杂了。为了方便设计，通常对电路中的电阻和电容实施一定的约束，形成了易用型电路。常见的约束为：

$C_1=C_2=C$ ， $R_1=R_2=R$ ， $R_3=2R$ 。见图 Section98-3。在此约束下，有：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_3 (R_1 \parallel R_2)}} = \frac{1}{RC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section98-2]

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$$

$$m = C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1 R_1 R_2 = 2CR^2(3 - G)$$

$$A_m = \frac{R_3 R_2 C_2 G}{m} = \frac{2CR^2 G}{2CR^2(3 - G)} = \frac{G}{3 - G}$$

[Section98-3]

$$Q = \frac{R_1 + R_2}{m \times \omega_0} = \frac{2R}{2CR^2(3 - G) \times \frac{1}{RC}} = \frac{1}{3 - G}$$

(Section98-4)

此时可以看出，中频增益和 Q 值，均与 $3-G$ 有关，且如果 G 近似为 3 但小于 3，那么有可能出现 Q 和 A_m 都特别大的情况。本电路可以通过改变 G ，实现不同的设计要求。

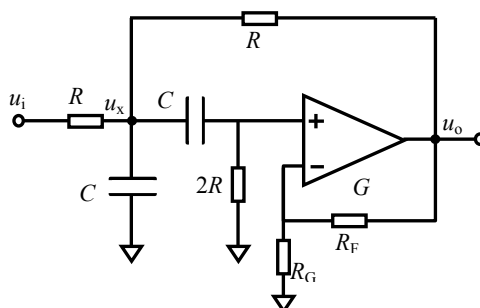


图 Section98-3 Sallen-Key 型窄带通滤波器—易用型

举例 1：

设计一个 SK 型窄带通滤波器。要求，只能使用一只运放，滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=10$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：采用窄带滤波器—易用型电路。按照表 Section84-1，选择电容 $C=1\mu\text{F}$ ，根据式 (Section98-2)，可以反算出：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 50 \times 1 \times 10^{-6}} = 3183\Omega$$

因此，根据表 Section84-2 的 E96 系列电阻，选择 $R=3.16\text{k}\Omega$ ， $2R=6.34\text{k}\Omega$ ，最为接近。

根据 $Q=10$ 要求，利用式 (Section98-4)，可知：

$$Q = \frac{1}{3-G} = 10$$

则 $G=2.9$ 。又有：

$$G = 1 + \frac{R_F}{R_G} = 2.9$$

选择 $R_G = 1\text{k}\Omega$ ，则理论上 $R_F = 1.9\text{k}\Omega$ ，按照 E96 系列选择， $R_F = 1.91\text{k}\Omega$ ，形成最终电路如图 Section98-4。

图 Section98-5 是该电路的仿真频率特性。可以看出，中心频率稍大，为 50.29Hz，该处电路增益为 30.5dB——即窄带通滤波器的峰值增益，-3dB 频率点有两个，分别为 52.52Hz，48.15Hz，两者的差值为 4.37Hz，按照 Q 值标准定义：

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{50.29}{52.52 - 48.15} = 11.5$$

总体来说，出现的上述误差是可以容忍的。

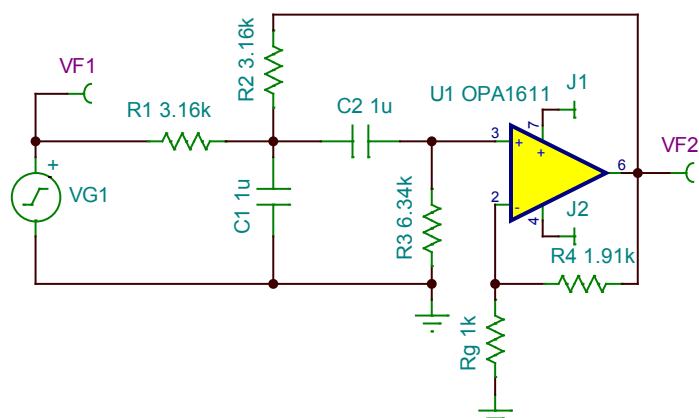


图 Section98-4 举例 1 电路

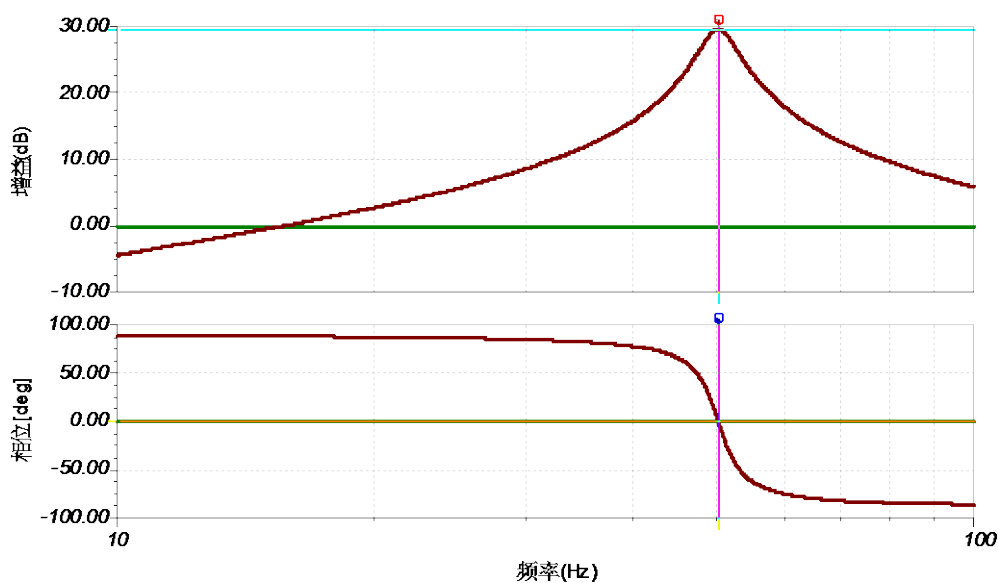


图 Section98-5 举例 1 电路仿真频率特性

Sallen-Key 型窄带通电路二

电路如图 Section98-6 所示。其中形成增益 G 的电阻没有标注，读者可以自行设计。和图 Section98-2 相比，电容 C_1 的顶端由原先的 u_x 点移到电阻 R_3 顶端。与图 Section98-1 电路相比，区别列于下表。

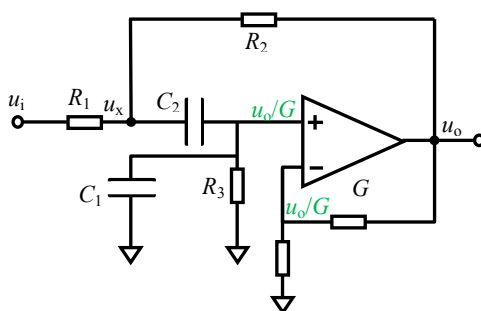


图 Section98-6 Sallen-Key 型窄带通滤波器二

公式表示	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
电路实物	R_1	C_2	$R_3//C_1$	R_2	∞
带入表达式	R_1	$1/SC_2$	$R_3/[1/SC_1]$	R_2	∞

将 $Z_1 \sim Z_5$ 用表中表达式代替，代入式(Section98-1)得：

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \frac{U_o(S)}{U_i(S)} = \frac{Z_3 Z_4 G}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 (1 - G)} \\
 &= \frac{\frac{R_3}{1 + SR_3 C_1} R_2 G}{R_1 \frac{1}{SC_2} + R_1 R_2 + R_2 \frac{1}{SC_2} + \frac{R_3}{1 + SR_3 C_1} R_2 + R_1 \frac{R_3}{1 + SR_3 C_1} (1 - G)} \\
 &= \frac{SC_2 R_3 R_2 G}{R_1 (1 + SR_3 C_1) + R_1 R_2 (1 + SR_3 C_1) (SC_2) + R_2 (1 + SR_3 C_1) + SC_2 R_3 R_2 + R_1 R_3 SC_2 (1 - G)} \\
 &= \frac{SC_2 R_3 R_2 G}{R_1 + R_2 + SR_1 R_3 C_1 + SR_1 R_2 C_2 + SR_3 R_2 C_1 + SR_3 R_2 C_2 + SR_1 R_3 C_2 (1 - G) + S^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \\
 &= \frac{SC_2 R_3 R_2 G}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + S \times \frac{R_1 R_3 C_1 + R_1 R_2 C_2 + R_3 R_2 C_1 + R_3 R_2 C_2 + R_1 R_3 C_2 (1 - G)}{R_1 + R_2} + S^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_2}} \\
 &= \frac{S \frac{C_2 R_3 R_2 G}{R_1 + R_2}}{1 + S \times \frac{C_1 (R_1 R_3 + R_2 R_3) + C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1 - G))}{R_1 + R_2} + S^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_2}}
 \end{aligned}$$

用频域表达为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{R_3 R_2 C_2 G}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{(C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1 - G)) + C_1 (R_1 R_3 + R_2 R_3))}{R_1 + R_2} + (j\omega)^2 \frac{C_1 C_2 R_1 R_3 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (4)$$

特征角频率 ω_0 发生在表达式分母中的实部为 0 处，即

$$\begin{aligned}
 (j\omega_0)^2 \frac{C_1 C_2 R_1 R_3 R_2}{R_1 + R_2} &= -1 \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_3 (R_1 \parallel R_2)}}
 \end{aligned}$$

在此基础上，将式(4)向式(Section82-1)形式演变：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{R_3 R_2 C_2 G}{C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1 - G)) + C_1 (R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \frac{R_3 R_2 C_2 G}{m} \\
 m &= C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1 - G)) + C_1 (R_1 R_3 + R_2 R_3) \\
 \frac{1}{Q} &= \frac{(C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1 - G)) + C_1 (R_1 R_3 + R_2 R_3)) \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_3 (R_1 \parallel R_2)}}}{R_1 + R_2} = \frac{m \times \omega_0}{R_1 + R_2} \\
 Q &= \frac{R_1 + R_2}{m \times \omega_0}
 \end{aligned}$$

Q 达到最大值的情况是：

$$(C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1 - G)) + C_1 (R_1 R_3 + R_2 R_3)) = 0$$

Sallen-Key 型窄带通电路二的易用型电路

图 Section98-6 电路也有易用型电路，对电路中的电阻和电容实施一定的约束即可。
约束为： $C_1=C_2=C$ ， $R_1=R_2=R$ ， $R_3=2R$ 。见图 Section98-7。

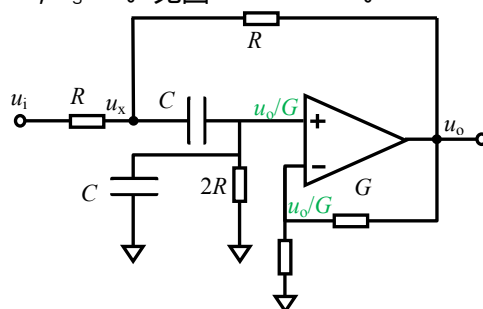


图 Section98-7 Sallen-Key 型窄带通滤波器二易用型

在此约束下，有：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_3 (R_1 \parallel R_2)}} = \frac{1}{RC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

[Section98-5]

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$$

$$m = C_2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3(1 - G)) + C_1(R_1 R_3 + R_2 R_3) = C(9R^2 - 2R^2 G)$$

$$= 2CR^2(4.5 - G)$$

$$A_m = \frac{R_3 R_2 C_2 G}{m} = \frac{2CR^2 G}{2CR^2(4.5 - G)} = \frac{G}{4.5 - G}$$

[Section98-6]

$$Q = \frac{R_1 + R_2}{m \times \omega_0} = \frac{2R}{2CR^2(4.5 - G) \times \frac{1}{RC}} = \frac{1}{4.5 - G}$$

[Section98-7]

此时可以看出，中频增益和 Q 值，均与 4.5-G 有关，且如果 G 近似为 4.5 但小于 4.5，那么有可能出现 Q 和 A_m 都特别大的情况。本电路可以通过改变 G，实现不同的设计要求。

以上两个电路，都属于 Sallen-Key 架构，具体接法不同，就带来了不同的效果。

举例 2：

设计一个 SK 型窄带通滤波器。要求，只能使用一只运放，滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=10$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：采用窄带滤波器二易用型电路。按照表 Section84-1，选择电容 $C=1\mu\text{F}$ ，根据根据式(Section98-2)，可以反算出：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 50 \times 1 \times 10^{-6}} = 3183\Omega$$

因此，根据表 Section84-2 的 E96 系列电阻，选择 $R=3.16\text{k}\Omega$ ， $2R=6.34\text{k}\Omega$ ，最为接近。

根据 $Q=10$ 要求，利用式(Section98-4)，可知：

$$Q = \frac{1}{4.5 - G} = 10$$

则 $G=4.4$ 。又有：

$$G = 1 + \frac{R_F}{R_G} = 4.4$$

选择 $R_G = 1\text{k}\Omega$ ，则理论上 $R_F = 3.4\text{k}\Omega$ ，按照 E96 系列选择， $R_F = 3.40\text{k}\Omega$ ，形成最终电路如图 Section98-8。

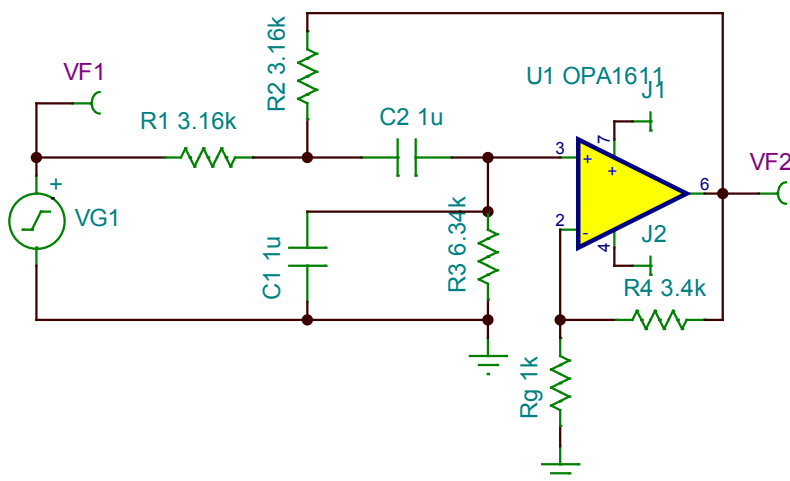


图 Section98-8 举例 2 电路

读者可以自己观察该电路的仿真频率特性。可以看出，中心频率稍大，为 50.29Hz，该处电路增益为 33.0dB——即窄带滤波器的峰值增益，-3dB 频率点有两个，分别为 52.83Hz，47.87Hz，两者的差值为 4.96Hz，按照 Q 值标准定义：

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{50.29}{52.83 - 47.87} = 10.14$$

总体来说，出现的上述误差是可以容忍的。

对比举例 1 和举例 2，可以发现，两个电路都能实现 $Q=10$ 的要求，但是峰值增益存在差异。根据峰值增益定义，对举例 1 电路应为：

$$A_m = \frac{G}{3 - G} = \frac{2.91}{3 - 2.91} = 32.33 = 30.19\text{dB}$$

对举例 2 电路应为：

$$A_m = \frac{G}{4.5 - G} = \frac{4.4}{4.5 - 4.4} = 44 = 32.87\text{dB}$$

在实际应用中，这点差异不会带来太大的影响。

MFB 型窄带通

从前面多节分析看，Sallen-Key 电路有一种通用结构，如图 Section84-1。选择电阻或者电容取代图中的 Z，可以形成不同的滤波器类型。从目前看，我们已经实现了低通、高通和窄带通滤波器，它们都没有逃脱图 Section84-1 结构。

MFB 型电路与此类似，也有通用结构。如图 Section98-9 所示。将图中的 Z 用电阻或者电容取代，会得到不同的滤波器效果。为此，本节推导 MFB 电路结构的通用表达式。

一种方法是写出图中 u_x 点表达式，列出该节点的电流之和等于 0 方程，由此可以获得 u_0 与 u_1 的关系。但我更喜欢使用 MF 方框图法。

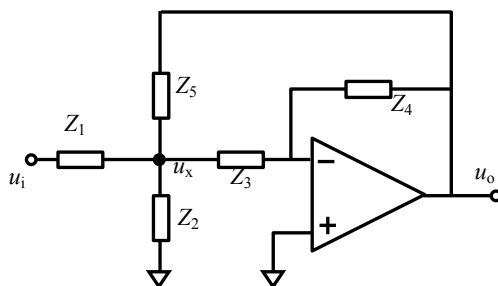


图 Section98-9 MFB 型滤波器通用结构

先求解反馈系数 \dot{F} ，即输出在运放负输入的分压系数，它由两路叠加形成：一路通过 Z_4 ，此时应将 Z_5 的顶端接地，形成 \dot{F}_4 ；另一路通过 Z_5 ，此时应将 Z_4 的右端接地，形成 \dot{F}_5 ：

$$\begin{aligned}\dot{F}_4 &= \frac{Z_3 + Z_5 // Z_1 // Z_2}{Z_4 + Z_3 + Z_5 // Z_1 // Z_2} = \frac{Z_3 + \frac{Z_5 Z_1 Z_2}{Z_5 Z_1 + Z_5 Z_2 + Z_1 Z_2}}{Z_4 + Z_3 + \frac{Z_5 Z_1 Z_2}{Z_5 Z_1 + Z_5 Z_2 + Z_1 Z_2}} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5} \\ \dot{F}_5 &= \frac{Z_1 // Z_2 // (Z_3 + Z_4)}{Z_5 + Z_1 // Z_2 // (Z_3 + Z_4)} \times \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \\ &= \frac{\frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4}}{Z_5 + \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4}} \times \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \\ &= \frac{(Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4) \times \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}\end{aligned}$$

总的反馈系数，由两者相加得到：

$$\dot{F} = \dot{F}_4 + \dot{F}_5 = \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}$$

衰减系数 \dot{M} 与 \dot{F}_5 的分压结构完全相同，只是 Z_5 和 Z_1 互换了位置，且带一个负号：

$$\dot{M} = - \frac{Z_5 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}$$

根据本书第3章关于方框图法内容，可知：

$$\dot{A} \approx \frac{\dot{M}}{\dot{F}} = - \frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5}$$

(Section98-8)

这是 MFB 通用结构的增益表达式。

将 MFB 通用结构中的 Z 用图 Section98-10 电路中的阻容取代，就形成了窄带通滤波器。

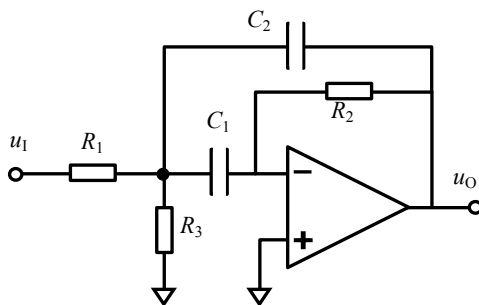


图 Section98-10 MFB 型窄带通滤波器之一

替换内容见下表。

公式表示	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
电路实物	R_1	R_3	C_1	R_2	C_2
带入表达式	R_1	R_3	$[1/SC_1]$	R_2	$1/SC_2$

将 $Z_1 \sim Z_5$ 用表中表达式代替，利用式(Section98-8)，得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= \frac{\dot{M}}{\dot{F}} = \frac{-Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5} \\
 &= \frac{-R_2 R_3 \frac{1}{SC_2}}{R_1 R_3 \frac{1}{SC_1} + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_3 \frac{1}{SC_2} + \frac{R_1 + R_3}{S^2 C_1 C_2}} \\
 &= -\frac{S \frac{R_2 R_3 C_1}{R_1 + R_3}}{1 + \frac{S(C_1 + C_2)R_1 R_3}{R_1 + R_3} + S^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}} \\
 &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{S \frac{(C_1 + C_2)R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{1 + S \frac{(C_1 + C_2)R_1 R_3}{R_1 + R_3} + S^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}}
 \end{aligned}$$

写成频域表达式，为：

$$\dot{A}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{j\omega \frac{(C_1 + C_2)R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{1 + j\omega \frac{(C_1 + C_2)R_1 R_3}{R_1 + R_3} + (j\omega)^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}}$$

设：

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} = \frac{1}{(R_1 // R_3) R_2 C_1 C_2} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(R_1 // R_3) R_2 C_1 C_2}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{(R_1 // R_3) R_2 C_1 C_2}}$$

(Section98-9)

则有：

$$\begin{aligned}
 \dot{A}(j\omega) &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{(C_1 + C_2)(R_1 // R_3)}{\sqrt{(R_1 // R_3) R_2 C_1 C_2}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{(C_1 + C_2)(R_1 // R_3)}{\sqrt{(R_1 // R_3) R_2 C_1 C_2}} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\
 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} (C_1 + C_2) \sqrt{\frac{R_1 // R_3}{R_2 C_1 C_2}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} (C_1 + C_2) \sqrt{\frac{R_1 // R_3}{R_2 C_1 C_2}} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\
 &= A_m \times \frac{\frac{1}{Q} j\Omega}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}
 \end{aligned}$$

上式为一个标准窄带通滤波器的表达式，可以看出：

$$A_m = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

(Section98-10)

$$\frac{1}{Q} = (C_1 + C_2) \sqrt{\frac{R_1 // R_3}{R_2 C_1 C_2}}$$

即

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_2 C_1 C_2}{R_1 // R_3}}}{(C_1 + C_2)}$$

[Section98-11]

为了进一步简化设计，设两个电容相等为 C ，对中心频率表达式有：

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(R_1//R_3)R_2C_1C_2}} = \frac{1}{2\pi C\sqrt{(R_1//R_3)R_2}} \\ \sqrt{(R_1//R_3)R_2} &= \frac{1}{2\pi f_0 C} \\ \frac{R_1 R_3 R_2}{R_1 + R_3} &= \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2} \end{aligned} \quad (5)$$

对峰值增益表达式，有：

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{C_1}{C_1 + C_2} = -\frac{R_2}{2R_1} \\ R_2 &= -2A_m R_1 \end{aligned} \quad (6)$$

对品质因数表达式，有：

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{\frac{R_2 C_1 C_2}{R_1 // R_3}}}{(C_1 + C_2)} = 0.5 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 // R_3}} \\ \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1} &= 4Q^2 \end{aligned} \quad (7)$$

可以看出，存在三个非冗余方程(5)、(6)、(7)，可以解出三个电阻值。

将式(6)代入式(5)，得到：

$$(R_1 // R_3)(-2A_m R_1) = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2} \quad (8)$$

将式(6)代入式(7)，得到：

$$\begin{aligned} -2A_m R_1 \frac{1}{R_1 // R_3} &= 4Q^2 \\ R_1 // R_3 &= \frac{-2A_m R_1}{4Q^2} \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)，得到：

$$\frac{-2A_m R_1}{4Q^2} (-2A_m R_1) = \frac{A_m^2 R_1^2}{Q^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2}$$

即

$$R_1 = \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi^2 f_0^2 C^2 A_m^2}} = -\frac{Q}{2\pi f_0 C A_m} \quad (Section98-12)$$

利用式(6)，得：

$$R_2 = -2A_m R_1 = \frac{Q}{\pi f_0 C} \quad (Section98-13)$$

根据式(9)，得：

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{-2A_m}{4Q^2}$$

$$R_3 = -\frac{A_m}{2Q^2 + A_m} R_1$$

(Section98-14)

根据以上分析，可以得出 MFB 窄带通滤波器的设计方法：已知中心频率 f_0 ，品质因数 Q ，峰值增益 A_m ，可以按照如下步骤获得电路参数：

- 1) 根据表 Section84-1，选择两个相等的电容器 C ；
- 2) 根据式(Section98-12)，计算电阻 R_1 ；
- 3) 根据式(Section98-13)，计算电阻 R_2 ；
- 4) 根据式(Section98-14)，计算电阻 R_3 ；

Sallen-Key 型窄带通滤波器存在设计限制， Q 值受制于峰值增益，要实现指定 Q 值，指定峰值增益的窄带通，只能在滤波器环节先满足 Q 值，然后增加一个运放组成的增益电路。而 MFB 型窄带通滤波器，则几乎没有限制，它可以实现中心频率 f_0 ，品质因数 Q ，峰值增益 A_m 的完全独立设计。

唯一需要注意的是，从(Section98-14)可以看出，分母项必须大于 0，否则就会出现负电阻，因此有如下限制：

$$2Q^2 + A_m > 0$$

A_m 本身为负值，则有：

$$|A_m| < 2Q^2$$

绝大多数情况下，这个条件都是成立的，因此，约束也是白约束。

将 MFB 通用结构中的 Z 用图 Section98-11 电路中的阻容取代，就形成了另一种窄带通滤波器。注意，图中 Z_2 不存在了，用无穷大阻抗表示。

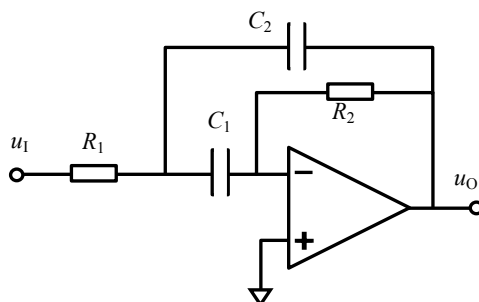


图 Section98-11 MFB 型窄带通滤波器之二

替换内容见下表。

公式表示	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
电路实物	R_1	∞	C_1	R_2	C_2
带入表达式	R_1	∞	$[1/SC_1]$	R_2	$1/SC_2$

将 $Z_1 \sim Z_5$ 用表中表达式代替，利用式(Section98-8)，得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{A} = \frac{\dot{M}}{\dot{F}} &= \frac{-Z_4 Z_5}{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_1 Z_5 + Z_3 Z_5} = \frac{-R_2 \frac{1}{sC_2}}{R_1 \frac{1}{sC_1} + R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{sC_2} + \frac{1}{s^2 C_1 C_2}} \\
 &= -\frac{SR_2 C_1}{1 + S(C_1 + C_2)R_1 + S^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \\
 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{S(C_1 + C_2)R_1}{1 + S(C_1 + C_2)R_1 + S^2 R_1 R_2 C_1 C_2}
 \end{aligned}$$

写出频域表达式为：

$$A(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{j\omega(C_1 + C_2)R_1}{1 + j\omega(C_1 + C_2)R_1 + (j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

设：

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

(Section98-15)

则有：

$$\begin{aligned}
 A(j\omega) &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{j\omega \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} (C_1 + C_2)R_1}{1 + j\omega \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} (C_1 + C_2)R_1 + j\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}}\right)^2} \\
 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{(C_1 + C_2)R_1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{(C_1 + C_2)R_1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = A_m \times \frac{\frac{1}{Q} j\Omega}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}
 \end{aligned}$$

上式为一个标准窄带通滤波器的表达式，可以看出：

$$A_m = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

(Section98-16)

$$\frac{1}{Q} = \frac{(C_1 + C_2)R_1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

即

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(C_1 + C_2)R_1} = \frac{R_2 C_1}{(C_1 + C_2)R_1} \times \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} = -A_m \times \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}}$$

(Section98-17)

为了进一步简化设计，设两个电容相等为 C，对中心频率表达式，有：

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_1 R_2}} \\
 R_1 R_2 &= \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2}
 \end{aligned}$$

(10)

对峰值增益表达式，有：

$$\begin{aligned}
 A_m &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{C_1}{C_1 + C_2} = -\frac{R_2}{2R_1} \\
 R_2 &= -2A_m R_1
 \end{aligned}$$

(11)

对品质因数表达式，有：

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(C_1 + C_2) R_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{-2A_m} \quad [12]$$

由此可见，此电路的品质因数与峰值增益完全相关，不能独立选择。这个结果与 Sallen-Key 型窄带通滤波器相同。但比较可悲的是，要想达到较高的品质因数 Q ，就必须具备很高的峰值增益——两者是开根号关系，这对运放的能力要求就很高。

因此，这个电路虽然也出现在不同的教科书或者参考资料中，但它不实用。

举例 3：

设计一个 MFB 型窄带通滤波器。要求，只能使用一只运放，滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=10$ ，峰值增益为-10。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：采用窄带滤波器 MFB 型之一电路。设计过程如下：

1) 根据表 Section84-1，选择两个相等的电容器 $C=1\mu\text{F}$ ；

2) 根据式(Section98-12)，计算电阻 R_1 ；

$$R_1 = -\frac{Q}{2\pi f_0 C A_m} = -\frac{10}{6.2832 \times 50 \times 1 \times 10^{-6} \times (-10)} = 3183\Omega$$

根据表 Section84-2，取 E96 系列电阻 $R_1 = 3.16\text{k}\Omega$ 。

3) 根据式(Section98-13)，计算电阻 R_2 ；

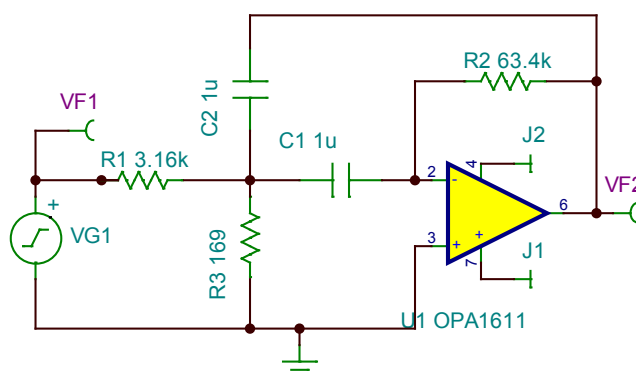
$$R_2 = -2A_m R_1 = 63660\Omega$$

根据表 Section84-2，取 E96 系列电阻 $R_2 = 63.4\text{k}\Omega$ 。

4) 根据式(Section98-14)，计算电阻 R_3 ；

$$R_3 = -\frac{A_m}{2Q^2 + A_m} R_1 = -\frac{-10}{200 + (-10)} \times 3183 = 167.5\Omega$$

根据表 Section84-2，取 E96 系列电阻 $R_3 = 169\Omega$ 。据此，电路如下图所示。



仿真结果如下：

1) 中心频率 $f_0=49.9\text{Hz}$ ；峰值增益为 $A_m=20.03\text{dB}$ 。

2) -3.01dB 即实际增益为 17.02dB 发生在：

$$f_L = 47.46\text{Hz}; \quad f_H = 52.48\text{Hz}; \quad \Delta f = f_H - f_L = 5.02\text{Hz}$$

3) Q 值为：

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{49.9}{5.02} = 9.940$$

实际仿真结果与设计期望较为吻合。

双运放窄带通(Dual Amplifiers Band Pass-DABP)

用两个运放也可组成窄带通滤波器，这种滤波器与前述的单运放窄带通相比，稳定性更强，设计也更为容易，使用更为广泛。电路如图 Section98-12 所示。

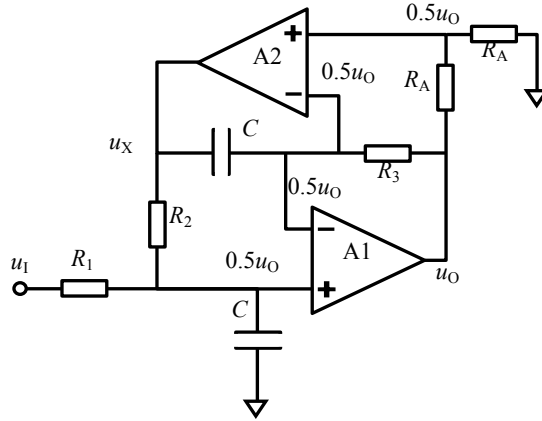


图 Section98-12 双运放窄带通电路一

图中两个电阻 R_A 负责将输出信号衰减 0.5 倍，由于虚短，两个运放的正负输入端均为 0.5 倍输出。由此，以运放 A2 为核心，可以求出图中 u_x 点的复频域表达式：

$$\frac{U_o - 0.5U_o}{R_3} = \frac{0.5U_o - U_x}{\frac{1}{SC}}$$

$$U_x = \frac{0.5U_o R_3 - 0.5U_o \frac{1}{SC}}{R_3} = U_o \left(0.5 - \frac{0.5}{SR_3 C} \right)$$

对运放 A1 的正输入端，列出电流方程：

$$\frac{U_i - 0.5U_o}{R_1} + \frac{U_x - 0.5U_o}{R_2} = 0.5U_o SC$$

$$U_i R_2 = 0.5U_o R_2 + \frac{0.5U_o}{SR_3 C} R_1 + 0.5U_o SC R_1 R_2$$

$$A(S) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2}{0.5R_2 + 0.5SC R_1 R_2 + \frac{0.5R_1}{SR_3 C}} = \frac{\frac{SR_3 C}{0.5R_1} \times R_2}{1 + 0.5R_2 \frac{SR_3 C}{0.5R_1} + 0.5SC R_1 R_2 \frac{SR_3 C}{0.5R_1}}$$

$$= 2 \frac{S \frac{R_2 R_3}{R_1} C}{1 + S \frac{R_2 R_3}{R_1} C + S^2 C^2 R_2 R_3}$$

写出频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = 2 \frac{j\omega \frac{R_2 R_3}{R_1} C}{1 + j\omega \frac{R_2 R_3}{R_1} C + (j\omega)^2 C^2 R_2 R_3}$$

设：

$$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_2 R_3}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_2 R_3}}$$

[Section98-18]

$$\begin{aligned}
 A(j\omega) &= 2 \frac{j\omega \frac{R_2 R_3}{R_1} C \times \frac{C \sqrt{R_2 R_3}}{C \sqrt{R_2 R_3}}}{1 + j\omega \frac{R_2 R_3}{R_1} C \times \frac{C \sqrt{R_2 R_3}}{C \sqrt{R_2 R_3}} + (j\omega)^2 C^2 R_2 R_3} = 2 \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \\
 &= A_m \times \frac{j\Omega \times \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \times \frac{1}{Q} + j\Omega^2}
 \end{aligned}$$

可知：

$$A_m = 2 \quad \text{[Section98-19]}$$

$$Q = \frac{R_1}{\sqrt{R_2 R_3}} \quad \text{[Section98-20]}$$

可以看出， R_2 和 R_3 地位完全相同，因此在电路中可以取等值 R 。此时对中心频率有：

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_2 R_3}} = \frac{1}{2\pi RC} \\
 R &= \frac{1}{2\pi f_0 C} \quad \text{[Section98-21]}
 \end{aligned}$$

对品质因数，有：

$$Q = \frac{R_1}{\sqrt{R_2 R_3}} = \frac{R_1}{R} \quad \text{[Section98-22]}$$

据此，可得此滤波器的设计步骤为：

- 1) 根据表 Section84-1，选择电容器 C ；
- 2) 根据式[Section98-21]，计算电阻 R ，且

$$R_2 = R_3 = R$$
- 3) 根据式[Section98-22]，计算电阻 R_1 ；
- 4) 为了减少电阻种类，一般可以选择 $R_A=R$ 。

从上述步骤可以看出，这种电路的参数计算极为简单， $1/2\pi RC$ 为中心频率， Q 值是多少， R_1 就是 R 的多少倍，而峰值增益是固定的 2 倍。这个特点，是前述任何窄带通滤波器都不具备的，我估计这也是此电路大行其道的一个主要原因。

举例 4：

设计一个基于 DABP 的高稳定性的窄带通滤波器。要求，不限制运放个数，滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=20$ ，峰值增益为 10。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：以 DABP 为核心的窄带通滤波器，其峰值增益为固定值 2，而题目要求是 10，因此需要增加一级 5 倍增益放大器。这个简单。我们先设计 DABP。

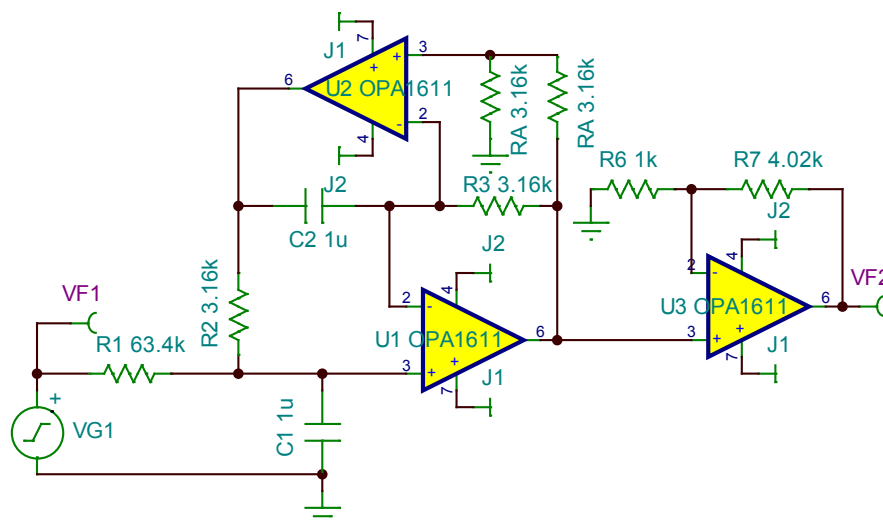
- 1) 选择 $C=1\mu F$ ；
- 2)

$$R_2 = R_3 = R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 50 \times 1 \times 10^{-6}} = 3183\Omega$$

3) $R_1 = QR = 63660\Omega$

4) 根据 E96 系列电阻值, 选择 $R_1=63.4k\Omega$, $R_2=R_3=R_A=3.16k\Omega$ 。

最后, 用 $1k\Omega$ 对 $4.02k\Omega$ 设计一个 5.02 倍增益同相比值器, 形成最终电路如下图所示。



中心频率 $f_0=50.37\text{Hz}$; 峰值增益为 $A_m=20.04\text{dB}$ 。-3.01dB 即实际增益为 17.03dB 发生在:
 $f_L = 49.13\text{Hz}$; $f_H = 51.63\text{Hz}$; $\Delta f = f_H - f_L = 2.50\text{Hz}$
 $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{50.37}{2.50} = 20.15$

实际仿真结果与设计期望较为吻合。

DABP 的增益改变

图 Section98-12 所述的 DABP 电路优点明显, 电路稳定、计算简单、参数独立, 但缺点是增益无法改变。对电路实施改造, 可以在一定范围内改变增益。图 Section98-13 电路, 可使峰值增益在 0~2 内调节。

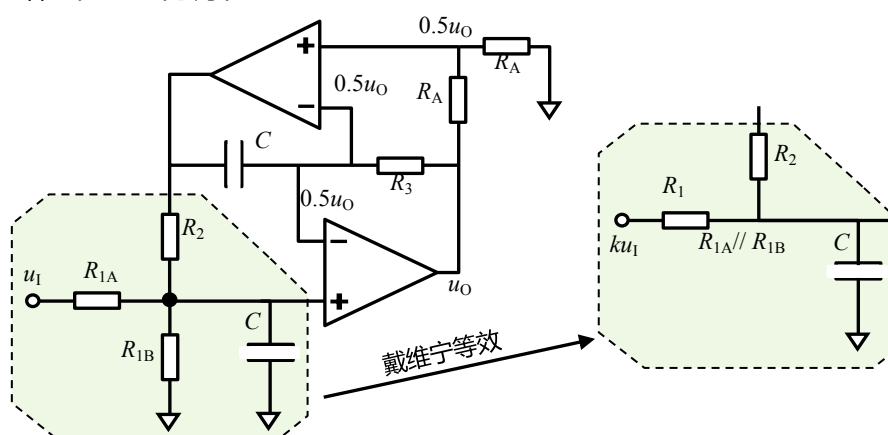


图 Section98-13 双运放窄带通电路二

在保持中心频率, 品质因数不变的情况下, 希望增益不再是 2, 而是 G , 一个小于 2 的值, 那么可以将原图中的 R_1 由图 Section98-13 中的两个电阻 R_{1A} 、 R_{1B} 取代。分析方法为:

$$R_1 = R_{1A} // R_{1B} = \frac{R_{1A} R_{1B}}{R_{1A} + R_{1B}}$$

$$k = \frac{G}{2} = \frac{R_{1B}}{R_{1A} + R_{1B}}$$

第二行表达式的含义是，在戴维宁等效后，电路结构就变成了 DABP 标准电路，事先的输入变成了 ku_i ，当增益为 2 时， $k=1$ ，增益为 G 时， k 应为 $G/2$ 。

根据上述两个式子，可得：

$$\begin{cases} R_{1A} = \frac{2}{G} \times R_1 \\ R_{1B} = \frac{2}{2-G} \times R_1 \end{cases}$$

[Section98-23]

这样，我们就可以在 DABP 标准电路基础上，通过将电阻 R_1 拆分成 R_{1A} 和 R_{1B} ，实现 0~2 倍的峰值增益。

那么，能否通过其他方法使得增益大于 2 呢？这看起来是一个挑战。

观察电路，利用反馈思想，我们可以发现，运放 A2 电路其实就是 A1 反馈环的一部分，A2 的入端实施了两个相等电阻分压，即 0.5 倍衰减，是最终造成了峰值增益等于 2 的本质原因。我们可以猜想，如果分压系数不是 0.5，而是小于 0.5 的 k ，可否实现最终的峰值增益为大于 2 的 $1/k$ 呢？

所有的猜想，都需要进一步的验证。我们首先进行理论分析。电路如图 Section98-14 所示，与标准 DABP 电路的唯一区别在于：原电路的两个 R_A ，被 R_A 、 R_B 取代，形成的分压系数由 0.5 变为 k 。与标准 DABP 电路分析方法相同，过程如下：

$$\frac{U_O - kU_O}{R_3} = \frac{kU_O - U_X}{\frac{1}{SC}}, \text{解得 } U_X = U_O \left(k - \frac{1-k}{SR_3C} \right)$$

对运放 A1 的正输入端，列出电流方程：

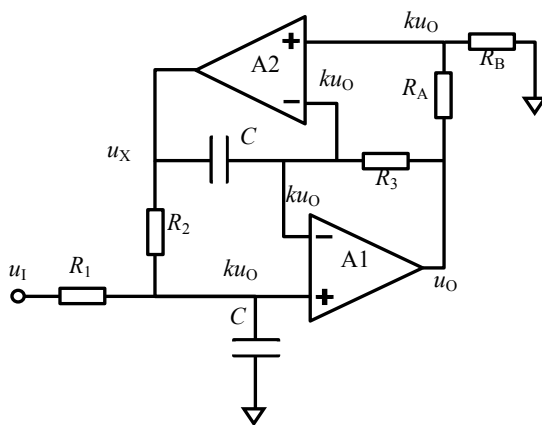


图 Section98-14 双运放窄带通电路三

$$\begin{aligned} \frac{U_i - kU_O}{R_1} + \frac{U_X - kU_O}{R_2} &= kU_O SC \\ U_i R_2 - kU_O R_2 + U_X R_1 - kU_O R_1 &= kU_O SC R_1 R_2 \\ U_i R_2 &= kU_O SC R_1 R_2 + kU_O R_2 - U_O \left(k - \frac{1-k}{SR_3C} \right) R_1 + kU_O R_1 \\ &= kU_O SC R_1 R_2 + kU_O R_2 + U_O \frac{1-k}{SR_3C} R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(S) = \frac{U_o}{U_i} &= \frac{R_2}{kSCR_1R_2 + kR_2 + \frac{1-k}{SR_3C}R_1} = \frac{R_2 \times \frac{SR_3C}{(1-k)R_1}}{1 + kR_2 \frac{SR_3C}{(1-k)R_1} + kSCR_1R_2 \frac{SR_3C}{(1-k)R_1}} \\
 &= \frac{S \frac{R_2R_3C}{(1-k)R_1}}{1 + S \frac{kR_2R_3C}{(1-k)R_1} + S^2C^2 \frac{kR_2R_3}{(1-k)}}
 \end{aligned}$$

由于电阻 R_2 和 R_3 在表达式中地位完全相同，为简化设计，可用相同电阻 R 取代。

$$A(S) = \frac{S \frac{R^2C}{(1-k)R_1}}{1 + S \frac{kR^2C}{(1-k)R_1} + S^2R^2C^2 \frac{k}{(1-k)}}$$

写出频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{R^2C}{(1-k)R_1}}{1 + j\omega \frac{kR^2C}{(1-k)R_1} + (j\omega)^2 R^2C^2 \frac{k}{(1-k)}}$$

设：

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= \frac{1}{RC \sqrt{\frac{k}{(1-k)}}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC \sqrt{\frac{k}{(1-k)}}} \\
 \dot{A}(j\omega) &= \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{R^2C}{(1-k)R_1} \frac{1}{RC \sqrt{\frac{k}{(1-k)}}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{kR^2C}{(1-k)R_1} \frac{1}{RC \sqrt{\frac{k}{(1-k)}}} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{1}{k} \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{R}{R_1} \sqrt{\frac{k}{(1-k)}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{R}{R_1} \sqrt{\frac{k}{(1-k)}} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \\
 &= A_m \times \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}
 \end{aligned}$$

这是一个标准窄带通滤波器表达式，可知：

$$A_m = \frac{1}{k} \quad (13)$$

$$Q = \frac{R_1}{R} \sqrt{\frac{1-k}{k}} \quad (14)$$

在已知 f_0 ， A_m ， Q 的情况下，如何选择电阻、电容以实现设计要求，分析如下：

对峰值增益表达式，可得：

$$k = \frac{1}{A_m}$$

根据电路可知：

$$k = \frac{R_B}{R_A + R_B}$$

任选 R_B ，则：

$$\begin{aligned}
 kR_A &= R_B - kR_B \\
 R_A &= \frac{1-k}{k} R_B = \frac{1 - \frac{1}{A_m}}{\frac{1}{A_m}} R_B = (A_m - 1)R_B \quad (\text{Section 98 - 24})
 \end{aligned}$$

对中心频率表达式，有：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC \sqrt{\frac{k}{1-k}}}$$

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C \sqrt{\frac{k}{1-k}}} = \frac{\sqrt{A_m - 1}}{2\pi f_0 C} \quad (\text{Section 98-25})$$

对 Q 值表达式，有：

$$Q = \frac{R_1}{R} \sqrt{\frac{1-k}{k}}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{k}{1-k}} QR = \frac{Q}{\sqrt{A_m - 1}} R \quad (\text{Section 98-26})$$

据此，可以给出可变增益型 DABP 的设计方法，即已知 f_0 ， A_m ， Q 的情况下，如何选择电阻、电容：

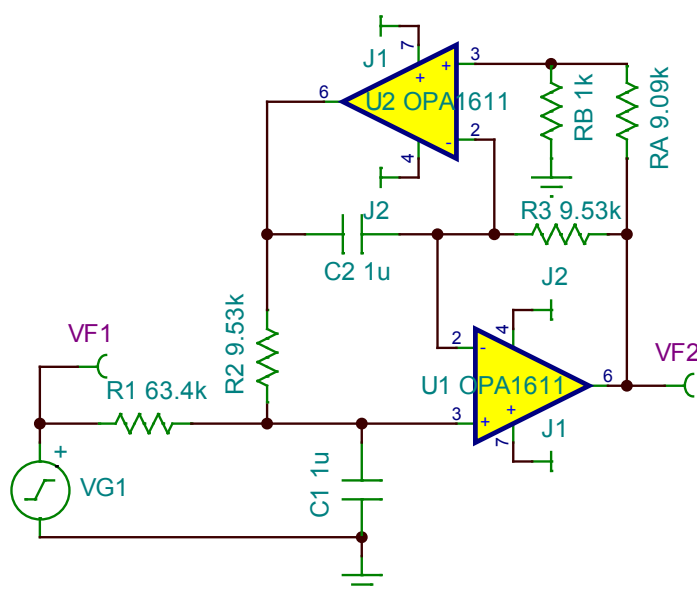
- 1) 根据表 Section 84-1 选择电容 C 。合理选择电阻 R_B 。
- 2) 根据式 (Section 98-24)，获得电阻 R_A 。
- 3) 根据式 (Section 98-25)，获得电阻 R ，且 $R_2 = R_3 = R$ 。
- 2) 根据式 (Section 98-26)，获得电阻 R_1 。

举例 5：

设计一个基于 DABP 的高稳定性的窄带通滤波器。要求，不限制运放个数，滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=20$ ，峰值增益为 10。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：本题与举例 4 要求完全相同。考虑到我们已经有办法改变 DABP 的峰值增益，本例采用图 Section 98-14 电路，利用前述的步骤，解出：

- 1) 选择电容 $C=1\mu\text{F}$ 。选择电阻 $R_B=1\text{k}\Omega$ ，这是一个适中安全的电阻值。
- 2) 计算 $R_A=9\text{k}\Omega$ ，按照 E96 系列选取 9.09k Ω 。
- 3) 计算 $R=9549\Omega$ ，按照 E96 系列选取 9.53k Ω 。



4) 计算 $R_1=63661\Omega$ ，按照 E96 系列选取 $63.4k\Omega$ 。据此形成电路如下图。

仿真结果为：中心频率 $f_0=50.35\text{Hz}$ ；峰值增益为 $A_m=20.08\text{dB}$ 。-3.01dB 即实际增益为 17.03dB 发生在： $f_L = 49.11\text{Hz}$ ； $f_H = 51.62\text{Hz}$ ； $\Delta f = f_H - f_L = 2.51\text{Hz}$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{50.35}{2.51} = 20.06$$

仿真结果与设计期望较为吻合。

对比举例 4，此电路少了一个运放，当然有价值。

含正反馈的 MFB 窄带通

在 MFB 通用结构中，如果 Z_2 不接地，而连成如图 Section98-15 所示，就在原电路基础上引入了正反馈。正反馈判断依据如图中红色环线所示。

先求解反馈系数 \dot{F} ，即输出在运放负输入的分压系数，它由三路叠加形成：一路通过 Z_4 ，此时应将 Z_5 的顶端接地， Z_2 的底端接地，形成 \dot{F}_4 ；另一路通过 Z_5 ，此时应将 Z_4 的右端接地， Z_2 的底端接地，形成 \dot{F}_5 ；第三路通过放大器 $-G$ ，此时应将 Z_4 的右端接地， Z_5 的顶端接地，形成 \dot{F}_2 ：

$$\begin{aligned}\dot{F}_4 &= \frac{Z_3 + Z_5 // Z_1 // Z_2}{Z_4 + Z_3 + Z_5 // Z_1 // Z_2} = \frac{Z_3 + \frac{Z_5 Z_1 Z_2}{Z_5 Z_1 + Z_5 Z_2 + Z_1 Z_2}}{Z_4 + Z_3 + \frac{Z_5 Z_1 Z_2}{Z_5 Z_1 + Z_5 Z_2 + Z_1 Z_2}} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5} \\ \dot{F}_5 &= \frac{Z_1 // Z_2 // (Z_3 + Z_4)}{Z_5 + Z_1 // Z_2 // (Z_3 + Z_4)} \times \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}\end{aligned}$$

\dot{F}_4 与 \dot{F}_5 的分压结构完全相同，只是 Z_5 和 Z_2 互换了位置，且带一个增益：

$$\dot{F}_2 = \frac{-G \times Z_1 Z_5 Z_4}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}$$

总的反馈系数，由两者相加得到：

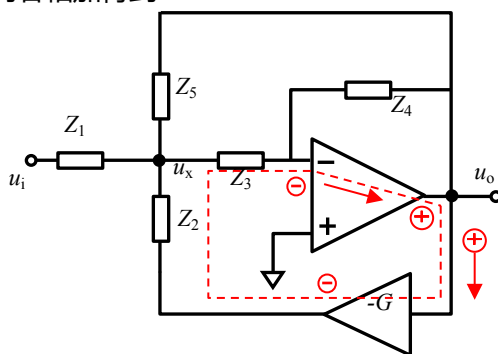


图 Section98-15 含正反馈的 MFB 型滤波器通用结构

$$\dot{F} = \dot{F}_4 + \dot{F}_5 + \dot{F}_2 = \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 - G \times Z_1 Z_5 Z_4}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}$$

可以看出，从 Z_2 支路回送的反馈，属于正反馈，它起到了与负反馈相反的作用，稳定性下降，但增益提升。特别是，正反馈的引入，有望让反馈系数等于 0，以营造无穷大增益的可能性，这是引入正反馈的主要原因。

衰减系数 \dot{M} 与 \dot{F}_5 的分压结构完全相同，只是 Z_5 和 Z_1 互换了位置，且带一个负号：

$$\dot{M} = -\frac{Z_5 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5}$$

根据本书第 3 章关于方框图法内容，可知：

$$\dot{A} \approx \frac{\dot{M}}{\dot{F}} = -\frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 - G \times Z_1 Z_5 Z_4} \quad (\text{Section98-27})$$

这是含正反馈 MFB 通用结构的增益表达式。

用这种方法构造的含正反馈的 MFB 型窄带通滤波器如图 Section98-16 所示。元件替换内容见下表。

公式表示	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
电路实物	R_1	R_3	C_1	R_2	C_2
带入表达式	R_1	R_3	$[1/SC_1]$	R_2	$1/SC_2$

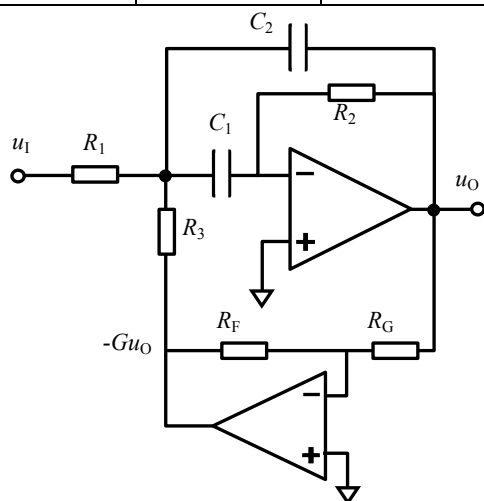


图 Section98-16 含正反馈的 MFB 型窄带通滤波器

将 $Z_1 \sim Z_5$ 用表中表达式代替，利用式(Section98-27)，得到：

$$\begin{aligned} \dot{A} = \frac{\dot{M}}{\dot{F}} &= \frac{-Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 - G \times Z_1 Z_5 Z_4} \\ &= \frac{-R_2 R_3 \frac{1}{SC_2}}{R_1 R_3 \frac{1}{SC_1} + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_3 \frac{1}{SC_2} + \frac{R_1 + R_3}{S^2 C_1 C_2} - GR_1 R_2 \frac{1}{SC_2}} \\ &= \frac{-R_2 R_3 \times \frac{SC_1}{R_1 + R_3}}{1 + (\frac{C_2}{C_1} + 1 - G \frac{R_2}{R_3}) \frac{SC_1 R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_1 R_2 R_3 \frac{S^2 C_1 C_2}{R_1 + R_3}} \\ &= \frac{-R_2 R_3 \times \frac{SC_1}{R_1 + R_3}}{1 + m \frac{SC_1 R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_1 R_2 R_3 \frac{S^2 C_1 C_2}{R_1 + R_3}} \end{aligned}$$

其中：

$$m = (\frac{C_2}{C_1} + 1 - G \frac{R_2}{R_3}) = \frac{C_2 R_3 + C_1 R_3 - GC_1 R_2}{C_1 R_3}$$

写成频域表达式，为：

$$\dot{A}(j\omega) = -\frac{1}{m} \frac{j\omega \frac{mC_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3}}{1 + j\omega \frac{mC_1 R_1 R_3}{R_1 + R_3} + (j\omega)^2 \frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}}$$

设：

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \quad \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(R_1//R_3)R_2 C_1 C_2}} \quad (\text{Section98-28})$$

则有：

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= -\frac{1}{m} \times \frac{R_2}{R_1} \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{m C_1 R_1 R_3}{R_1 + R_3} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{m C_1 R_1 R_3}{R_1 + R_3} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3}}} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ &= -\frac{1}{m} \times \frac{R_2}{R_1} \frac{j\Omega \times m \sqrt{\frac{C_1 R_1 R_3}{C_2 R_2 (R_1 + R_3)}}}{1 + j\Omega \times m \sqrt{\frac{C_1 R_1 R_3}{C_2 R_2 (R_1 + R_3)}} + (j\Omega)^2} = A_m \times \frac{\frac{1}{Q} j\Omega}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2} \end{aligned}$$

上式为一个标准窄带滤波器的表达式，可以看出：

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{m} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{C_1 R_3}{C_2 R_3 + C_1 R_3 - G C_1 R_2} \quad (\text{Section98 - 29}) \\ \frac{1}{Q} &= m \sqrt{\frac{C_1 R_1 R_3}{C_2 R_2 (R_1 + R_3)}} = \frac{C_2 R_3 + C_1 R_3 - G C_1 R_2}{C_1 R_3} \sqrt{\frac{C_1 R_1 R_3}{C_2 R_2 (R_1 + R_3)}} \\ Q &= \frac{C_1 R_3}{C_2 R_3 + C_1 R_3 - G C_1 R_2} \sqrt{\frac{C_2 R_2 (R_1 + R_3)}{C_1 R_1 R_3}} \quad (\text{Section98 - 30}) \end{aligned}$$

当 $C_1 = C_2 = C$ ， $R_1 = R_2 = R$ ，有下式成立：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(R_1//R_3)R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{2\pi C R \sqrt{\frac{R_3}{R + R_3}}} \quad (16)$$

$$A_m = -\frac{R_3}{2R_3 - GR} \quad (17)$$

$$Q = \frac{R_3}{2R_3 - GR} \sqrt{\frac{R + R_3}{R_3}} \quad (18)$$

可以看出，当选择电压增益 G ，可以使得 Q 的分母接近于 0，使得 Q 出现非常大的理论值，甚至，理论上 Q 可以达到无穷大。当然，此时峰值增益也会随着变大。LF357 数据手册上给出了一个高 Q 值带通滤波器电路如图 Section98-17 所示。

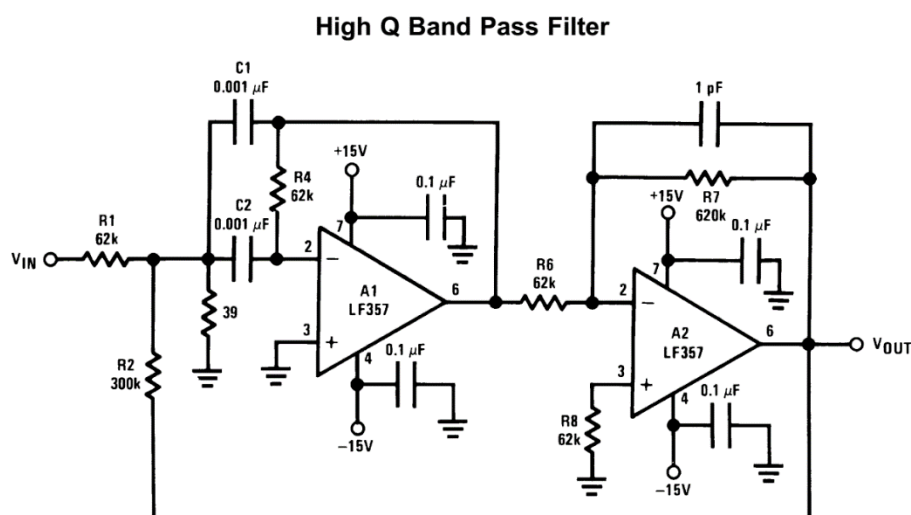


图 Section98-17

文氏电路

本节最后，介绍文氏(Wien)电路。该电路由两个相同的电阻、两个相同的电容组成，能实现选频作用。文氏电路来源于文氏电桥。

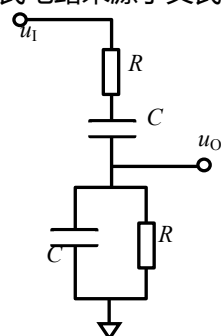


图 Section98-18 文氏带通

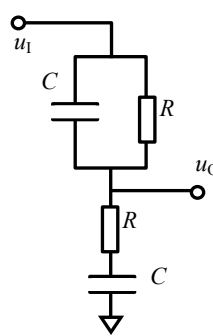


图 Section98-19 文氏带阻

图 Section98-18 是一个带通滤波器。其传函为：

$$A_{wien_bp}(S) = \frac{R // \frac{1}{SC}}{R + \frac{1}{SC} + R // \frac{1}{SC}} = \frac{\frac{R}{SRC + 1}}{R + \frac{1}{SC} + \frac{R}{SRC + 1}} = \frac{SRC}{S^2 R^2 C^2 + 3SRC + 1}$$

写作频率表达式为：

$$\dot{A}_{wien-bp}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} \quad (\text{Section98-31})$$

这是一个标准窄带通滤波器表达式，其品质因数为：

$$Q = \frac{1}{3}$$

峰值增益发生在：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

此时，有：

$$\dot{A}_{wien-bp}(j\omega) = \frac{1}{3} \times \frac{3j}{1 + 3j + (j)^2} = \frac{1}{3}$$

即其峰值增益为 1/3，相角为 0 度。图 Section98-20 是特征频率为 1Hz 的文氏带通电

路的频率特性。

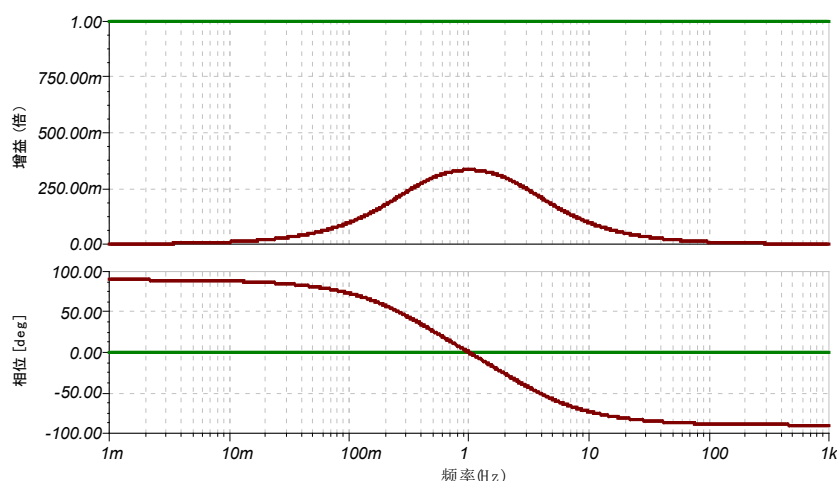


图 Section98-20 文氏带通的频率特性

图 Section98-19 是一个非标准的带阻滤波器。其传函为：

$$A_{wien_br}(S) = \frac{R + \frac{1}{SC}}{R + \frac{1}{SC} + R // \frac{1}{SC}} = \frac{\frac{1 + SRC}{SC}}{\frac{1 + SRC}{SC} + \frac{R}{SRC + 1}} = \frac{\frac{(1 + SRC)^2}{SC(SRC + 1)}}{\frac{S^2 R^2 C^2 + 3SRC + 1}{SC(SRC + 1)}} = \frac{1 + 2SRC + S^2 R^2 C^2}{1 + 3SRC + S^2 R^2 C^2}$$

写作频率表达式为：

$$A_{wien-br}(j\omega) = \frac{1 + 2j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} \quad (\text{Section98} - 32)$$

它具有最低增益点，发生在：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

此时，有：

$$A_{wien-bp}(j\omega) = \frac{1 + 2j + (j)^2}{1 + 3j + (j)^2} = \frac{2}{3}$$

即其谷值增益为 2/3，相角为 0 度。图 Section98-21 为其频率特性。

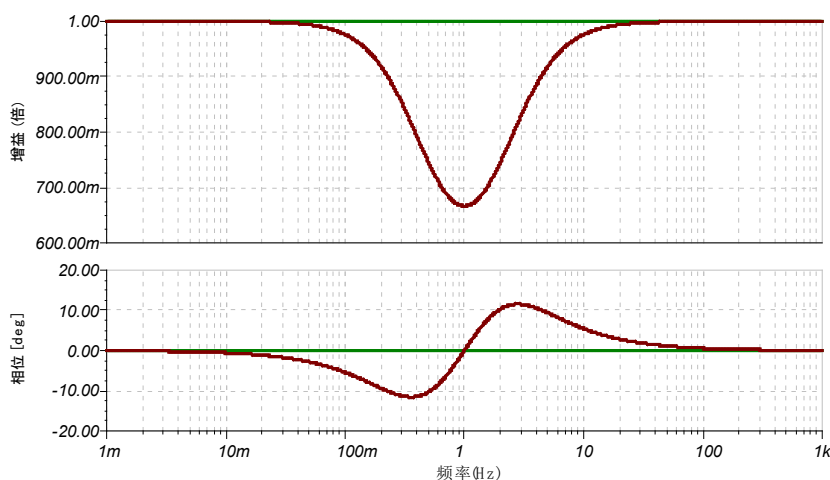


图 Section98-21 文氏带阻的频率特性

4.6. 运放组成陷波器

带阻滤波器，Band Stop Filter，或者叫 Band Reject Filter，它本质定义是，阻断某一连续频率范围的信号，而让其它频率信号通过。当阻断频率很窄时，通常叫陷波器，英文为 Notch，它只有一个中心频率，以及相应的 Q 值。当阻断频率范围很宽时，通常需要两个频率点 f_L 和 f_H ，理论上介于 f_L 和 f_H 之间的频率信号将被滤除，这叫双频点带阻滤波器。双频点带阻滤波器很简单，本节重点研究陷波器。

Section99. 双频点带阻滤波器——宽带阻

这很容易让我们想起 Section97——双频点带通滤波器：一个高通滤波器，和一个低通滤波器实施串联——即两级相乘，当高通环节的下限截止频率 f_L ，小于低通环节的上限截止频率 f_H ，就形成了双频点带通滤波器。双频点带阻滤波器与此类似：一个高通滤波器，和一个低通滤波器实施并联——即两个环节相加，当高通环节的下限截止频率 f_L ，大于低通环节的上限截止频率 f_H ，就形成了双频点带阻滤波器，如图 Section99-1 所示。

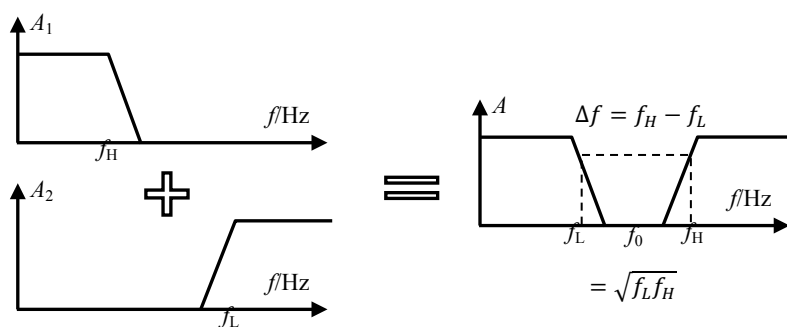


图 Section99-1 双频点带阻滤波器形成原理

图 Section99-2 电路由三个运放组成，前面两个运放分别实现独立的二阶高通、低通 SK 型滤波器，最后的运放通过两个相等电阻 R_{ADD} 实现两者的加法。这没什么讲的。

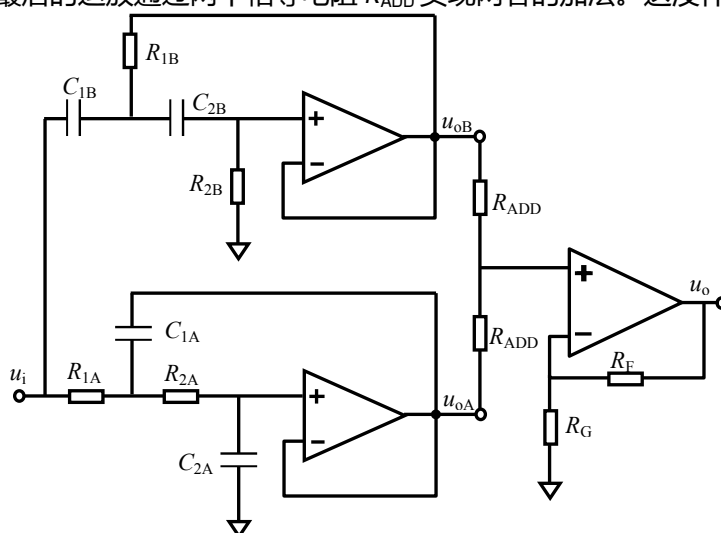


图 Section99-2 三个运放组成的双频点二阶带阻滤波器

不要试图在加法运放环节实施低通、或者高通滤波，想减少一个运放，这是妄想。

Section100. 陷波器——窄带阻滤波器

回顾传函

在 Section82 中，介绍了标准陷波器的传函和频率表达式。本节列出频率表达式如下。

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section82-5})$$

从上式可以看出，当相对频率 Ω 接近于 0 时，含 Ω 项近似为 0，增益为 A_m 。当相对频率 Ω 接近于无穷大时，其决定作用的是 Ω^2 项，分子分母是相同的，最终增益仍为 A_m 。当相对频率 $\Omega=1$ 时，也就是特征频率处，分子为 0，分母不为 0，总体表现为 0，即陷波效果。这是一个标准的陷波器。

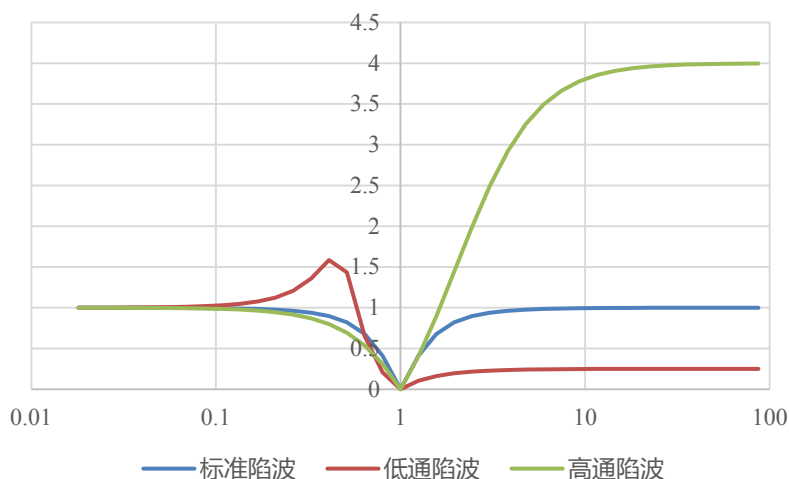
另外，陷波器还有两种非标准表现，其共同的表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\sqrt{k}\Omega)^2} \quad (\text{Section82-5a})$$

它与标准陷波器的区别在于分子、分母具有不同的特征频率点。当相对频率 Ω 接近于 0 即低频时，含 Ω 项近似为 0，增益仍为 A_m 。当相对频率 Ω 接近于无穷大时，其决定作用的是 Ω^2 项，分子分母是不相同的，这导致：

$$|\dot{A}(j\infty)| = A_m \times \frac{(j\infty)^2}{(j\sqrt{k}\infty)^2} = A_m/k$$

当 $k>1$ ，此为低通型陷波，当 $k<1$ ，此为高通型陷波。下图为它们的频率响应图。



“1-BP”型陷波器

观察标准陷波器的频率表达式，可以发现，如果 A_m 均为 1，标准陷波器和标准带通滤波器相加，恰好等于 1。标准带通滤波器频率表达式如下：

$$\dot{A}_{BP}(j\Omega) = A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

(Section82-1)

于是，我们可以想到的最简单的陷波器，就是用 1 减去一个带通滤波器。而 1，就是原始输入信号。这就形成了“1-BP”型陷波器。

$$\dot{A}_{BR}(j\Omega) = A_m - A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} = A_m \left(1 - \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} \right) = A_m \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

由于带通滤波器有至少 2 种结构，一类是同相型，如 Sallen-Key 型，以及 DABP 型，它们本身是同相的，用一个标准减法器就可以实现“1-BP”型陷波器；而对于 MFB 型，它本身是反相的，因此用一个标准加法器，可以实现“1-BP”型陷波器，而实现加法器，又有两种方案，同相加法或者反相加法。这样形成的多种“1-BP”型陷波器，结构如图 Section100-1 所示。

对于图中两种特殊的同相型 BP：1 倍和 2 倍，只要按照图中结构，选择相同的电阻，就可以实现 1 倍陷波。

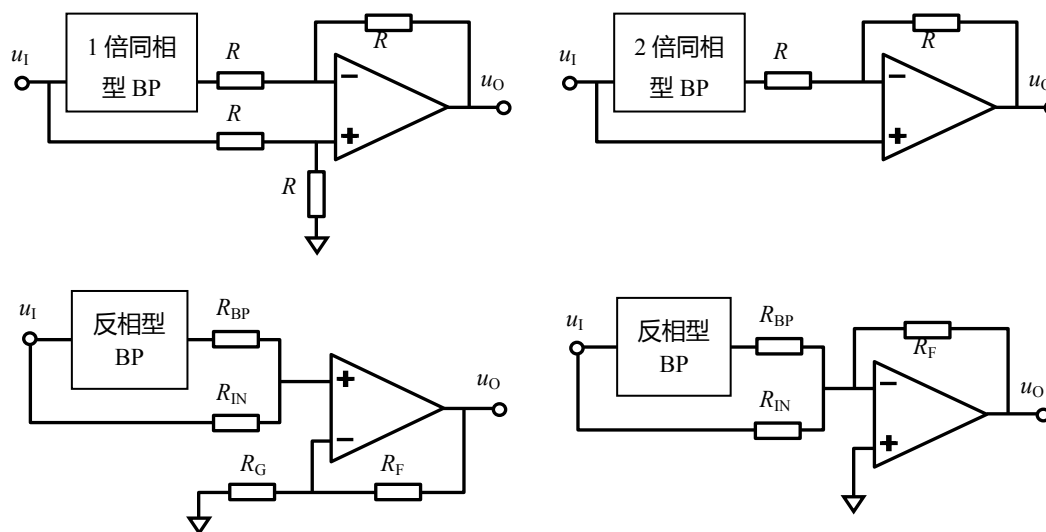


图 Section100-1 “1-BP”型陷波器的几种基本结构

在反相型电路中，可以通过条件电阻 R_{BP} 和 R_1 的比例，以实现加权运算，适应 BP 电路不同的峰值增益。

设带通滤波器的峰值增益为 A_{BP} ，则反相带通滤波器可以简写为：

$$\dot{A}_{BP} = -A_{BP} \dot{B}P$$

其中， \dot{A}_{BP} 是带通滤波器的频率表达式， $\dot{B}P$ 是 1 倍增益标准带通频率表达式， A_{BP} 是带通滤波器的峰值增益，即中心频率处的增益。

而通用的陷波器可以表示为：

$$\dot{A}_{BR} = A_{BR} \dot{B}R$$

其中， A_{BR} 是陷波器的频率表达式， BP 是 1 倍增益标准陷波器频率表达式， A_{BR} 是陷波器的平坦区增益。

这样的话，左下角反相型带通形成的陷波器的频率表达式可以表示为：

$$\dot{A}_{BR} = \dot{A}_O = (1 + \frac{R_F}{R_G})(\frac{R_{BP}}{R_{IN} + R_{BP}} + (-A_{BP}BP)\frac{R_{IN}}{R_{IN} + R_{BP}}) = A_{BR}(1 - BP)$$

只有保证括号内系数相等，才能实现 1-BP，则有：

$$\frac{R_{BP}}{R_{IN} + R_{BP}} = A_{BP} \frac{R_{IN}}{R_{IN} + R_{BP}}$$

任意选择电阻 R_{IN} ，则由上式得：

$$R_{BP} = A_{BP}R_{IN} \quad [a1]$$

而要实现指定的平坦区增益，则有：

$$(1 + \frac{R_F}{R_G})\frac{R_{BP}}{R_{IN} + R_{BP}} = A_{BR}$$

由上式可以解得：

$$(1 + \frac{R_F}{R_G}) = A_{BR} \frac{1 + A_{BP}}{A_{BP}} \quad [a2]$$

图 Section100-1 右下角电路的分析方法与此类似，本书不赘述。

举例 INS1：

利用 Section98 举例 3 所述的 MFB 型窄带通滤波器，设计一个 1-BP 型陷波器，要求中心频率为 50Hz，平坦区增益为 1 倍， $Q=10$ 。

解：对 1-BP 型陷波器，带通滤波器的 Q 值就是陷波器的 Q 值，因此对已经完成的带通滤波器，无需再考虑 Q 值设计问题。

由举例 3 可知，窄带通滤波器的实际峰值增益为 20.03dB，即 $A_{BP}=10.03$ 倍。设 $R_{IN}=1k\Omega$ ，据式[a1]，可得： $R_{BP} = A_{BP}R_{IN} = 10.03k\Omega$ 。

根据题目要求，可知 $A_{BR}=1$ ，利用式[a2]，得：

$$(1 + \frac{R_F}{R_G}) = A_{BR} \frac{1 + A_{BP}}{A_{BP}} = 1 \times \frac{1 + 10.03}{10.03} = 1.0997 \approx 1.1$$

选择电阻 R_F 、 R_G 实现上述要求，是不困难的。选择 $R_F=1k\Omega$ ，则 $R_G=10k\Omega$ 。

至此设计完毕，电路如图 Section100-INS1 所示。

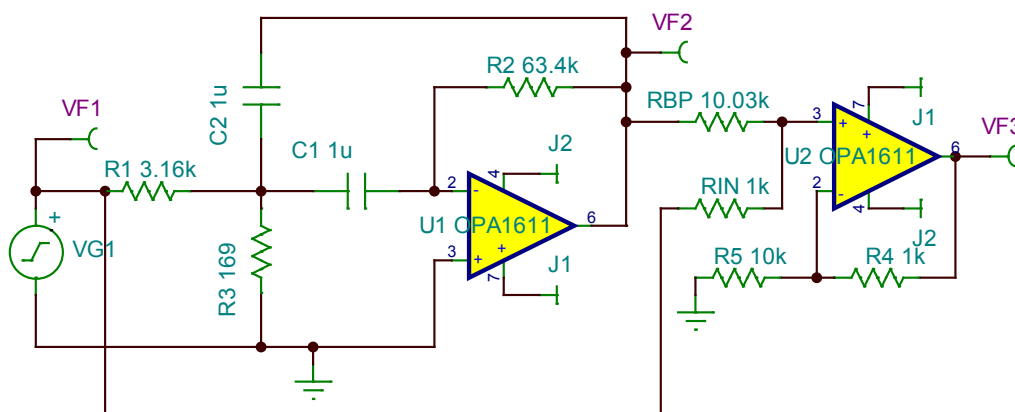


图 Section100-INS1 举例 INS1 电路，MFB 带通组成的 1-BP 型陷波器

当同相型带通的峰值增益既不是 1，也不是 2 时，可以用图 Section100-1a 所示的电路实现陷波。它的 4 个电阻需要精确计算。

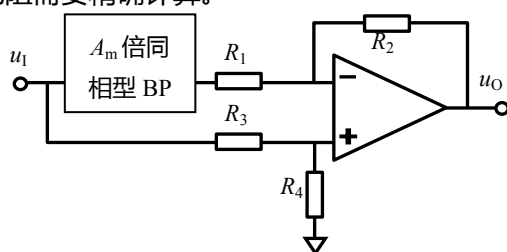


图 Section100-1a 任意增益同相带通组成的“1-BP”型陷波器

当已知带通峰值增益 A_{BP} ，要求陷波器平坦区增益为 A_{BR} ，可以得到如下关系：

$$A_O = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} - A_{BP}BP \frac{R_2}{R_1} = A_{BR}(1 - BP)$$

为保证实现陷波功能，有下式成立：

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} = A_{BP} \frac{R_2}{R_1} = A_{BR}$$

从第 2 项等于第 3 项，可知任选电阻 R_1 ，则有：

$$R_2 = \frac{R_1 A_{BR}}{A_{BP}} \quad (a3)$$

或者任选 R_2 ，则有：

$$R_1 = \frac{R_2 A_{BP}}{A_{BR}} \quad (a4)$$

从第 1 项等于第 3 项，可知：

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} = A_{BR}$$

将式(a3)代入得：

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} = A_{BR} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = A_{BR} \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_1 A_{BR}}{A_{BP}}} = A_{BR} A_{BP} \frac{1}{A_{BR} + A_{BP}} = A_{BR} // A_{BP} \quad (a5)$$

本书采用了一个电阻并联计算符号来表示两个增益的乘加除运算，这不标准，但可以帮助读者快速运算。从式(a4)可以看出，两个增益的并联必须小于 1，这是本电路的硬条件。

由此，任选电阻 R_4 ，可以解得：

$$R_3 = \frac{1 - A_{BR} // A_{BP}}{A_{BR} // A_{BP}} R_4 \quad (a6)$$

或者任选 R_3 ，可以解得：

$$R_4 = \frac{A_{BR} // A_{BP}}{1 - A_{BR} // A_{BP}} R_3 \quad (a7)$$

上述求解过程中，式(a3)和式(a4)是完全相同的，到底使用哪个公式，取决于哪个公式中的系数大于 1。这样做的好处是，任选值通常可以选择为 $1k\Omega$ ，那么另外一个电阻就一定大于 $1k\Omega$ ，这样可以守住电阻最小值的底线——当电阻过小时，容易引起运放输出电流超限。

举例 INS2：

利用 Section98 举例 2 所述的 Sallen-Key 型窄带通滤波器，设计一个 1-BP 型陷波器，要求中心频率为 50Hz，平坦区增益为 1 倍， $Q=10$ 。

解：根据前述 Sallen-Key 型窄带通设计结果，可知其实际峰值增益为 33dB，即 $A_{BP}=44.67$ 倍。题目要求 $A_{BR}=1$ 倍，则 $A_{BP} // A_{BR}=0.978$ ，满足设计硬条件。

设 $R_2=1k\Omega$ ，据式(a4)，可得：

$$R_1 = \frac{R_2 A_{BP}}{A_{BR}} = 44.67k\Omega$$

设 $R_3=1k\Omega$ ，据式(a7)，得：

$$R_4 = \frac{A_{BR} // A_{BP}}{1 - A_{BR} // A_{BP}} R_3 = \frac{0.978}{1 - 0.978} \times 1k\Omega = 44.67k\Omega$$

至此，电路设计完毕，如图 Section100-INS2 所示，仿真结果如图 Section100-INS3 所示。

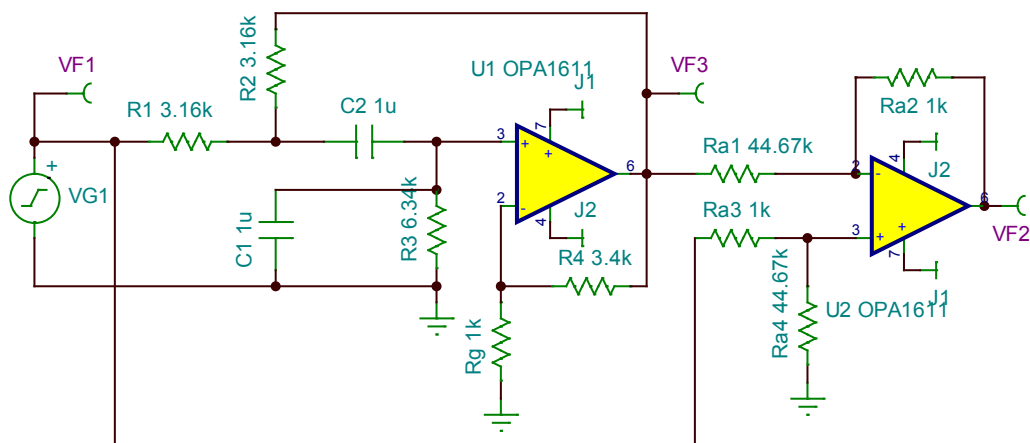


图 Section100-INS2 举例 INS2 电路，Sallen-Key 带通组成的 1-BP 型陷波器

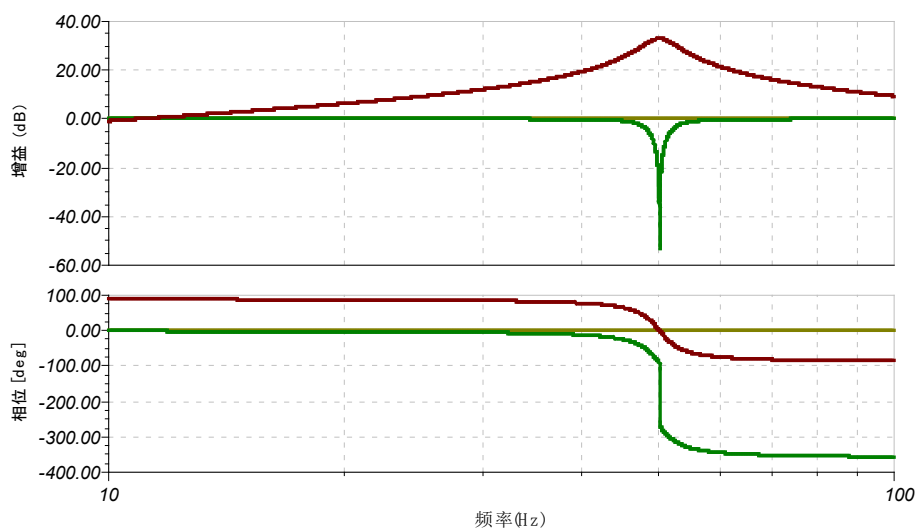


图 Section100-INS3 举例 INS2 电路仿真频率特性

“1-BP”型陷波器，要想完美实现，必须做到带通输出和原始输入，在特征频率处严格相等，不仅幅度相等，还得相位为 0，且减法器电阻严格匹配，这在实用中较难实现。

有源文氏-罗宾逊(Active Wien-Robinson)陷波器

电路如图 Section100-2 所示。图中两个电阻 R 和两个电容 C 组成了文氏电路，设文氏电路的输入为 u_X ，则其输出为 $u_X W_R$ ，这是一个文氏带阻，根据式 Section98-32，有：

$$\dot{A}_{wien-br}(j\omega) = \frac{1 + 2j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} = W_R$$

其后的分析过程如下：

$$\begin{aligned} i_{RA} &= \frac{u_X - u_X W_R}{R_A} \\ u_{2RA} &= i_{RA} \times 2R_A = 2(u_X - u_X W_R) = 2u_X(1 - W_R) \\ u_O &= u_X W_R - u_{2RA} = 3u_X W_R - 2u_X = u_X(3W_R - 2) \end{aligned}$$

即：

$$u_X = \frac{u_O}{3W_R - 2}$$

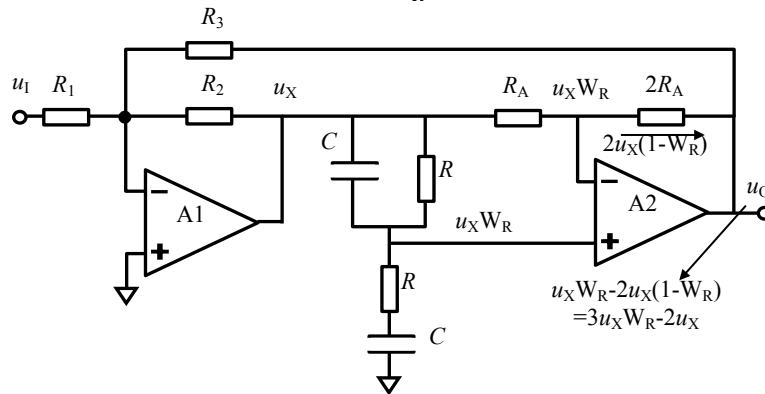


图 Section100-2 有源文氏-罗宾逊陷波器

对运放 A1 的负输入端，列出电流方程为：

$$\begin{aligned} \frac{u_I - 0}{R_1} &= \frac{0 - u_X}{R_2} + \frac{0 - u_O}{R_3} = -\frac{\frac{u_O}{3W_R - 2}}{R_2} - \frac{u_O}{R_3} = u_O \left(\frac{1}{(2 - 3W_R)R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \\ \frac{u_O}{u_I} &= \frac{1}{R_1 \left(\frac{1}{(2 - 3W_R)R_2} - \frac{1}{R_3} \right)} \end{aligned}$$

用频率表达式，则为：

$$\begin{aligned} \dot{A}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_O}{U_I} = \frac{1}{R_1 \left(\frac{1}{(2 - 3W_R)R_2} - \frac{1}{R_3} \right)} = \frac{1}{R_1 \left(\frac{1}{2 - 3 \frac{1 + 2j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2}} - \frac{1}{R_3} \right)} \\ &= \frac{1}{R_1 \left(\frac{1}{\frac{-1 - (j\omega)^2 R^2 C^2}{(1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2)} R_2} - \frac{1}{R_3} \right)} \\ &= -\frac{1}{R_1 \left(\frac{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + (j\omega)^2 R^2 C^2} \frac{R_3}{R_2 R_3} + \frac{R_2}{R_2 R_3} \frac{1 + (j\omega)^2 R^2 C^2}{1 + (j\omega)^2 R^2 C^2} \right)} \\ &= -\frac{R_2 R_3}{R_1 (1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2) R_3 + (1 + (j\omega)^2 R^2 C^2) R_2} \\ \dot{A}(j\omega) &= -\frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3)} \times \frac{1 + (j\omega)^2 R^2 C^2}{\left(1 + \frac{3R_3}{(R_2 + R_3)} j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2 \right)} \end{aligned}$$

(Section100-1)

对照式(Section82-5)

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

可知此电路实现了一个标准陷波器，其中：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (\text{Section100-2a})$$

$$A_m = -\frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3)} = -\frac{R_2 // R_3}{R_1} \quad (\text{Section100-2b})$$

$$Q = \frac{R_2 + R_3}{3R_3} \quad (\text{Section100-2c})$$

可知，此电路的特征频率 f_0 （陷波频率）、中频增益 A_m （平坦区增益），以及品质因数 Q 是可以独立设计的，步骤如下：

- 1) 独立选择 R 和 C ，根据式(Section100-2a)，实现特征频率 f_0 要求；
- 2) 选择 R_A 为一个合适的值，确定 $2R_A$ ；选择 R_3 为一个合适的值；
- 3) 根据式(Section100-2c)，得：

$$R_2 = (3Q - 1)R_3 \quad (\text{Section100-2d})$$

- 4) 根据式(Section100-2b)，得：

$$R_1 = -\frac{R_2 // R_3}{A_m} \quad (\text{Section100-2e})$$

中途受限现象

本电路具有一个明显的缺点：如果 Q 值较大， R_2 会很大，这使得运放 A_1 在获得 R_3 支路反馈之前，呈现出一个很大的小闭环增益 $[-R_2/R_1]$ ，当输入信号较大时，运放 A_1 可能处于失效状态，即图中 u_x 点可能极大的理论输出电压，但运放却受电源电压限制无法达到。因此，此电路虽然在传函推导中具有良好的特性，在实用中却极难实现。

一旦电路中出现“在理论上先放大，后衰减，最终达到合适输出”的情况，就必须谨慎对待。理论上环路中途放大器输出可以达到任意值，而在实际应用中，这个任意值一定会受到电源电压的限制而达不到，这会导致实际工作中出现错误。

在理论分析中，信号链路中途某一个节点在不考虑中途电源电压限制时，能够使得最终结果得到正确结论，而在实际工作中，由于中途节点受电源电压限制，达不到理论分析电压，而导致最终结果出现错误，这种现象，叫做中途受限现象。

由多个运放组成的滤波器，特别是多运放组成的大回环滤波器，极易出现中途受限现象。特别是电路中出现减法运算，更易出现这种现象。如果读者能够想起来，仪表放大器中的失效图（钻石图），就来源于这个道理。

举例 1：

设计一个文氏-罗宾逊陷波器。要求，滤波器的陷波频率为 $f_0=1000\text{Hz}$ ， $Q=20$ ， $A_m=-10$ 。

用 TINA-TI 仿真软件实证，特别关注输入信号幅度对电路输出产生的中途受限现象。

解：首先根据陷波频率，初选电容 $C=100\text{nF}$ ，由此计算出：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 1000 \times 100 \times 10^{-9}} = 1591.546\Omega$$

选择 $R_A=1\text{k}\Omega$ ， $2R_A=2\text{k}\Omega$ ，选择电阻 $R_3=10\text{k}\Omega$ 。

根据式(Section100-2d)：

$$R_2 = (3Q - 1)R_3 = 590\text{k}\Omega$$

根据式(Section100-2e)：

$$R_1 = -\frac{R_2 // R_3}{A_m} = 983.3\Omega$$

据此形成图 Section100-3 所示电路。

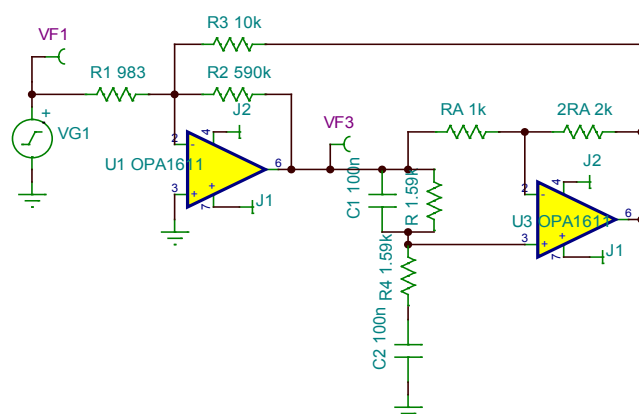


图 Section100-3 举例 1 电路

利用 TINA-TI 的分析功能，得到频率特性如图 Section100-4 所示。

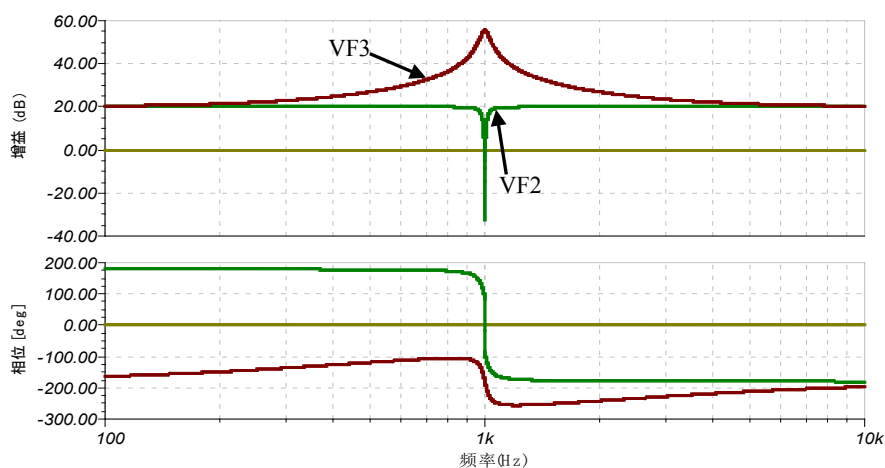


图 Section100-3 举例 1 电路的频率响应仿真结果

仿真测量结果为：陷波频率发生在 1000Hz 处， $A_m=20\text{dB}$ ， $f_L=975.55\text{Hz}$ ， $f_H=1.03\text{kHz}$ ，此值读取不精确，源自 TINA 本身，它应介于 1025Hz ~ 1035Hz 之间，因此， $Q_{\min}=1000\text{Hz}/(1035-975.55)=16.82$ ， $Q_{\max}=1000\text{Hz}/(1025-975.55)=20.22$ ，满足设计要求。

这看起来很好。但是注意，频率特性仿真图中已经显现，探测点 VF3，也就是原电路中的 u_x 点，在特征频率处具有高达 55dB （肉眼粗读）的增益，这极易使得运放 A1 输出失效，产生中途受限现象。

下面我们用 TINA-TI 的示波器功能，看此电路的时域表现，就能验证“此电路不能接受

大幅度输入”这个事实。

首先输入 1kHz, 1mV 信号。可以看到一切正常, 输入输出信号都很小, 在图中 0 线附近, 而运放 A2 的输出 VF3, 幅度达到了 580mV, 即其增益约为 580 倍 $=20\log 580=55.27\text{dB}$, 与频率特性图中估计的一致。

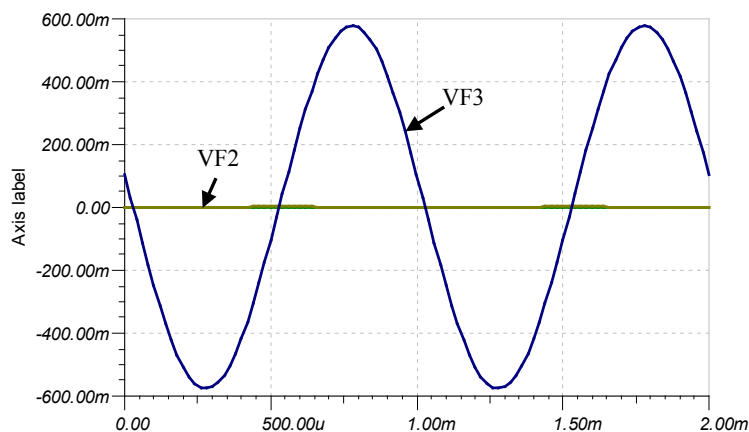


图 Section100-4 举例 1 电路 1mV1kHz 正弦输入

整个电路的供电电压为 $\pm 5\text{V}$, 运放 OPA1611 的最大输出电压约为 $\pm 4.8\text{V}$, 如此看来, 如果输入信号幅度超过 $4800\text{mV}/580 \text{ 倍}=8.28\text{mV}$, 就会出现运放 A1 输出失效。试试看。

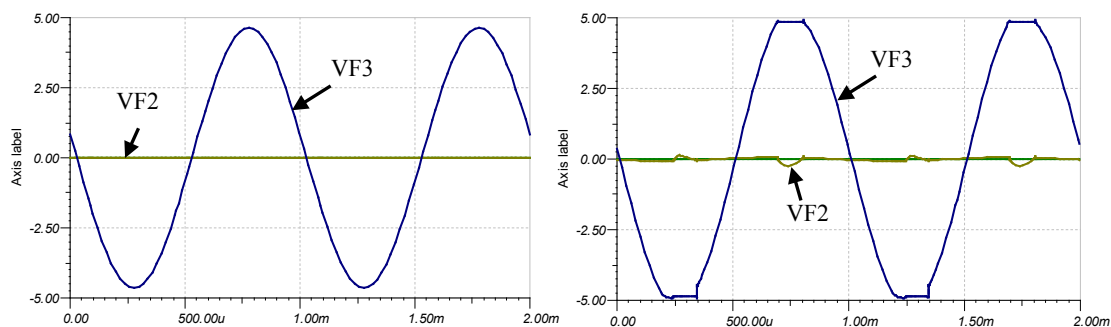


图 Section100-5 举例 1 电路 8mV (左), 15mV (右) 正弦输入

从图中可以看出, 当输入信号为 8mV, 容易出现中途受限现象的 VF3 节点, 其幅度为 4.2V 左右, 陷波效果正常。当输入信号为 15mV 时, VF3 点波形出现明显的削顶, 这导致陷波输出 VF2 出现了明显的异变, 如右图 VF2 箭头所指。

Bainter 陷波器(Bainter Notch)的分析

Bainter 陷波器是一种较为常见的陷波器，电路如图 Section100-6 所示。

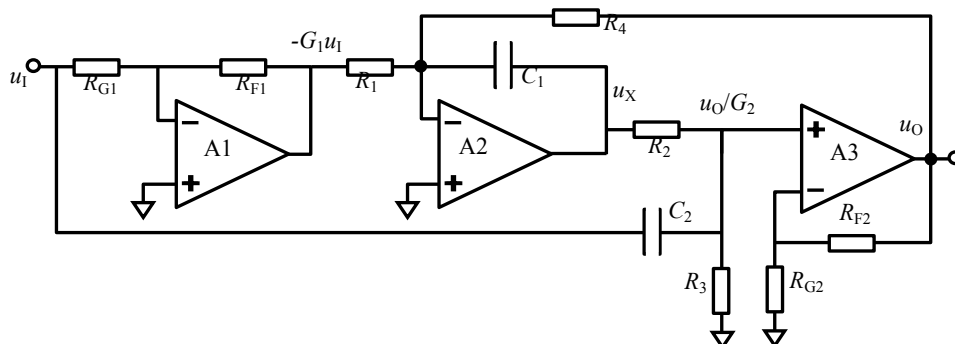


图 Section100-6 Bainter 陷波器

电路的核心分析围绕着运放 A2 输出端进行。运放 A1 负责实施简单的反相比例，增益为 G_1 ，而运放 A3 实施同相比例，增益为 G_2 。为了分析方便，设运放 A2 的输出为 u_X ，则：

$$U_X = -\frac{U_O}{SR_4C_1} + \frac{G_1U_I}{SR_1C_1} \quad (1)$$

对运放 A3 的正输入端，列出电流方程：

$$\frac{U_X - \frac{U_O}{G_2}}{R_2} + SC_2(U_I - \frac{U_O}{G_2}) = \frac{U_O}{R_3}$$

将 u_X 表达式代入，得：

$$\frac{-\frac{U_O}{SR_4C_1} + \frac{G_1U_I}{SR_1C_1} - \frac{U_O}{G_2}}{R_2} + SC_2(U_I - \frac{U_O}{G_2}) = \frac{U_O}{R_3}$$

这是一个仅含有 U_O 和 U_I 的关系，下面就是一步步化简了：

$$\begin{aligned} & -\frac{R_3U_O}{SR_4C_1} + \frac{R_3G_1U_I}{SR_1C_1} - \frac{R_3U_O}{G_2} + SR_2R_3C_2U_I - SR_2R_3C_2\frac{U_O}{G_2} = R_2\frac{U_O}{G_2} \\ & R_2\frac{U_O}{G_2} + SR_2R_3C_2\frac{U_O}{G_2} + \frac{R_3U_O}{G_2} + \frac{R_3U_O}{SR_4C_1} = \frac{R_3G_1U_I}{SR_1C_1} + SR_2R_3C_2U_I \\ & (\frac{R_2}{G_2} + \frac{SR_2R_3C_2}{G_2} + \frac{R_3}{G_2} + \frac{R_3}{SR_4C_1})U_O = (\frac{R_3G_1}{SR_1C_1} + SR_2R_3C_2)U_I \\ & \frac{S(R_2 + R_3)R_4C_1 + G_2R_3 + S^2R_2R_3R_4C_1C_2}{G_2SR_4C_1}U_O = \frac{R_3G_1 + S^2R_1R_2R_3C_1C_2}{SR_1C_1}U_I \\ & \frac{S(R_2 + R_3)R_4C_1 + G_2R_3 + S^2R_2R_3R_4C_1C_2}{G_2R_4}U_O = \frac{R_3G_1 + S^2R_1R_2R_3C_1C_2}{R_1}U_I \\ & (S(R_2 + R_3)R_1R_4C_1 + G_2R_1R_3 + S^2R_1R_2R_3R_4C_1C_2)U_O = (R_3G_2R_4G_1 + S^2G_2R_1R_2R_3R_4C_1C_2)U_I \end{aligned}$$

至此，可以列出增益的复频域表达式：

$$\begin{aligned} A(S) = \frac{U_O}{U_I} &= \frac{G_1G_2R_3R_4 + S^2G_2R_1R_2R_3R_4C_1C_2}{G_2R_1R_3 + S(R_2 + R_3)R_1R_4C_1 + S^2R_1R_2R_3R_4C_1C_2} \\ &= \frac{G_1R_4}{R_1} \times \frac{1 + S^2\frac{R_1R_2C_1C_2}{G_1}}{1 + S\frac{(R_2 + R_3)R_4C_1}{G_2R_3} + S^2\frac{R_2R_4C_1C_2}{G_2}} \end{aligned}$$

为了实现标准陷波器，要求分子分母中 S^2 的系数相同，否则就会变成高通型，或者低通型陷波器：

$$\frac{R_1}{G_1} = \frac{R_4}{G_2}, \quad \text{即 } R_4 = \frac{G_2}{G_1}R_1$$

(2)

$$A(S) = G_2 \times \frac{1 + S^2 \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{G_1}}{1 + S \frac{(R_2 + R_3) R_1 C_1}{G_1 R_3} + S^2 \frac{R_2 R_1 C_1 C_2}{G_1}}$$

(3)

变为频率表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = G_2 \times \frac{1 + (j\omega)^2 \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{G_1}}{1 + j\omega \frac{(R_2 + R_3) R_1 C_1}{G_1 R_3} + (j\omega)^2 \frac{R_2 R_1 C_1 C_2}{G_1}}$$

设：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_1}{R_2 R_1 C_1 C_2}}; \quad f_0 = \sqrt{\frac{G_1}{4\pi^2 R_2 R_1 C_1 C_2}}$$

(Section100-3)

$$\dot{A}(j\omega) = G_2 \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{G_1}{R_2 R_1 C_1 C_2}} \frac{(R_2 + R_3) R_1 C_1}{G_1 R_3} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

(Section100-4)

对比标准陷波器表达式，可知：

$$Q = \frac{G_1 R_3}{(R_2 + R_3) R_1 C_1} \sqrt{\frac{R_2 R_1 C_1 C_2}{G_1}} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \sqrt{\frac{G_1 R_2 C_2}{R_1 C_1}}$$

(Section100-5)

$$A_m = G_2$$

(Section100-6)

从上述表达式可以看出，一个陷波器的三大参数特征频率 f_0 ，平坦区增益 A_m ，品质因数 Q ，分别由不同的元件综合确定。而且它们有规律，可以设：

$$R = \sqrt{R_1 R_2}; \quad C = \sqrt{C_1 C_2}$$

$$k_R = \frac{R_2}{R_1}; \quad k_C = \frac{C_2}{C_1}$$

则上述关键表达式可以写作：

$$f_0 = \sqrt{\frac{G_1}{4\pi^2 R_2 R_1 C_1 C_2}} = \frac{\sqrt{G_1}}{2\pi RC}$$

(Section100-3a)

$$Q = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \sqrt{\frac{G_1 R_2 C_2}{R_1 C_1}} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \sqrt{G_1 k_R k_C}$$

(Section100-5a)

此时我们能够清晰看出，在保持 R 和 C 不变情况下，增大 k_R 、 k_C 和 G_1 是提高 Q 值的关键。

1) 只依赖于增大 G_1 是不靠谱的：首先，无限制增大 G_1 ，会使得运放 $A1$ 处于较低的负反馈深度，其带宽、失真度都将变差，并且会在特征频率处产生不可忽视的相移；其次， G_1 还受到输出幅度限制，我们必须避免运放 $A1$ 因增益过大，导致输出超过电源电压限制。

2) 只依赖于调节 k_R ——极端增大 R_2 ，减小 R_1 ，达到任意大的 Q 值，也是不靠谱的：因为这样做必然产生极大电阻和极小电阻。而在电路设计中，极大电阻会引入噪声，且会

加剧运放偏置电流对直流性能的影响，而极小电阻，会导致该支路电流超过运放输出极限。

3) 只依赖于调节 k_C 也是不靠谱的。

多数情况，我们会确定一个合适的、最大的 G_1 ，然后选择一个合适的 k_C ，一般是 1 倍、10 倍，不超过 100 倍，并据此计算出 C 。再根据 Q 的要求，计算 R_1 和 R_2 。

Bainter 陷波器(Bainter Notch)的设计方法

已知特征频率 f_0 ，平坦区增益 A_m ，品质因数 Q ，运放最高输出电压 U_{OM} ，设计 Bainter 陷波器的完整方法如下：

1) 选择合适的增益 G_1 ，然后按照下式确定电阻 R_{G1} 和 R_{F1} ：

- 合理选择电阻 R_{G1} ；
- $R_{F1} = G_1 R_{G1}$

2) 根据下式确定电阻 R_{G2} 和 R_{F2} ：

- 合理选择电阻 R_{G2} ；
- $R_{F2} = (A_m - 1) R_{G2}$

3) 根据表 Section84-1，选定一个合适的电容 C_1 ，合适的电容 C_2 ，据此得到：

$$C = \sqrt{C_1 C_2} ; k_C = \frac{C_2}{C_1}$$

4) 计算电阻 R_1 和 R_2 ：

根据式(Section100-5a)

$$Q = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \sqrt{\frac{G_1 R_2 C_2}{R_1 C_1}} = 0.5 \sqrt{G_1 k_R k_C}$$

解得：

$$k_R = \frac{4Q^2}{G_1 k_C} = \frac{R_2}{R_1}$$

(3a)

根据式(Section100-3a)

$$f_0 = \sqrt{\frac{G_1}{4\pi^2 R_2 R_1 C_1 C_2}} = \frac{\sqrt{G_1}}{2\pi RC}$$

解得：

$$R = \sqrt{R_1 R_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{2\pi f_0 C}$$

(3b)

综合式(3a)和式(3b)得：

$$R_1 = \frac{\sqrt{G_1}}{2\pi f_0 C} \times \frac{\sqrt{G_1 k_C}}{2Q} = \frac{G_1 \sqrt{k_C}}{4Q\pi f_0 C}$$

(Section100-7)

根据式(3a)得：

$$R_2 = \frac{4Q^2}{G_1 k_C} \times R_1$$

(Section100-8)

5) 设定 $R_3=R_2$ 。

6) 根据下式确定电阻 R_4 :

$$R_4 = \frac{G_2}{G_1} R_1 = \frac{A_m}{G_1} R_1$$

[Section100-9]

Bainter 陷波器(Bainter Notch)的中途受限现象

下面来分析此电路的中途受限现象。可以看出，电路中存在两个中途受限点，一是运放 A1 的输出，这很简单，只要保证输入信号乘以设定的 G_1 ，不要超过 A1 的最大输出值即可。第二是运放 A2，我们需要知道 u_x 处的增益，分析如下：

根据式(1)，将式(3)代入得：

$$\begin{aligned} U_x &= -\frac{U_o}{SR_4C_1} + \frac{G_1U_I}{SR_1C_1} = \left(-\frac{G_2 \times \frac{1 + S^2 \frac{R_1R_2C_1C_2}{G_1}}{1 + S \frac{(R_2+R_3)R_1C_1}{G_1R_3} + S^2 \frac{R_2R_1C_1C_2}{G_1}}}{SR_4C_1} + \frac{G_1}{SR_1C_1} \right) U_I \\ &= \frac{G_1 \left(\frac{S \frac{(R_2+R_3)R_1C_1}{G_1R_3}}{1 + S \frac{(R_2+R_3)R_1C_1}{G_1R_3} + S^2 \frac{R_2R_1C_1C_2}{G_1}} \right)}{SR_1C_1} U_I \\ &= \frac{G_1}{SR_1C_1} \left(\frac{S \frac{(R_2+R_3)R_1C_1}{G_1R_3}}{1 + S \frac{(R_2+R_3)R_1C_1}{G_1R_3} + S^2 \frac{R_2R_1C_1C_2}{G_1}} \right) U_I \end{aligned}$$

可以看出，这是一个两项乘法表达式。括号内是一个标准带通滤波器，在特征频率处具有峰值增益 1，这也是 u_x 出现最大增益的位置。因此， u_x 在陷波点处增益为：

$$A_{ux}(j\omega_0) = \frac{G_1}{j\omega_0 R_1 C_1} = \frac{G_1}{j \sqrt{\frac{G_1}{R_2 R_1 C_1 C_2}} R_1 C_1} = \frac{\sqrt{G_1}}{j \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}} = -j \sqrt{\frac{G_1 R_2 C_2}{R_1 C_1}} = -jQ \frac{R_2 + R_3}{R_3} \quad (4)$$

这个结果令人遗憾：要实现较大的 Q 值， u_x 点就必然获得较大的中途增益，这样就对输入信号提出了严格要求：

$$U_{IM} < \frac{U_{OM}}{|A_{ux}(j\omega_0)|} = \frac{U_{OM}}{Q \frac{R_2 + R_3}{R_3}} \quad (5)$$

换句话说，要想实现满意的陷波效果，输入信号幅度 U_{IM} 必须小于上式。其中， U_{OM} 是输出最大电压，受限于供电电压，以及运放的输出特性。

举例 2：

设计一个 Bainter 陷波器。要求，运放为 OPA1611，供电电压为 $\pm 5V$ ，滤波器的陷波频率为 $f_0=50\text{Hz}$ ， $Q=40$ ， $A_m=1$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证，特别关注输入信号幅度对电路输出产生的中途受限现象。

解：按照前述步骤，操作如下：

1) 根据平坦区增益，确定 $G_2=A_m=1$ ，可知运放 A3 应设置为跟随器。

2) 选择 $G_1=10$ ，选定电阻 $R_{G1}=1\text{k}\Omega$ ，则 $R_{F1}=G_1R_{G1}=10\text{k}\Omega$ 。

3) 根据表 Section84-1，选定一个合适的电容 $C_1=0.1\mu\text{F}$ ，合适的电容 $C_2=10\mu\text{F}$ ，据此得到：

$$C = \sqrt{C_1 C_2} = 1\mu\text{F} ; k_c = \frac{C_2}{C_1} = 100$$

4) 计算电阻 R_1 和 R_2 ：

根据式(Section100-7)，确定电阻 R_1 ：

$$R_1 = \frac{G_1 \sqrt{k_c}}{4Q\pi f_0 C} = 3979\Omega$$

根据式(Section100-8)，确定电阻 R_2 ：

$$R_2 = \frac{4Q^2}{G_1 k_c} \times R_1 = 25.46\text{k}\Omega$$

5) $R_3=R_2=25.46\text{k}\Omega$ 。

6) 根据下式确定电阻 R_4 ：

$$R_4 = \frac{G_2}{G_1} R_1 = \frac{1}{10} \times 3979 = 397.9\Omega$$

至此，得到 TINA-TI 仿真电路如图 Section100-7 所示。

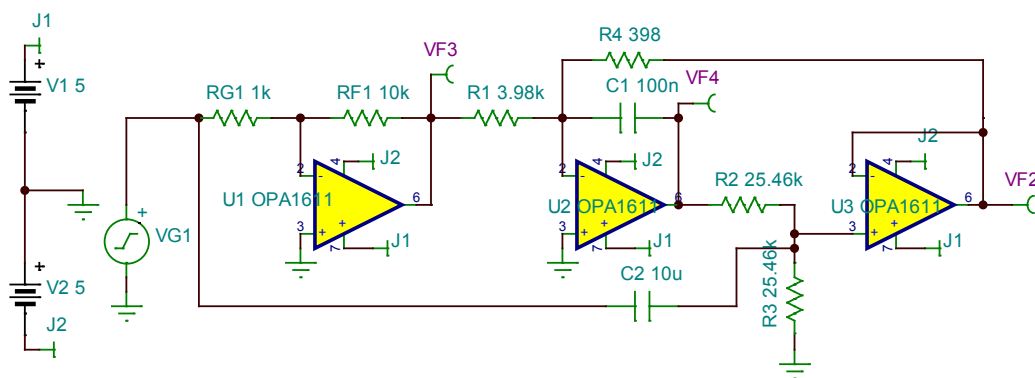


图 Section100-7 举例 2 电路

下面分析本电路对输入信号幅度的限制，即中途受限现象。分析的原则是，输入信号波形足够小，以保证在全频率范围内，上图中 VF3 和 VF4 不会出现超过电源电压的理论分析值，以避免中途受限现象。

对 VF3 点，因其对全频率增益均为 G_1 ，因此有：

$$U_{IM} \times G_1 < U_{OM} = 4.8V$$

即：

$$U_{IM} < \frac{U_{OM}}{G_1} = \frac{4.8}{10} = 480\text{mV}$$

对 VF4 点，据式(5)，有：

$$U_{IM} < \frac{U_{OM}}{Q \frac{R_2 + R_3}{R_3}} = \frac{4.8}{40 \times 2} = 60\text{mV}$$

综合考虑，要求本电路输入信号幅度必须小于 60mV。

图 Section100-8 是本电路的仿真频率特性，可以看出 VF2 表现为一个陷波器，其平坦区增益为 0dB，陷波点发生在 50Hz 附近；而 VF4 则表现为一个窄带通特性，其在 50Hz 处峰值增益达到了图中所示的 38.03dB（换算为 79.7 倍，与理论估算 $2Q=80$ 接近），这是中途受限现象的根源。

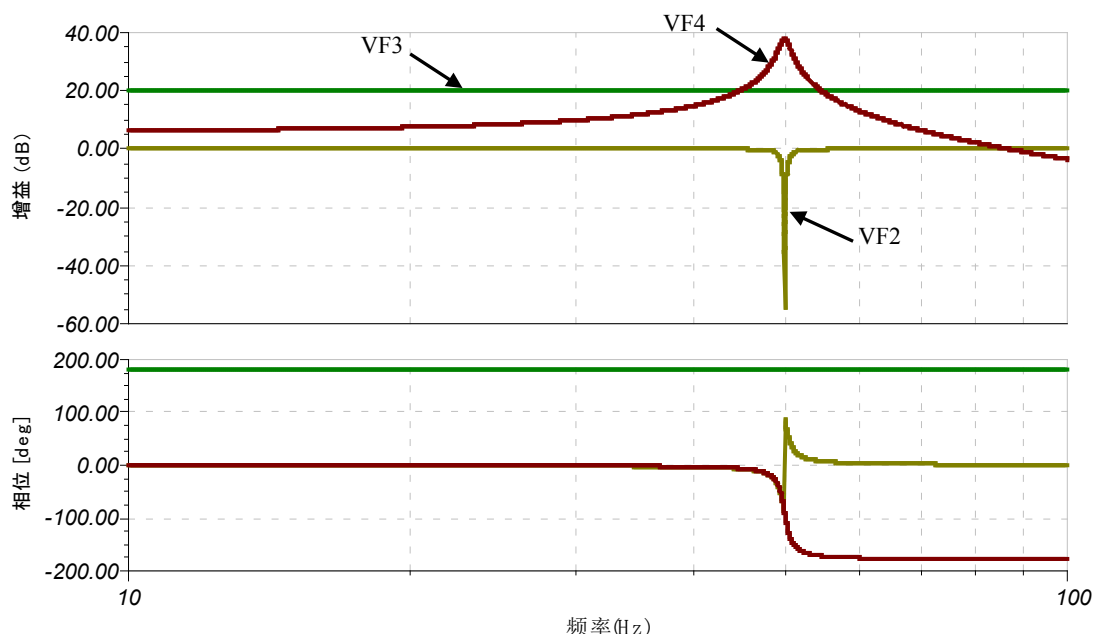


图 Section100-8 举例 2 电路的仿真频率特性

用示波器观察输出陷波效果（以 49.62Hz 为输入频率），当输入信号幅度在 30mV 时，VF2 输出幅度为 2.1mV，当输入信号幅度在 60mV 时，VF2 输出幅度为 4.2mV，这符合规律。但当输入信号幅度达到 120mV 时（超限），理论上输出 VF2 幅度应为 8.4mV，实测为 58mV，陷波效果大打折扣，其根本原因在于出现了中途受限现象。

注意，TINA-TI 软件在频率特性中能够实现 -50dB 以下的陷波衰减，如图所示，但在示波器仿真中，却无法达到这个效果，这与仿真软件有关，无需过多担忧。

Boctor 陷波器

Boctor 陷波器应用也比较多，它分为两种：高通型和低通型，其中高通型电路如图 Section100-9 所示。

为求解其传函，本节采用 MF 法。先求解衰减系数 M 。

当将图中 R_1 和 C 串联用 Z_1 表示，将图中 R_2 和 C 并联用 Z_2 表示，则电路演变成了完全对称结构，求解过程会简单一些：

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{SC} = \frac{1 + SR_1C}{SC}$$

$$Z_2 = R_2 // \frac{1}{SC} = \frac{R_2 \times \frac{1}{SC}}{R_2 + \frac{1}{SC}} = \frac{R_2}{1 + SR_2C}$$

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{R_4 // R_6}{R_4 // R_6 + Z_2} = \frac{\frac{R_4 \times R_6}{R_4 + R_6}}{\frac{R_4 \times R_6}{R_4 + R_6} + \frac{Z_2(R_4 + R_6)}{R_4 + R_6}} = \frac{R_4 R_6}{R_4 R_6 + Z_2(R_4 + R_6)} = \frac{R_4 R_6}{R_4 R_6 + \frac{R_2(R_4 + R_6)}{1 + SR_2C}} \\ &= \frac{R_4 R_6(1 + SR_2C)}{R_4 R_6 + SCR_2 R_4 R_6 + R_2(R_4 + R_6)} = \frac{1 + SCR_2}{1 + SCR_2 + \frac{R_2}{R_4 // R_6}} \\ &= \frac{R_4 R_6(1 + SR_2C)}{R_2 R_4 + R_2 R_6 + R_4 R_6 + SCR_2 R_4 R_6} \end{aligned}$$

利用对称性可以看出：

$$\begin{aligned} M_- &= \frac{R_3 // R_5}{R_3 // R_5 + Z_1} = \frac{R_3 R_5}{R_3 R_5 + Z_1(R_3 + R_5)} = \frac{R_3 R_5}{R_3 R_5 + \frac{1 + SR_1C}{SC}(R_3 + R_5)} \\ &= \frac{SCR_3 R_5}{R_3 + R_5 + SC(R_1 R_3 + R_1 R_5 + R_3 R_5)} \end{aligned}$$

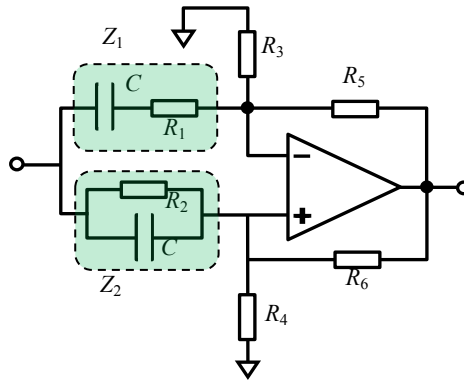


图 Section100-9 Boctor 陷波器——高通

$$M = M_+ - M_- = \frac{R_4 R_6(1 + SR_2C)}{R_2 R_4 + R_2 R_6 + R_4 R_6 + SCR_2 R_4 R_6} - \frac{SCR_3 R_5}{R_3 + R_5 + SC(R_1 R_3 + R_1 R_5 + R_3 R_5)}$$

$$\begin{aligned}
 F_- &= \frac{Z_1 // R_3}{Z_1 // R_3 + R_5} = \frac{\frac{Z_1 R_3}{Z_1 + R_3}}{\frac{Z_1 R_3}{Z_1 + R_3} + R_5} = \frac{Z_1 R_3}{Z_1 R_3 + (Z_1 + R_3) R_5} = \frac{R_3}{R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{Z_1}} \\
 &= \frac{R_3}{R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{1 + S R_1 C}} = \frac{R_3}{R_3 + R_5 + \frac{S C R_3 R_5}{1 + S R_1 C}} \\
 &= \frac{R_3 (1 + S R_1 C)}{S C R_3 R_5 + (R_3 + R_5) (1 + S R_1 C)} = \frac{R_3 (1 + S R_1 C)}{R_3 + R_5 + S C (R_1 R_3 + R_1 R_5 + R_3 R_5)} \\
 F_+ &= \frac{Z_2 // R_4}{Z_2 // R_4 + R_6} = \frac{\frac{Z_2 R_4}{Z_2 + R_4}}{\frac{Z_2 R_4}{Z_2 + R_4} + R_6} = \frac{Z_2 R_4}{Z_2 R_4 + R_6 (Z_2 + R_4)} = \frac{R_4}{R_4 + R_6 + \frac{R_4 R_6}{Z_2}} \\
 &= \frac{R_4}{R_4 + R_6 + \frac{R_4 R_6}{1 + S R_2 C}} = \frac{R_4}{R_4 + R_6 + \frac{S C R_4 R_6}{1 + S R_2 C}} \\
 &= \frac{R_4 (1 + S R_2 C)}{R_4 + R_6 + S C (R_2 R_4 + R_2 R_6 + R_4 R_6)} \\
 F &= F_- - F_+ = \frac{R_3 (1 + S R_1 C)}{R_3 + R_5 + S C (R_1 R_3 + R_1 R_5 + R_3 R_5)} - \frac{R_4 (1 + S R_2 C)}{R_4 + R_6 + S C (R_2 R_4 + R_2 R_6 + R_4 R_6)}
 \end{aligned}$$

根据 MF 法获得增益为：

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{M}{F} \\
 &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5) + S C (R_1 R_4 R_6 (R_3 + R_5) + R_2 R_3 R_4 R_6 - R_2 R_3 R_4 R_5) + S^2 C^2 R_1 R_2 R_4 R_6 \times (R_3 + R_5)}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5 + S C (R_1 R_3 R_6 (R_2 + R_4) + R_2 R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5 (R_1 + R_3)) + S^2 C^2 R_1 R_2 R_4 R_6 \times R_3} \\
 &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5} \times \frac{1 + S C \frac{R_1 R_3 R_4 R_6 + R_1 R_4 R_5 R_6 + R_2 R_3 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_5 R_6 - R_2 R_3 R_4 R_5 - R_2 R_3 R_5 R_6}{R_4 R_6 (R_3 + R_5)} + S^2 C^2 R_1 R_2}{1 + S C \frac{(R_1 R_3 R_6 (R_2 + R_4) + R_2 R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5 (R_1 + R_3))}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5} + S^2 C^2 \frac{R_1 R_2 R_4 R_6 \times R_3}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5}} \\
 &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5} \times \frac{1 + S C (R_1 + R_2 - R_2 \frac{R_3 R_5 (R_4 + R_6)}{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}) + S^2 C^2 R_1 R_2}{1 + S C \frac{(R_1 R_3 R_6 (R_2 + R_4) + R_2 R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5 (R_1 + R_3))}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5} + S^2 C^2 \frac{R_1 R_2 R_4 R_6 \times R_3}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5}} \\
 &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5} \times \frac{1 + S C (R_1 + R_2 - R_2 \frac{R_3 // R_5}{R_4 // R_6}) + S^2 C^2 R_1 R_2}{1 + S C \frac{(R_1 R_3 R_6 (R_2 + R_4) + R_2 R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5 (R_1 + R_3))}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5} + S^2 C^2 \frac{R_1 R_2 R_4 R_6 \times R_3}{R_2 R_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - R_2 R_4 R_5}}
 \end{aligned}$$

从上述表达式看，要想让其与非标准陷波器吻合，需要做如下工作：

- 1) 高通陷波器具有 f_0 、 A_m 、 k 、 Q 等 4 个量，在确定电容 C 后，我们需要 4 个电阻，但现在我们有 6 个电阻，因此为了简化分析，设定电阻 $R_1 = R_2 = R$ 。据此可得：

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} \\
 &\times \frac{1 + SC(2R - R \frac{R_3 // R_5}{R_4 // R_6}) + S^2 C^2 R^2}{1 + SC \frac{(RR_3 R_6 (R + R_4) + RR_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5 (R + R_3))}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} + S^2 C^2 R^2 \frac{R_3 R_4 R_6}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5}} \\
 &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} \\
 &\times \frac{1 + SC(2R - R \frac{R_3 // R_5}{R_4 // R_6}) + S^2 C^2 R^2}{1 + SCR \frac{RR_3 R_6 + 2R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5 - R_3 R_4 R_5}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} + S^2 C^2 R^2 \frac{R_3 R_4 R_6}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5}}
 \end{aligned}$$

2) 要使其变成陷波形式, 分子上的 S 项必须为 0。则有:

$$2R - R \frac{R_3 // R_5}{R_4 // R_6} = 0$$

即:

$$R_3 // R_5 = 2(R_4 // R_6) \quad (6)$$

至此, 将上述表达式写成频域表达式为:

$$\begin{aligned}
 A(j\omega) &= \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} \\
 &\times \frac{1 + (j\omega)^2 C^2 R^2}{1 + j\omega CR \frac{RR_3 R_6 + 2R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5 - R_3 R_4 R_5}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} + (j\omega)^2 C^2 R^2 \frac{R_3 R_4 R_6}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5}} \\
 &= A_m \times \frac{1 + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j\sqrt{k} \frac{\omega}{\omega_0})^2}
 \end{aligned}$$

其中, 当频率趋于 0 时, 出现低频增益为:

$$A_{m_0} = A_m$$

当频率趋于 ∞ 时, 出现高频增益为:

$$A_{m_\infty} = A_m \times \frac{1}{k}$$

则:

$$k = \frac{A_{m_0}}{A_{m_\infty}} \quad (10a)$$

据此可得:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (7)$$

$$Q = \frac{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5}{RR_3 R_6 + 2R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5 - R_3 R_4 R_5} \quad (8)$$

$$A_m = \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5} \quad (9)$$

$$k = \frac{R_3 R_4 R_6}{RR_3 R_6 + R_3 R_4 R_6 - RR_4 R_5}$$

(10b)

可以看出，式(6)-式(10)共 5 个独立方程，在已知 f_0 、 A_m 、 k 、 Q 和初选 C 的情况下，可以解出 R 、 R_3 、 R_4 、 R_5 、 R_6 共 5 个未知量。

首先，根据式(7)，解得：

$$R_1 = R_2 = R = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

将式(10b)和式(9)相除，得：

$$\frac{A_m}{k} = \frac{R_4 R_6 (R_3 + R_5)}{R_3 R_4 R_6} = 1 + \frac{R_5}{R_3}$$

$$\frac{R_5}{R_3} = \frac{A_m}{k} - 1$$

(a)

将式(10b)变形得：

$$\frac{1}{k} = \frac{RR_3R_6 + R_3R_4R_6 - RR_4R_5}{R_3R_4R_6} = \frac{R}{R_4} + 1 - \frac{RR_5}{R_3R_6}$$

(b)

继续变形得：

$$\frac{R}{R_4} = \frac{1}{k} - 1 + \frac{RR_5}{R_3R_6}$$

两边同乘以 R_5/R ，并将式(a)代入得：

$$\frac{R_5}{R_4} = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \frac{R_5}{R} + \frac{R_5^2}{R_3R_6} = \left(\frac{1-k}{k}\right) \frac{R_5}{R} + \left(\frac{A_m-k}{k}\right) \frac{R_5}{R_6}$$

(c)

将式(8)和式(10b)相乘后变形得：

$$Qk = \frac{R_3R_4R_6}{RR_3R_6 + 2R_3R_4R_6 - RR_4R_5 - R_3R_4R_5}$$

$$\frac{1}{Qk} = \frac{RR_3R_6 + 2R_3R_4R_6 - RR_4R_5 - R_3R_4R_5}{R_3R_4R_6} = \frac{R}{R_4} + 2 - \frac{RR_5}{R_3R_6} - \frac{R_5}{R_6}$$

$$= \left(\frac{R}{R_4} + 1 - \frac{RR_5}{R_3R_6}\right) + 1 - \frac{R_5}{R_6}$$

将式(b)代入，得：

$$\frac{1}{Qk} = \frac{1}{k} + 1 - \frac{R_5}{R_6}$$

解得：

$$\frac{R_5}{R_6} = \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{Qk} = \frac{Q + Qk - 1}{Qk}$$

(d)

对式(6)展开得：

$$R_3 // R_5 = 2(R_4 // R_6) \rightarrow \frac{R_3R_5}{R_3 + R_5} = \frac{2R_4R_6}{R_4 + R_6}$$

颠倒分子分母，即：

$$\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) \rightarrow 1 + \frac{R_5}{R_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_5}{R_4} + \frac{R_5}{R_6} \right)$$

$$2 + 2 \frac{R_5}{R_3} = \frac{R_5}{R_4} + \frac{R_5}{R_6}$$

(e)

将式(a)、(c)、(d)代入式(e)得：

$$\frac{2A_m}{k} = \left(\frac{1-k}{k}\right) \frac{R_5}{R} + \left(\frac{A_m-k}{k}\right) \frac{R_5}{R_6} + \frac{R_5}{R_6} = \left(\frac{1-k}{k}\right) \frac{R_5}{R} + \left(\frac{A_m}{k}\right) \left(\frac{Q+Qk-1}{Qk}\right)$$

至此，大功告成，等式中只包含 R_5 和一系列已知量，剩下的就是化简了：

两边同乘以 Qk^2R ，得：

$$\begin{aligned} 2QkA_mR &= Qk(1-k)R_5 + A_m(Q+Qk-1)R \\ Qk(1-k)R_5 &= 2QkA_mR - A_m(Q+Qk-1)R = 2QkA_mR - A_mQR - A_mQkR + A_mR \\ &= QkA_mR - A_mQR + A_mR \\ R_5 &= \frac{Qk-Q+1}{Qk(1-k)} A_mR \end{aligned} \quad (F1)$$

根据高通陷波器定义， k 代表低频增益和高频增益的比值（式(10)），应小于 1 且大于 0。在此情况下，上式分母为正值，要保证电阻 R_5 为正值，则有如下约束式：

$$\begin{aligned} Qk - Q + 1 &> 0 \\ k &> \frac{Q-1}{Q} \end{aligned} \quad (C1)$$

根据式(a)得：

$$R_3 = \frac{R_5}{\frac{A_m}{k} - 1} = \frac{(Qk - Q + 1)}{Q(A_m - k)(1 - k)} A_mR \quad (F2)$$

约束项为：

$$A_m > k \quad (C2)$$

根据式(d)得：

$$R_6 = R_5 \frac{Qk}{Q+Qk-1} = \frac{Qk-Q+1}{Qk(1-k)} A_mR \frac{Qk}{Q+Qk-1} = \frac{Qk-Q+1}{(Q+Qk-1)(1-k)} A_mR \quad (F3)$$

约束项为：

$$(Q+Qk-1) > 0 \rightarrow k > \frac{1-Q}{Q} \quad (C3)$$

根据式(c)：

$$\frac{R_5}{R_4} = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \frac{R_5}{R} + \frac{R_5^2}{R_3R_6} = \left(\frac{1-k}{k}\right) \frac{R_5}{R} + \left(\frac{A_m-k}{k}\right) \frac{R_5}{R_6}$$

即：

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{R_5}{\left(\frac{1-k}{k}\right) \frac{R_5}{R} + \left(\frac{A_m-k}{k}\right) \frac{R_5}{R_6}} = \frac{1}{\left(\frac{1-k}{kR}\right) + \left(\frac{A_m-k}{kR_6}\right)} = \frac{kRR_6}{R_6 - kR_6 + A_mR - kR} \\ &= \frac{k(Qk-Q+1)}{(1-k)(2A_mQk - k(Qk+Q-1))} A_mR \end{aligned} \quad (F4)$$

Boctor 滤波器还有低通滤波形式，限于篇幅，本书不介绍。

举例 3：

设计一个 Boctor 高通陷波器。要求，运放为 OPA1611，供电电压为 $\pm 5V$ ，滤波器的陷波频率为 $f_0=50\text{Hz}$ ， $Q=1.2$ ， $A_m=1$ ， $k=0.2$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：选择电容 $C=1\mu\text{F}$ ，依照式(7)反算电阻：

$$R = R_1 = R_2 = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 50 \times 1 \times 10^{-6}} = 3183\Omega$$

根据式(C1)知，必须有：

$$k > \frac{Q-1}{Q} = 0.1667$$

题目要求 $k=0.2$ ，满足约束条件。

利用式(F1)~式(F4)，分别计算 4 个电阻值：

$$R_5 = \frac{Qk - Q + 1}{Qk(1-k)} A_m R = 663.1\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_5}{\frac{A_m}{k} - 1} = 165.8\Omega$$

$$R_6 = R_5 \frac{Qk}{Q + Qk - 1} = 361.7\Omega$$

$$R_4 = \frac{kRR_6}{R_6 - kR_6 + A_m R - kR} = 81.20\Omega$$

按照计算值设计电路如图 Section100-10a 所示。电路中没有选择 E96 系列。

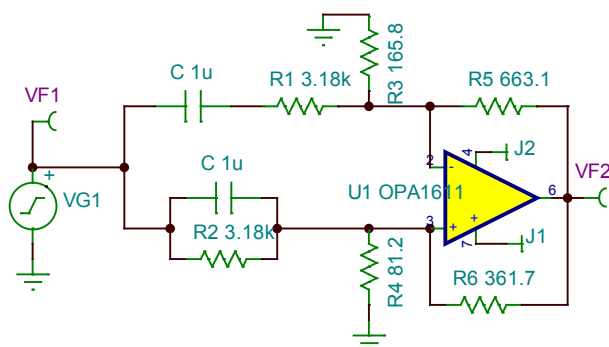


图 Section100-10a 举例 3 电路

仿真结果如图 Section100-10b 所示。

在仿真结果图中，实施如下测量，可以验证设计正确性。

1) 陷波频率发生在 50Hz 处，设计正确。

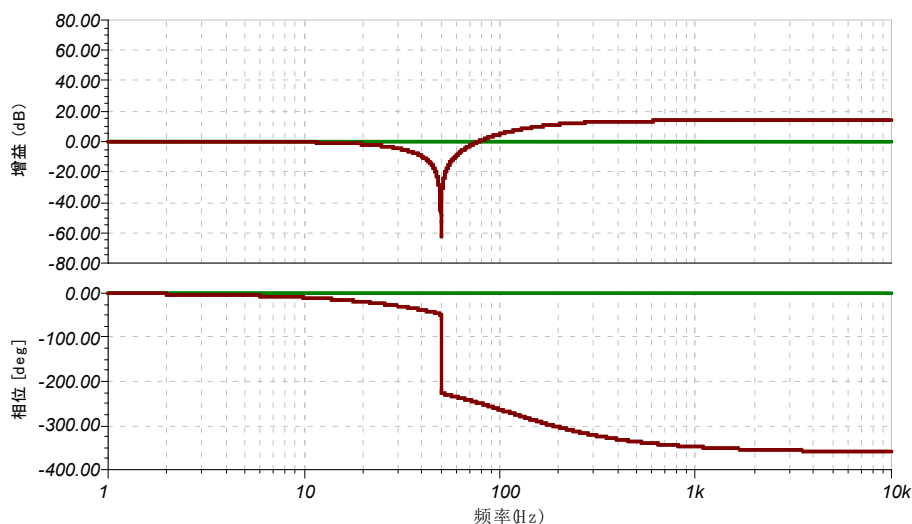


图 Section100-10b 举例 3 电路仿真结果

2) 验证高通陷波效果：

$$A(1\text{Hz}) = -14.2\text{mdB} = -0.0142\text{dB} = 0.9984 \text{ 倍}$$

即 $A_m \approx 0.9984$ ，与设计要求的 1 倍近似。

$$A(10000\text{Hz}) = 13.98\text{dB} = 5.000 \text{ 倍}$$

利用式(10a)，得：

$$k_{\text{实测}} = \frac{A_{m_0}}{A_{m_\infty}} \approx \frac{A(1\text{Hz})}{A(10000\text{Hz})} = \frac{0.9984}{5.000} = 0.1997$$

与设计要求的 $k=0.2$ 近似相等。

3) 验证 Q 值：

中心频率左侧，比低频增益小 3.01dB，即 -3.0242dB 处的频率为：

$$f(-3.0242\text{dB}) = f_L = 25.74\text{Hz}$$

中心频率右侧，比低频增益小 3.01dB，即 -3.024dB 处的频率为：

$$f(-3.024\text{dB}) = f_H = 69.42\text{Hz}$$

则有：

$$Q_{\text{实测}} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{50}{69.42 - 25.74} = 1.145$$

与设计要求的值基本吻合，稍有偏差。

双 T 陷波器电路一

根据运放 A1 正输入端虚断，得电流方程如下：

$$\frac{U_X - U_O}{\frac{1}{SC}} = \frac{U_O - U_Y}{R}$$

解得：

$$U_Y = U_O - SCR(U_X - U_O) = U_O + SCR U_O - SCR U_X = (1 + SCR)U_O - SCR U_X \quad (11)$$

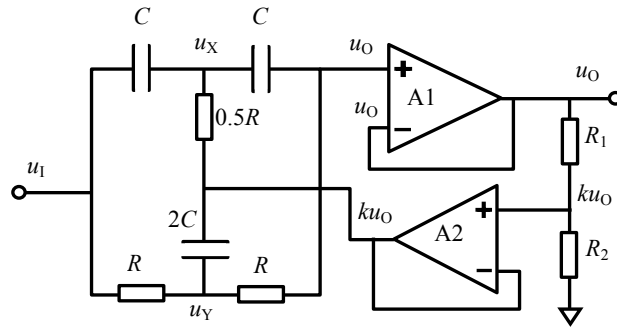


图 Section100-11 双 T 网络有源陷波器电路一

对图中 u_X 点列出电流方程如下：

$$SC(U_I - U_X) + \frac{kU_O - U_X}{0.5R} = SC(U_X - U_O)$$

按照以下步骤简化，解得 U_X 与 U_I 、 U_O 的关系为：

$$\begin{aligned} 0.5SCR(U_I - U_X) + kU_O - U_X &= 0.5SCR(U_X - U_O) \\ 0.5SCR U_I - 0.5SCR U_X + kU_O - U_X &= 0.5SCR U_X - 0.5SCR U_O \\ (1 + SCR)U_X &= 0.5SCR U_I + (k + 0.5SCR)U_O \\ U_X &= \frac{0.5SCR}{1 + SCR} U_I + \frac{k + 0.5SCR}{1 + SCR} U_O \end{aligned}$$

(12)

对图中 u_Y 点列出电流方程如下：

$$\frac{U_I - U_Y}{R} + 2SC(kU_O - U_Y) = \frac{U_Y - U_O}{R}$$

将式(11)代入得：

$$\begin{aligned} \frac{U_I - (U_O + SCR U_O - SCR U_X)}{R} + 2SC(kU_O - (U_O + SCR U_O - SCR U_X)) \\ = \frac{U_O + SCR U_O - SCR U_X - U_O}{R} \end{aligned}$$

按照以下步骤简化，解得 U_X 与 U_I 、 U_O 的关系为：

$$\begin{aligned} U_I - U_O - SCR U_O + SCR U_X + 2SCR(kU_O - U_O - SCR U_O + SCR U_X) &= SCR U_O - SCR U_X \\ (2SCR + 2S^2C^2R^2)U_X &= 4SCR U_O + U_O - 2SCR kU_O + 2S^2C^2R^2U_O - U_I \end{aligned}$$

解得 U_X 与 U_I 、 U_O 的关系为：

$$U_X = \frac{1 + SCR(4 - 2k) + 2S^2C^2R^2}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_O - \frac{1}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_I \quad (13)$$

根据式(12)和式(13)，得：

$$\begin{aligned} \left(\frac{0.5SCR}{1 + SCR} + \frac{1}{2SCR + 2S^2C^2R^2} \right) U_I &= \left(\frac{1 + SCR(4 - 2k) + 2S^2C^2R^2}{2SCR + 2S^2C^2R^2} - \frac{k + 0.5SCR}{1 + SCR} \right) U_O \\ \frac{1 + S^2C^2R^2}{2SCR(1 + SCR)} U_I &= \frac{1 + SCR(4 - 2k) + 2S^2C^2R^2 - 2SCRk - S^2C^2R^2}{2SCR(1 + SCR)} U_O \end{aligned}$$

$$A = \frac{U_o}{U_i} = \frac{1 + S^2 C^2 R^2}{1 + 4SCR - 4SCRk + S^2 C^2 R^2} = \frac{1 + S^2 C^2 R^2}{1 + 4SCR(1 - k) + S^2 C^2 R^2} \quad [\text{Section100-15}]$$

将其写出频率表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{1 + (j\omega)^2 C^2 R^2}{1 + 4j\omega CR(1 - k) + (j\omega)^2 C^2 R^2} \quad [\text{Section100-15a}]$$

令：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad [\text{Section100-16}]$$

表达式变为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + 4j\frac{\omega}{\omega_0}(1 - k) + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + 4j\Omega(1 - k) + (j\Omega)^2} \quad [\text{Section100-15b}]$$

这是一个标准陷波器表达式，对比原式可知：

$$A_m = 1 \quad [\text{Section100-17}]$$

$$Q = \frac{1}{4(1 - k)} \quad [\text{Section100-18}]$$

根据上述结果，我们发现，设计双 T 陷波器极为简单，在合理选择电阻 R 和电容 C ，以满足特征频率要求后，我们唯一能够做的就是选择不同的 Q 。或者说，通过确定电阻 R_1 和 R_2 ，形成不同的 k ，就可以确定 Q 值。在已知 Q 情况下，有：

$$k = \frac{4Q - 1}{4Q} \quad [\text{Section100-18a}]$$

特别提醒，双 T 陷波器电路一中， k 仅仅是一个分压系数，与前述高通、低通陷波器中的 k 完全不同。据原电路可知：

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

在选定电阻 R_1 后，可以解得：

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4Q - 1}{4Q}$$

即：

$$R_2 = (4Q - 1)R_1 \quad [\text{Section100-19}]$$

从电路结构就可以看出，本电路不存在中途受限现象，这是它的优点。但双 T 陷波器的电阻和电容要严格匹配，调试较为困难。

举例 4：

设计一个双 T 陷波器。要求，运放为 ADA4051-1，供电电压为 $\pm 2.5\text{V}$ ，滤波器的陷波频率为 $f_0=50\text{Hz}$ ， $Q=10$ ， $A_m=1$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：可采用双 T 陷波器电路一。

1) 根据表 Section84-1，选择 $C=1\mu\text{F}$ 。根据式(Section100-16)得：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = 3183\Omega$$

2) 因 Q 值较大，为防止出现过大电阻，初步选择电阻 $R_1=100\Omega$ ，根据式(Section100-19)：

$$R_2 = (4Q - 1)R_1 = 3900\Omega$$

3) 据此设计电路如图 Section100-11a 所示。

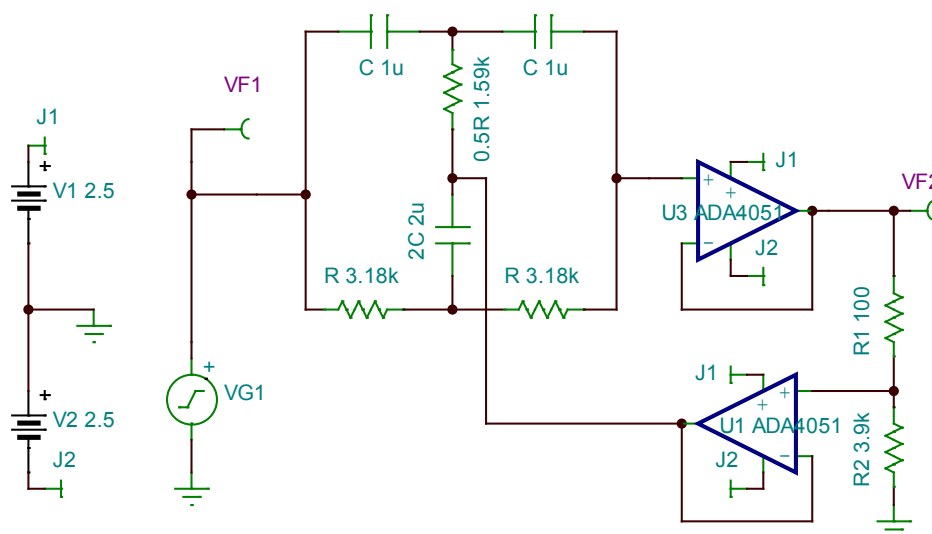


图 Section100-11a 举例 4 电路

4) 仿真得到的频率特性如图 Section100-11b 所示。其特征频率发生在 50.01Hz ， $Q=50/(52.63-47.6)=9.94$ ，与设计要求基本吻合。

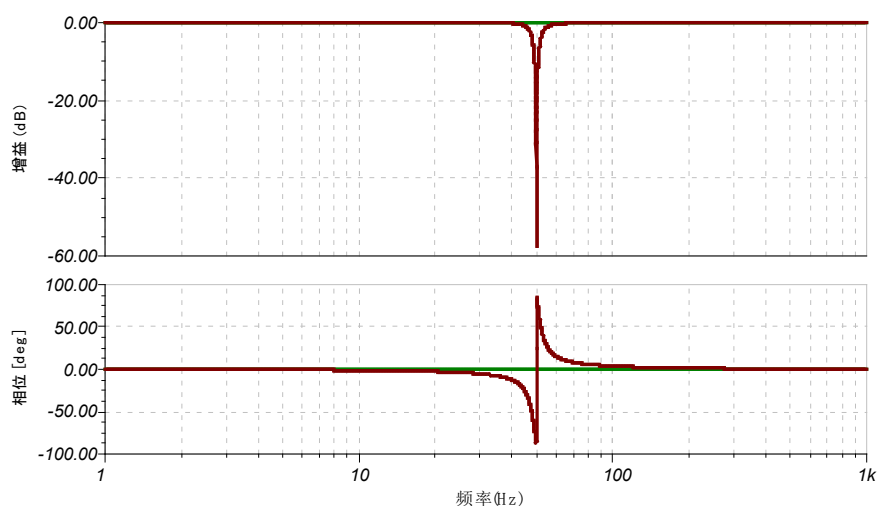


图 Section100-11b 举例 4 电路仿真频率特性

双 T 陷波器电路二

另外一种双 T 型陷波器如图 Section100-12 所示。它只使用一只运放，可以实现平坦区增益大于 1，小于 2 的功能，且 Q 值取决于平坦区增益 G 。分析过程如下：

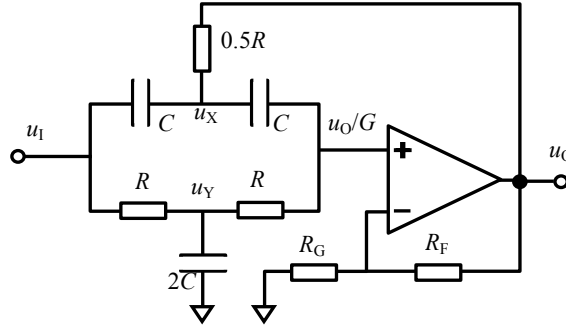


图 Section100-12 双 T 网络有源陷波器电路二

根据运放正输入端虚断，得电流方程：

$$SC(U_X - \frac{U_O}{G}) = \frac{\frac{U_O}{G} - U_Y}{R}$$

解得：

$$\begin{aligned} SCR(U_X - \frac{U_O}{G}) &= \frac{U_O}{G} - U_Y \\ U_Y &= \frac{U_O}{G} - SCR(U_X - \frac{U_O}{G}) = \frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X = \frac{U_O}{G} (1 + SCR) - SCR U_X \end{aligned} \quad (14)$$

对图中 u_X 点列出电流方程如下：

$$SC(U_I - U_X) + \frac{U_O - U_X}{0.5R} = SC(U_X - \frac{U_O}{G})$$

按照以下步骤简化，解得 U_X 与 U_I 、 U_O 的关系为：

$$\begin{aligned} 0.5SCR(U_I - U_X) + U_O - U_X &= 0.5SCR(U_X - \frac{U_O}{G}) \\ 0.5SCR U_I - 0.5SCR U_X + U_O - U_X &= 0.5SCR U_X - 0.5SCR \frac{U_O}{G} \\ (1 + SCR)U_X &= 0.5SCR U_I + (1 + \frac{0.5SCR}{G})U_O \\ U_X &= \frac{0.5SCR}{1 + SCR} U_I + \frac{1 + \frac{0.5SCR}{G}}{1 + SCR} U_O \end{aligned} \quad (15)$$

对图中 u_Y 点列出电流方程如下：

$$\frac{U_I - U_Y}{R} = 2SCU_Y + \frac{U_Y - \frac{U_O}{G}}{R}$$

将式(14)代入得：

$$\begin{aligned} \frac{U_I - (\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X)}{R} &= 2SC(\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X) + \frac{(\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X) - \frac{U_O}{G}}{R} \\ &= 2SC(\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X) + \frac{(\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X) - \frac{U_O}{G}}{R} \end{aligned}$$

按照以下步骤简化，解得 U_X 与 U_I 、 U_O 的关系为：

$$U_I - (\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X) = 2SCR(\frac{U_O}{G} + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X) + SCR \frac{U_O}{G} - SCR U_X$$

$$(2SCR + 2S^2C^2R^2)U_x = \frac{U_o}{G} + 4SCR \frac{U_o}{G} + 2S^2C^2R^2 \frac{U_o}{G} - U_I$$

解得 U_x 与 U_I 、 U_o 的关系为：

$$U_x = \frac{\frac{1}{G} + \frac{4SCR}{G} + \frac{2S^2C^2R^2}{G}}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_o - \frac{1}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_I \quad (16)$$

利用式(15)和式(16)，得：

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{G} + \frac{4SCR}{G} + \frac{2S^2C^2R^2}{G}}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_o - \frac{1}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_I &= \frac{0.5SCR}{1 + SCR} U_I + \frac{1 + \frac{0.5SCR}{G}}{1 + SCR} U_o \\ \frac{0.5SCR}{1 + SCR} U_I + \frac{1}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_I &= \frac{\frac{1}{G} + \frac{4SCR}{G} + \frac{2S^2C^2R^2}{G}}{2SCR + 2S^2C^2R^2} U_o - \frac{1 + \frac{0.5SCR}{G}}{1 + SCR} U_o \\ \frac{1 + S^2C^2R^2}{2SCR(1 + SCR)} U_I &= \frac{\frac{1}{G} + \frac{4SCR}{G} + \frac{S^2C^2R^2}{G} - 2SCR}{2SCR(1 + SCR)} U_o \\ A = \frac{U_o}{U_I} &= \frac{1 + S^2C^2R^2}{\frac{1}{G} + \frac{4SCR}{G} - 2SCR + \frac{S^2C^2R^2}{G}} = G \times \frac{1 + S^2C^2R^2}{1 + SCR(4 - 2G) + S^2C^2R^2} \end{aligned} \quad (\text{Section100-20})$$

将其写出频率表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = G \times \frac{1 + (j\omega)^2 C^2 R^2}{1 + j\omega CR(4 - 2G) + (j\omega)^2 C^2 R^2} \quad (\text{Section100-20a})$$

令：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (\text{Section100-21})$$

表达式变为：

$$\dot{A}(j\Omega) = G \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}(4 - 2G) + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = G \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + j\Omega(4 - 2G) + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section100-20b})$$

这是一个标准陷波器表达式，对比原式可知：

$$A_m = G \quad (\text{Section100-22})$$

$$Q = \frac{1}{4 - 2G} \quad (\text{Section100-23})$$

反解出：

$$G = \frac{4Q - 1}{2Q} \quad (\text{Section100-23a})$$

为了保证 Q 值不出现负数，要求 $G < 2$ 。如果运放组成的同相比例器增益为1，即跟随器，则 $Q=0.5$ 。

据此得出设计双T型陷波器电路二的方法如下：

- 1) 根据陷波频率，合理选择电容 C ，并依据式(Section100-21)反算 R 。
- 2) 根据设定的 A_m ，确定 $G=A_m$ 。要求 G 不得大于2。

3) 选定电阻 R_G , 则有:

$$1 + \frac{R_F}{R_G} = G = \frac{4Q - 1}{2Q}$$

$$R_F = \frac{2Q - 1}{2Q} R_G$$

(Section100-24)

与双 T 陷波器电路一相同, 本电路也不存在中途受限现象。

本电路也可以用 MF 法求解, 但稍麻烦一些。

$$Z_X = \frac{1}{SC} // \left(\frac{1}{SC} + R + R // \frac{1}{2SC} \right) = \frac{1}{SC} // \left(\frac{1}{SC} + R + \frac{R \times \frac{1}{2SC}}{R + \frac{1}{2SC}} \right) = \frac{1}{SC} // \left(\frac{1}{SC} + R + \frac{R}{1 + 2SRC} \right)$$

$$= \frac{1}{SC} // \left(\frac{1}{SC} + \frac{2R + 2SR^2C}{1 + 2SRC} \right) = \frac{1}{SC} // \left(\frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{SC + 2S^2RC^2} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{SC} \times \frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{SC + 2S^2RC^2}}{\frac{1}{SC} + \frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{SC + 2S^2RC^2}} = \frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{SC + 2S^2RC^2 + SC + 4S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3}$$

$$= \frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3}$$

$$\dot{F}_X = \frac{Z_X}{Z_X + 0.5R} = \frac{\frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3}}{\frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3} + 0.5R}$$

$$= \frac{\frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3}}{\frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3} + \frac{0.5R(2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3)}{2SC + 6S^2RC^2 + 2S^3R^2C^3}}$$

$$= \frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2 + SRC + 3S^2R^2C^2 + S^3R^3C^3}$$

$$= \frac{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}{1 + 5SRC + 5S^2R^2C^2 + S^3R^3C^3}$$

$$Z_+ = R + R // \frac{1}{2SC} = R + \frac{R}{1 + 2SRC} = \frac{2R + 2SR^2C}{1 + 2SRC}$$

$$\dot{F}_+ = \dot{F}_X \frac{Z_+}{Z_+ + \frac{1}{SC}} = \dot{F}_X \frac{\frac{2R + 2SR^2C}{1 + 2SRC}}{\frac{2R + 2SR^2C}{1 + 2SRC} + \frac{1}{SC}} = \dot{F}_X \frac{2SRC + 2S^2R^2C^2}{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}$$

$$= \frac{2SRC + 2S^2R^2C^2}{1 + 5SRC + 5S^2R^2C^2 + S^3R^3C^3} \times \frac{2SRC + 2S^2R^2C^2}{1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2}$$

$$= \frac{2SRC + 2S^2R^2C^2}{1 + 5SRC + 5S^2R^2C^2 + S^3R^3C^3}$$

$$= \frac{2SRC(1 + SRC)}{(1 + SRC)(1 - SRC + S^2R^2C^2) + 5SRC(1 + SRC)} = \frac{2SRC}{1 + 4SRC + S^2R^2C^2}$$

$$\dot{F}_- = \frac{1}{G} = k$$

$$\dot{F} = \dot{F}_- - \dot{F}_+ = k - \frac{2SRC}{1 + 4SRC + S^2R^2C^2} = \frac{(1 + 4SRC + S^2R^2C^2)k - 2SRC}{1 + 4SRC + S^2R^2C^2} \quad [17]$$

为求解衰减系数, 画出局部电路如图 Section100-13 所示。图中有 4 个变量 u_1 、 u_M 、 u_{X1} 、 u_{X2} 、要求解 u_M 与 u_1 的关系, 需要列出 3 个独立方程。在图中 u_{X1} 、 u_{X2} 、 u_M 三个节点, 列出节点电流方程, 它们是相互独立的:

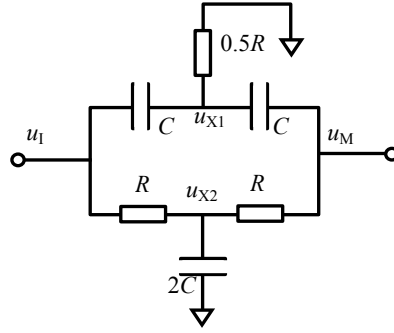


图 Section100-13 双 T 网络衰减系数

$$\frac{u_I - u_{X1}}{\frac{1}{SC}} = \frac{u_{X1} - 0}{0.5R} + \frac{u_{X1} - u_M}{\frac{1}{SC}} \quad (18)$$

$$\frac{u_I - u_{X2}}{R} = \frac{u_{X2} - 0}{\frac{1}{2SC}} + \frac{u_{X2} - u_M}{R} \quad (19)$$

$$\frac{u_{X1} - u_M}{\frac{1}{SC}} = -\frac{u_{X2} - u_M}{R} \quad (20)$$

从式(20)可得 u_{X2} 与 u_{X1} 的关系：

$$u_{X2} = u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1} \quad (21)$$

将式(21)代入式(19)，得：

$$\begin{aligned} & \frac{u_I - (u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1})}{R} \\ &= \frac{(u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1})2SRC}{R} + \frac{u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1} - u_M}{R} \\ & u_I - (u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1}) \\ &= (u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1})2SRC + u_M(1 + SRC) - SRC \times u_{X1} - u_M \\ & u_I - u_M(1 + SRC) + SRC \times u_{X1} = u_M(1 + SRC)2SRC - 2S^2R^2C^2u_{X1} + SRCu_M - SRCu_{X1} \\ & 2SRC \times u_{X1} + 2S^2R^2C^2u_{X1} = -u_I + u_M(1 + SRC) + u_M(1 + SRC)2SRC + SRCu_M \\ & u_{X1}(2SRC + 2S^2R^2C^2) = -u_I + u_M(1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2) \\ & u_{X1} = \frac{-u_I + u_M(1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2)}{2SRC + 2S^2R^2C^2} \end{aligned} \quad (22)$$

对式(18)进行化简，得 u_{X1} 与 u_I 、 u_M 的关系：

$$\begin{aligned} & \frac{u_I - u_{X1}}{\frac{1}{SC}} = \frac{u_{X1} - 0}{0.5R} + \frac{u_{X1} - u_M}{\frac{1}{SC}} \\ & 0.5SRC(u_I - u_{X1}) = u_{X1} + 0.5SRC(u_{X1} - u_M) \\ & u_{X1}(1 + SRC) = 0.5SRCu_I + 0.5SRCu_M \\ & u_{X1} = \frac{0.5SRCu_I + 0.5SRCu_M}{1 + SRC} \end{aligned} \quad (23)$$

利用式(22)和式(23)，得：

$$\begin{aligned} & \frac{0.5SRCu_I + 0.5SRCu_M}{1 + SRC} = \frac{-u_I + u_M(1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2)}{2SRC(1 + SRC)} \\ & 2SRC(0.5SRCu_I + 0.5SRCu_M) = -u_I + u_M(1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2) \end{aligned}$$

$$u_M(1 + 4SRC + 2S^2R^2C^2 - S^2R^2C^2) = (1 + S^2R^2C^2)u_I \quad [24]$$

到此，关系已经非常清晰了，据式[24]得：

$$\dot{M} = \frac{u_M}{u_I} = \frac{1 + S^2R^2C^2}{1 + 4SRC + S^2R^2C^2}$$

对比标准窄带阻传函，可以看出，这是一个标准陷波器传函，其 Q 为 0.25。

根据方框图法，已知衰减系数 \dot{M} 和反馈系数 \dot{F} ，则有：

$$\begin{aligned} \dot{A}(S) = \frac{\dot{M}}{\dot{F}} &= \frac{1 + S^2R^2C^2}{1 + 4SRC + S^2R^2C^2} \times \frac{1 + 4SRC + S^2R^2C^2}{(1 + 4SRC + S^2R^2C^2)k - 2SRC} \\ &= \frac{1}{k} \times \frac{1 + S^2R^2C^2}{1 + SRC(4 - \frac{2}{k}) + S^2R^2C^2} = G \times \frac{1 + S^2R^2C^2}{1 + SRC(4 - 2G) + S^2R^2C^2} \end{aligned}$$

与式[Section100-20]完全相同。虽然在此例中，MF 法显得更麻烦一些，但又一次证明这种方法是可行的。

举例 5：

设计一个双 T 陷波器。要求，只使用一颗运放 ADA4051-1，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的陷波频率为 $f_0=50Hz$ ， $Q=10$ ， A_m 不限。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：由于要求只能使用一颗运放，且中频增益不限，可采用双 T 陷波器电路二。

1) 根据表 Section84-1，选择 $C=1\mu F$ 。根据式[Section100-21]得：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = 3183\Omega$$

2) 由于运放增益不会大于 2，选择增益电阻为 $R_G=1k\Omega$ 较为合适。根据式[Section100-24]得：

$$R_F = \frac{2Q - 1}{2Q} R_G = 950\Omega$$

3) 据此绘制电路图如图 Section100-14 所示。仿真得频率特性如图 Section100-15 所示。仿真实测表明，中频增益为 5.8dB (1.95 倍) 与设计吻合，陷波频率为 49.9Hz，与设计基本吻合，品质因数 Q 为 $49.9/(52.77-47.64)=9.73$ ，与设计要求基本吻合。

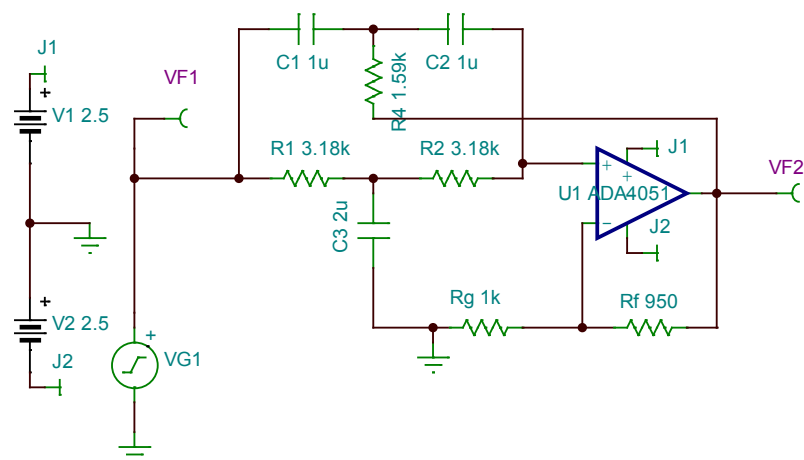


图 Section100-14 举例 5 电路

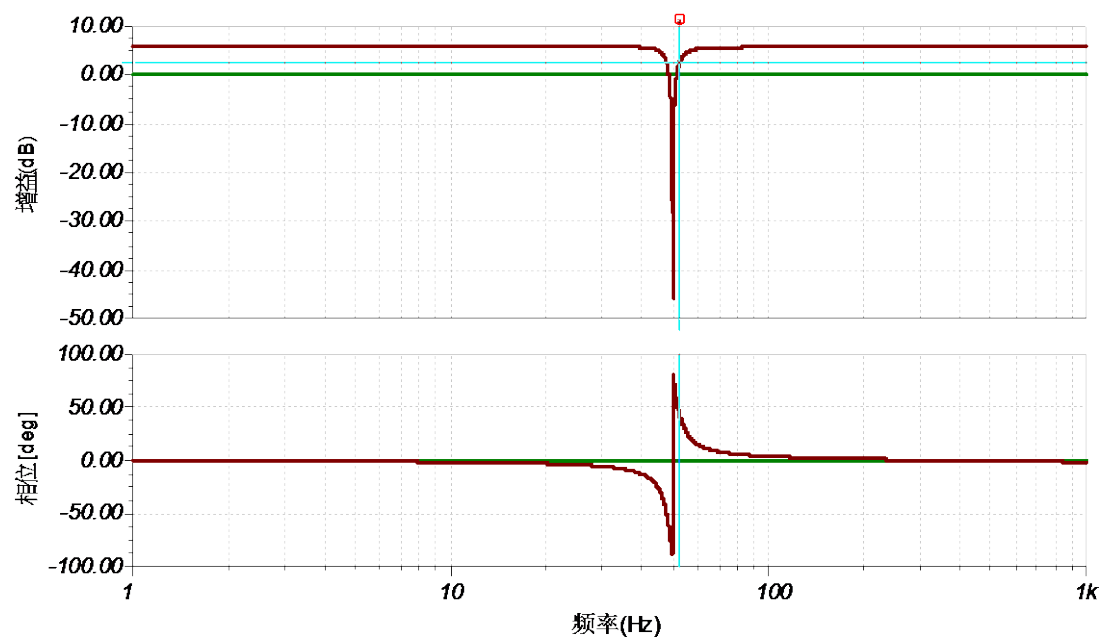


图 Section100-15 举例 5 电路仿真频率特性

4.7. 运放组成全通滤波器

我年轻时第一次听到全通滤波器，深感疑惑：用一根导线连接输入输出，不就是全部通过吗？后来我才知道，所谓的全通滤波器，不是说输出完全等于输入（即增益恒等于 1，相移恒为 0，与频率无关），而是有如下特征：

- 1) 全通滤波器对任意频率，其电压增益恒等于一个常数，即在幅度上，它是平坦的。
- 2) 对不同的输入频率，它具有不同的相移。

全通滤波器，分为一阶、二阶以及高阶。在本书 Section79 中，介绍了一阶全通，本节介绍二阶全通滤波器。

Section101. 二阶全通滤波器

回顾传函

二阶全通滤波器的归一化标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

(Section82-8a)

或者：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

(Section82-8b)

单运放二阶全通滤波器

单运放二阶全通滤波器如图 Section101-1 所示。

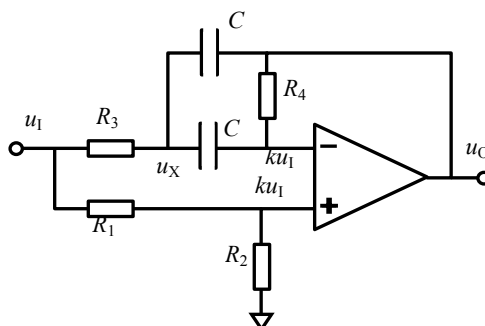


图 Section101-1 单运放二阶全通滤波器

根据电阻分压关系，运放正输入端为 ku_i ：

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

(1)

对运放负输入端，列出电流方程：

$$\frac{U_O - kU_I}{R_4} = SC(kU_I - U_X)$$

解得：

$$U_X = kU_I - \frac{U_O - kU_I}{SCR_4} = \frac{SCR_4 kU_I + kU_I - U_O}{SCR_4} \quad (2)$$

对图中 u_X 点，列出电流方程：

$$\frac{U_I - U_X}{R_3} = SC(U_X - U_O) + SC(U_X - kU_I)$$

将式(2)代入，整理得：

$$U_I - \frac{SCR_4 kU_I + kU_I - U_O}{SCR_4} = SCR_3 \left(2 \frac{SCR_4 kU_I + kU_I - U_O}{SCR_4} - U_O - kU_I \right)$$

$$\begin{aligned} SCR_4 U_I - SCR_4 kU_I - kU_I + U_O &= 2SCR_3 (SCR_4 kU_I + kU_I - U_O) - S^2 C^2 R_3 R_4 U_O - S^2 C^2 R_3 R_4 kU_I \\ &= S^2 C^2 R_3 R_4 kU_I + 2SCR_3 kU_I - 2SCR_3 U_O - S^2 C^2 R_3 R_4 U_O \\ U_O (1 + 2SCR_3 + S^2 C^2 R_3 R_4) &= U_I (k - SCR_4 + SCR_4 k + 2SCR_3 k + S^2 C^2 R_3 R_4 k) \end{aligned}$$

$$A = \frac{U_O}{U_I} = k \times \frac{1 - SC(\frac{R_4}{k} - R_4 - 2R_3) + S^2 C^2 R_3 R_4}{1 + 2SCR_3 + S^2 C^2 R_3 R_4}$$

为了与标准全通滤波器吻合，要求有：

$$\frac{R_4}{k} - R_4 - 2R_3 = 2R_3$$

即：

$$\begin{aligned} \frac{R_4}{k} - R_4 &= R_4 \left(\frac{1-k}{k} \right) = 4R_3 \\ R_4 &= \frac{4k}{1-k} R_3 \end{aligned} \quad (\text{Section101-1})$$

在此情况下，将传函写成频率表达式为：

$$A(j\omega) = k \times \frac{1 - j\omega 2CR_3 + (j\omega)^2 C^2 R_3 R_4}{1 + j\omega 2CR_3 + (j\omega)^2 C^2 R_3 R_4} \quad (\text{Section101-2})$$

令：

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_3 R_4}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_3 R_4}} \quad (\text{Section101-3})$$

则增益表达式变为：

$$A(j\Omega) = k \times \frac{1 - 2j\omega C\sqrt{R_3 R_4} \times \frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{R_4}} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + 2j\omega C\sqrt{R_3 R_4} \times \frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{R_4}} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = k \times \frac{1 - 2j\Omega \times \frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{R_4}} + (j\Omega)^2}{1 + 2j\Omega \times \frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{R_4}} + (j\Omega)^2} \quad (\text{Section101-2a})$$

对比标准全通滤波器表达式，可知：

$$A_m = k \quad (\text{Section101-4})$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_4}{R_3}} = \sqrt{\frac{4k}{1-k}}, \text{ 据式(Section101-1)}$$

[Section101-5]

可以看出，本电路中，品质因数 Q 与增益 A_m 都是 k 的函数，它们是相关的，不能独立调节。而对于全通滤波器来说，品质因数是首要的，增益可以在其它环节改变。因此，我们只能首先满足品质因数。据此，已知特征频率 f_0 ，品质因数 Q ，二阶全通滤波器的设计步骤为：

- 1) 根据表 Section84-1，选择合理的电容 C ；
- 2) 计算电阻 R_3 和 R_4 ，有两个约束式分别为：

$$Q = \sqrt{\frac{R_4}{R_3}} \quad \sqrt{R_3 R_4} = \frac{1}{2\pi C f_0}$$

两式相乘得：

$$R_4 = \frac{Q}{2\pi C f_0}$$

[Section101-6]

据式[Section101-5]，得：

$$R_3 = \frac{R_4}{Q^2} = \frac{1}{2\pi C f_0 Q}$$

[Section101-7]

- 3) 计算电阻 R_1 和 R_2 ，先合理选择电阻 R_2 ，求解电阻 R_1 方法为：
先计算 k ，据式[Section101-5]：

$$Q = \sqrt{\frac{4k}{1-k}}$$

得：

$$k = \frac{Q^2}{4 + Q^2}$$

[Section101-8]

又据式(1)：

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

解得：

$$R_1 = R_2 \frac{1-k}{k} = R_2 \frac{\frac{4}{4+Q^2}}{\frac{Q^2}{4+Q^2}} = \frac{4}{Q^2} R_2$$

[Section101-9]

举例1：

设计一个全通滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的中心频率为 $f_0=200Hz$ ， $Q=20$ 。电阻按照 E96 系列选取，用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：按照前述步骤进行：1) 选择电容等于 $0.1\mu F$ 。2) 根据式[Section101-6]得：

$$R_4 = \frac{Q}{2\pi C f_0} = \frac{20}{6.2832 \times 0.1 \times 10^{-6} \times 200} = 159.2k\Omega$$

按照 E96 系列 (参见本书表 Section84-2), 选择 $R_4=158\text{k}\Omega$ 。

根据式(Section101-7)得：

$$R_3 = \frac{1}{2\pi C f_0 Q} = \frac{1}{6.2832 \times 0.1 \times 10^{-6} \times 200 \times 20} = 397.9\Omega$$

按照 E96 系列, 选择 $R_3=392\Omega$ 。

3) 选择电阻 $R_2=10\text{k}\Omega$, 按照式(Section101-9)得：

$$R_1 = \frac{4}{Q^2} R_2 = \frac{4}{20 \times 20} \times 10\text{k}\Omega = 100\Omega$$

至此设计完毕, 用 TINA-TI 仿真软件设计电路如图 Section101-2 所示。仿真结果如图

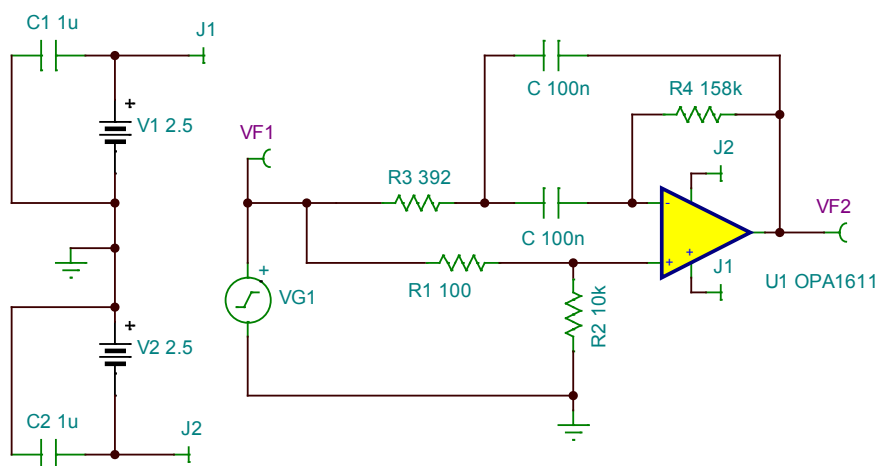


图 Section101-2 举例 1 TINA-TI 仿真电路

Section101-3 所示。图中幅频特性在中心频率附近有微弱的隆起——平坦区增益在图中读

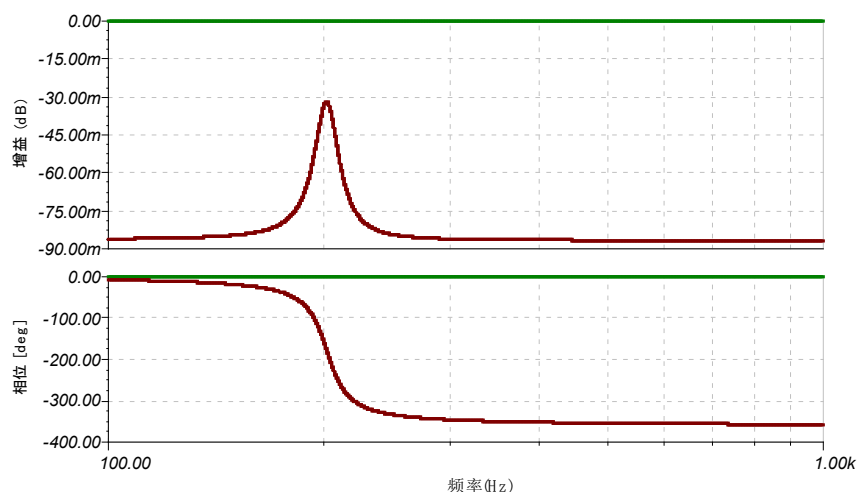


图 Section101-3 举例 1 TINA-TI 仿真结果

数为 $-86\text{mdB}=0.99014$ 倍, 隆起峰值增益为 $-32\text{mdB}=0.99632$ 倍——这是由于电阻选择无法足够精确造成的。要想实现精准效果, 必须摆脱 E96 系列的限制, 采用定制电阻或者多电阻串联、并联的方式来实现, 还要保证其温度漂移、时间漂移足够小。

关于本电路, 还有以下三点需要注意：

1) 电容的选择。本例中, 选择电容为 $0.1\mu\text{F}$ 。其实从表 Section84-1 可以看出, 选择 $0.01\mu\text{F}$ 更为合适。但是, 表格 Section84-1 的初衷是为了让计算出的电阻值处于安全的区

间内，一般来说，不要超过 $1000\text{k}\Omega$ ，不要小于 100Ω 。随着计算电阻公式的不同，表 Section84-1 也只能作为参考，不能盲从。其实，说得更清楚一些，电容的选择就是试出来的：计算出的电阻如果太大，就适当增大电容，如果太小，就减小电容。

另外，除非万不得已，一般都应将电容控制在 100pF – 100nF 之间，这是绝大多数精密电容器都具备的容值。在选择电容类型时，就会有足够大的选择余地。

2) E96 系列中的二选一。在选择电阻 R_3 时，我们发现，计算结果为 397.9Ω ，此值介于 E96 系列中的 392Ω 和 402Ω 之间，是向右选择 402Ω ，还是向左选择 392Ω 呢？多数情况下，我们会选择相对误差较小的那一个。但问题不是如此简单，这个选择有讲究：如果要保证中心频率尽量准确，那么 R_4 选小了， R_3 就应偏大，以保证两者的乘积尽量接近理论值，应选 $R_3=402\Omega$ ；如果要保证 Q 值尽量准确， R_3 就应与 R_4 的选择方向相同，即选小，因为 Q 与两个电阻的比值有关。本题没有具体要求，因后面计算涉及到 Q 值，我觉得应尽量保证 Q 值准确，故选 $R_3=392\Omega$ 。这样做，带来的后果是中心频率发生了变化：两个相乘的电阻都选小了，就导致中心频率必然会变大。图 Section101-3 的幅频特性图也显现了这点，可以看出中心频率比 2000Hz 稍大一些。

3) 电阻 R_2 的选择。本例中选择为 $10\text{k}\Omega$ ，为什么呢？我们总说合理选择，什么是合理呢？这真像菜谱中说的：“加入适量的盐，加入少许的白糖”一样，让初学者一头的雾水。抱怨归抱怨，我们只能说“合理”，因为第一它太复杂了，严格起来需要考虑的问题非常多，它涉及运放偏置电流、失调电流，以及失调电压，还有电阻热噪声等，一时半会儿说不清楚。第二，如果不严格，你的选择只要不太离谱就可以了——不要选太大的，也不要选太小的，就可以了。

既然说了，就给大家几个建议，酌情考虑：

1) 在本电路中，尽量选择电阻 $R_2/R_1=R_4$ ，这样会最大程度减小运放偏置电流对输出失调的影响。而一旦选择超低偏置电流的运放——如本例中的 OPA350，其偏置电流典型值仅为 0.1pA ，它乘以 $158\text{k}\Omega$ 电阻仅能产生 15.8nV 的失调电压，完全可以忽略——这个要求就可以不考虑了。本例中没有考虑此因素。

2) 尽量选择小的电阻。这样可以有效降低输出噪声。但是，由于选择小电阻而导致的电流增加，需要尽量避免。本例中如果 R_2 选择为 100Ω ，那么计算出的 R_1 就只有 1Ω ，我们就需要考虑输入信号面对如此小的电阻，能否提供足够的电流输出。

3) 单一选择小电阻以降低噪声是没有意义的。由于电路中 R_4 已经是 $158\text{k}\Omega$ ，它产生的噪声是不可消除的，如果 R_2 选择为 $158\text{k}\Omega$ ，那么总噪声是 R_4 噪声的 1.414 倍。拼命降低 R_2 ，只能让噪声变为 R_4 噪声的 1 倍，效果不明显。

4) 尽量选择常规电阻，库存多，价格低。

综上所述， $10\text{k}\Omega$ 相比于 $158\text{k}\Omega$ 已经足够小，且给输入信号带来的电流压力也不大，并且它是常规的，就选它吧，别纠结了。

“1-2BP”型全通滤波器

根据式(Section82-1)，标准带通滤波器的频率表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

而标准全通滤波器的频率表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

两者之间分母相同，容易产生关系。可以发现，对单位增益 $A_m = 1$ 有下式成立：

$$\dot{A}(j\Omega) = 1 - 2 \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} = \frac{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2 - 2\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2} = \frac{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

即，用原始信号（即 1）减去 2 倍带通滤波器输出，将是一个标准全通效果。据此，诞生了“1-2BP”型全通滤波器。

多数带通滤波器的峰值增益 A_m 不一定是 1 倍，同时它们也许是同相的，比如 Sallen-Key 型，也许是反相的如 MFB 型。针对不同种类的带通，以下结构可以实现全通滤波器。

适用于同相带通

图 Section101-4 适用于同相带通产生的全通滤波器。

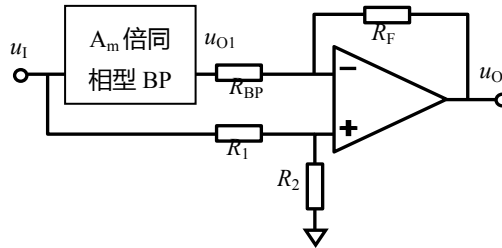


图 Section101-4 用于同相带通的“1-2BP”型全通滤波器

$$\begin{aligned} u_O &= -u_{O1} \frac{R_F}{R_{BP}} + u_I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(1 + \frac{R_F}{R_{BP}} \right) = -A_m(BP)k_2u_I + k_1(1 + k_2)u_I \\ &= u_I(k_1(1 + k_2) - A_m(BP)k_2) = u_I \times k_1(1 + k_2) \left(1 - \frac{A_mk_2}{k_1(1 + k_2)}(BP) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

其中，(BP)为 1 倍增益的标准带通表达式， k_1 为衰减因子，一定小于等于 1， k_2 为比例因子，介于 0~ ∞ 。

$$k_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3a)$$

$$k_2 = \frac{R_F}{R_{BP}} \quad (3b)$$

要想让式(3)成为标准全通表达式，定有：

$$\frac{A_mk_2}{k_1(1 + k_2)} = 2 \quad (4)$$

只要合理选择 k_1 和 k_2 ，对于任何 A_m 都可保证式(4)成立。由式(4)，在初步选择 k_1 情况下，有：

$$k_2 = \frac{2k_1}{A_m - 2k_1} \quad [\text{Section101-10}]$$

此时，最终的输出变为：

$$u_o = u_i \times k_1(1 + k_2) \left(1 - \frac{A_m k_2}{k_1(1 + k_2)} (BP)\right) = u_i \times A_{m_AP} \times (AP)$$

其中， (AP) 为增益为1的标准全通滤波器表达式， A_{m_AP} 为全通滤波器的增益：

$$A_{m_AP} = k_1(1 + k_2) \quad [\text{Section101-11}]$$

举例 2：

利用 Section98 中举例 1 带通滤波器，设计一个“1-2BP”型全通滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的中心频率为 $f_0=50\text{Hz}$ ， $Q=10$ 。电阻按照 E96 系列选取，用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：首先必须明确，“1-2BP”型全通滤波器，只能继承母本带通滤波器的中心频率 f_0 以及品质因数 Q 。因此，回顾图 Section98-4，其关键指标为：

$$G = 1 + \frac{R_F}{R_G} = 1 + \frac{1.91\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega} = 2.91$$

则根据式(Section98-3)有：

$$A_m = \frac{G}{3 - G} = \frac{2.91}{3 - 2.91} = 32.33$$

方案一：

如果选择衰减因子 k_1 等于0.5（即1比1电阻），则有：

$$k_2 = \frac{2k_1}{A_m - 2k_1} = \frac{2 \times 0.5}{32.33 - 2 \times 0.5} = \frac{1}{31.33}$$

根据式(3b)，选择反馈电阻为 $R_F=1\text{k}\Omega$ ，则增益电阻为 $R_{BP}=31.33\text{k}\Omega$ ，按照 E96 系列取值为 $R_{BP}=31.6\text{k}\Omega$ 。

选择电阻 $R_2=R_1=2\text{k}\Omega$ ，实现 k_1 等于0.5即可。由此，形成如图 Section101-5 所示电路。

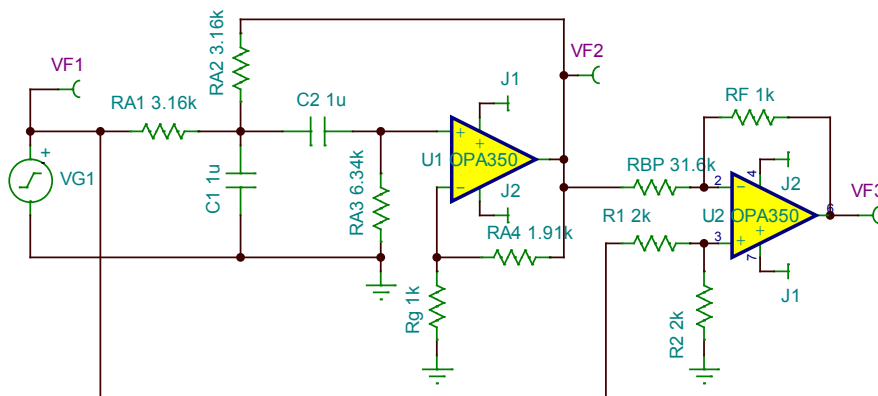


图 Section101-5 举例 2 “1-2BP”型全通滤波器

方案二：

如果选择衰减因子 k_1 等于1，则有：

$$k_2 = \frac{2k_1}{A_m - 2k_1} = \frac{2 \times 1}{32.33 - 2 \times 1} = \frac{1}{15.17}$$

根据式(3b)，选择反馈电阻为 $R_F=1k\Omega$ ，则增益电阻为 $R_{BP}=15.17k\Omega$ ，按照 E96 系列取值为 $R_{BP}=15k\Omega$ 。电路如图 Section101-6 所示。

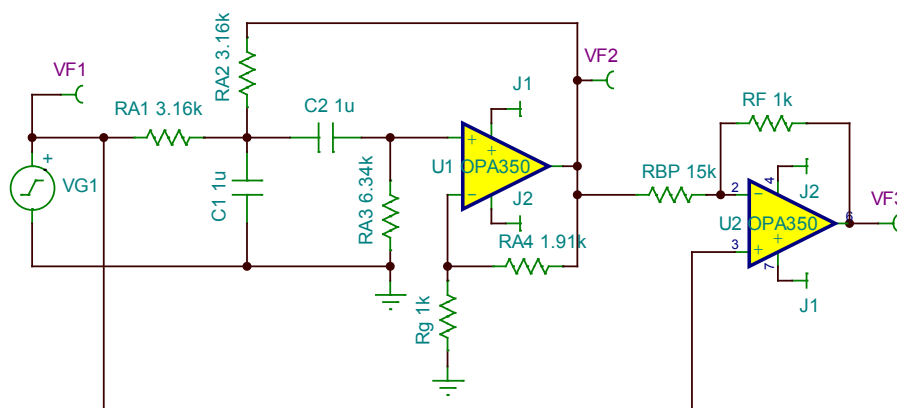


图 Section101-6 举例 2 “1-2BP”型全通滤波器之跟随器型

对比方案一和二，结论是，只要能够使用 k_1 等于 1 的，不要选用方案一。原因是，任何先衰减再放大的方案，都会引起额外的信噪比下降，第二，方案一的两个电阻反差太大，也是不利的。

既然如此，何必要用方案一电路呢？请思考，在什么情况下不得不使用方案一电路。提示，当 A_m 很小的时候。

适用于反相带通之一

对于反相带通，比如 MFB 型，直接使用加法运算就可以实现全通滤波。而实现加法则有两种方法，同相输入加法器，以及反相输入加法器。Section101-7 是使用同相输入加法器实现的。

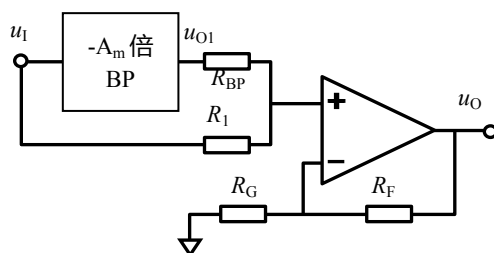


图 Section101-7 用于反相带通的“1-2BP”型全通滤波器

$$\begin{aligned} u_O &= (u_{O1} \frac{R_1}{R_{BP} + R_1} + u_I \frac{R_{BP}}{R_{BP} + R_1}) (1 + \frac{R_F}{R_G}) = (-A_m(BP) \frac{R_1}{R_{BP} + R_1} + \frac{R_{BP}}{R_{BP} + R_1}) (1 + \frac{R_F}{R_G}) u_I \\ &= (1 + \frac{R_F}{R_G}) \frac{R_{BP}}{R_{BP} + R_1} u_I \times (1 - \frac{R_1 A_m}{R_{BP}} (BP)) \\ &= G_1 \frac{1}{1 + k_1} u_I \times (1 - k_1 A_m(BP)) \end{aligned} \quad (5)$$

其中，(BP)为 1 倍增益的标准带通表达式， k_1 为比例因子， G_1 为增益因子，大于 1。

$$k_1 = \frac{R_1}{R_{BP}}$$

(5a)

$$G_1 = 1 + \frac{R_F}{R_G}$$

(5b)

要想让式(5)成为标准全通表达式, 定有:

$$k_1 A_m = 2$$

即

$$k_1 = \frac{R_1}{R_{BP}} = \frac{2}{A_m}$$

(Section101-12)

此时，最终的输出变为：

$$u_o = G_1 \frac{1}{1 + k_1} u_l \times (1 - 2(BP)) = u_l \times A_{m_AP} \times (AP)$$

其中，总增益为：

$$A_{m_AP} = G_1 \frac{1}{1 + k_1}$$

(Section101-13)

举例 3 :

利用 Section98 中举例 3 带通滤波器，设计一个“1-2BP”型全通滤波器。要求，运放为 OPA1611，供电电压为 $\pm 5V$ ，滤波器的中心频率为 $f_0=50Hz$ ， $Q=10$ ，增益为 10。电阻按照 E96 系列选取，用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：举例 3 带通滤波器为 MFB 型，属于反相型，其峰值增益的模为 10，即： $A_m = 10$ ，利用式(Section101-12)，得：

$$k_1 = \frac{R_1}{R_{BP}} = \frac{2}{A_m} = 0.2$$

选择 $R_1=1k$, 则 : $R_{BP} = 5k\Omega$ 。取 E96 系列 , $R_{BP}=4.99k\Omega$ 。

根据式(Section101-13), 要求增益为 10, 则有:

$$A_{m_AP} = G_1 \frac{1}{1 + k_1} = 10 \rightarrow G_1 = 10(1 + k_1) = 12 = 1 + \frac{R_F}{R_G}$$

选择 $R_G=1k$, 则 : $R_F = 11k\Omega$ 。取 E96 系列 , $R_{RP}=11k\Omega$ 。

至此设计完毕，电路如图 Section101-8 所示。

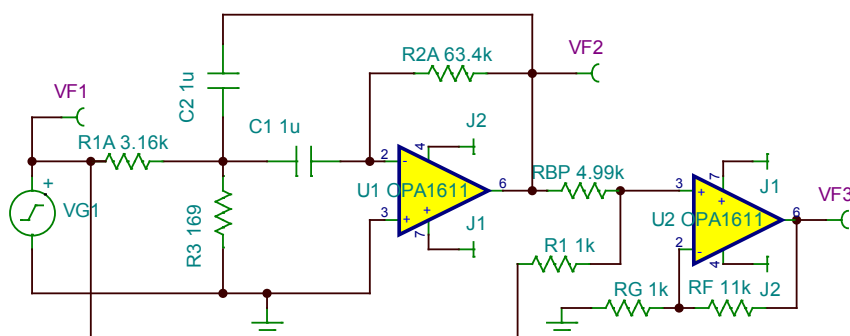


图 Section101-8 举例 3 电路

适用于反相带通之二

利用反相加法器，也可以实现针对反相带通的全通滤波器，其电路结构如图 Section101-9 所示，分析如下：

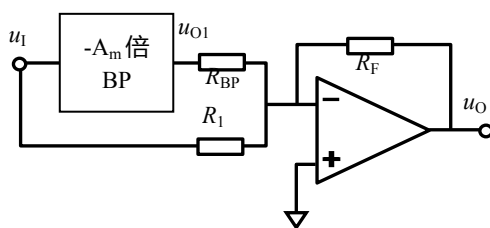


图 Section101-9 用于反相带通的“1-2BP”型全通滤波器

$$\begin{aligned}
 u_O &= -(u_{O1} \frac{R_F}{R_{BP}} + u_I \frac{R_F}{R_1}) = -(-A_m(BP) \frac{R_F}{R_{BP}} + \frac{R_F}{R_1})u_I = -u_I \times \frac{R_F}{R_1} \times (1 - \frac{R_1 A_m}{R_{BP}}(BP)) \\
 &= -Gu_I \times (1 - \frac{R_1 A_m}{R_{BP}} A_m(BP))
 \end{aligned}$$

[6]

其中，(BP)为1倍增益的标准带通表达式。 G 为全通滤波器增益：

$$G = \frac{R_F}{R_1}$$

[Section101-14]

要想让式(6)成为标准全通表达式，定有：

$$\frac{R_1 A_m}{R_{BP}} = 2$$

即

$$R_{BP} = \frac{R_1 A_m}{2}$$

[Section101-15]

举例 4：

利用 Section98 中举例 3 带通滤波器，采用图设计一个“1-2BP”型全通滤波器。要求，运放为 OPA1611，供电电压为 $\pm 5V$ ，滤波器的中心频率为 $f_0=50Hz$ ， $Q=10$ ，增益为 10。电阻按照 E96 系列选取，用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：采用图 Section101-9 结构实现。与举例 3 非常相似，设计步骤略，最终电路如图 Section101-10 所示。

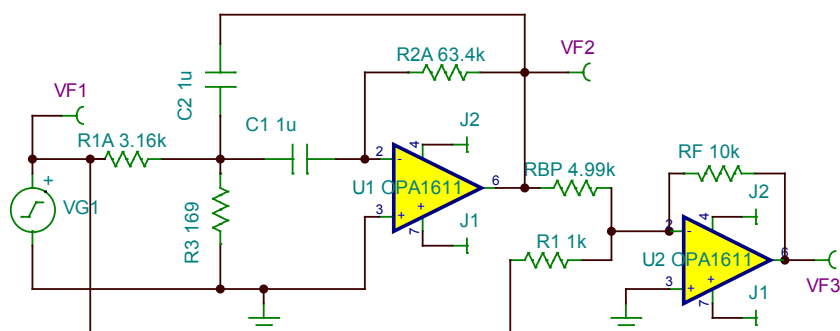


图 Section101-10 举例 4 电路

4.8. 其它类型的模拟滤波器

本书 4.3 节~4.7 节，讲述了低通、高通、带通、带阻、全通等 5 种滤波器，它们的电路形态专一的，即一种电路实现一种滤波功能。还有另外一类滤波器，它们的电路中，同时包含多种滤波器形态的输出端，如果再经过适当的加减法运算，还能实现更多种类不同的滤波器形态。因此，它们是前述 5 种滤波器的补充。本节讲述此类中的 1) 状态可变型、2) Biquad 型、3) Fleischer-Tow 型。

另外，椭圆滤波器完全不同于前述 5 种滤波器，但在实际应用中却使用广泛。本书实在找不到合适的地方安置它，只好先放在本节——毕竟它也属于其他类型吗。

Section102. 状态可变型滤波器分析

这种滤波器也叫 KHN 滤波器，具有三个运放，实现三个不同类型的输出：二阶高通、二阶低通、以及二阶带通，电路如图 Section102-1 所示。

传函分析

为了减少图中标记长度，暂时用 u_X 代替图中的带通输出 u_{OUT_BP} 。通过局部电路分析得：

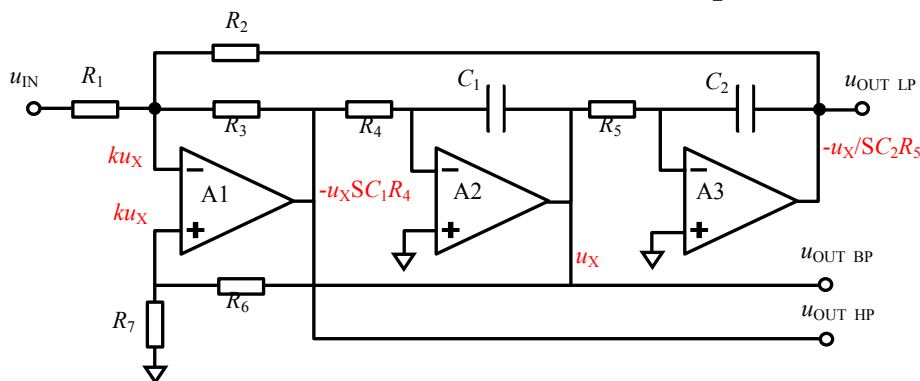


图 Section102-1 状态可变型滤波器

运放 A1 的输出为 u_{OUT_HP} ，有：

$$U_X = -\frac{1}{SC_1 R_4} U_{OUT_HP} \rightarrow U_{OUT_HP} = -U_X SC_1 R_4 \quad (1)$$

运放 A3 的输出为 u_{OUT_LP} ，有：

$$U_{OUT_LP} = -U_X \frac{1}{SC_2 R_5} = -\frac{U_X}{SC_2 R_5} \quad (2)$$

运放 A1 的两个输入端为 ku_X ，有：

$$k = \frac{R_7}{R_6 + R_7} \quad (3)$$

将上述结论标注与原图中。据此，对图中运放 A1 的输出电压列出方程如下：

$$kU_X - R_3 \left(\frac{U_{IN} - kU_X}{R_1} + \frac{\frac{-U_X}{SC_2R_5} - kU_X}{R_2} \right) = -U_X SC_1R_4$$

化简：

$$kR_1R_2U_X - R_3(R_2(U_{IN} - kU_X) + R_1(\frac{-U_X}{SC_2R_5} - kU_X)) = -SC_1R_4R_1R_2U_X$$

$$kR_1R_2U_X + kR_3R_2U_X + kR_1R_3U_X + SC_1R_4R_1R_2U_X + R_1R_3\frac{U_X}{SC_2R_5} = R_3R_2U_{IN}$$

$$(R_1R_3 + (kR_1R_2 + kR_3R_2 + kR_1R_3)SC_2R_5 + S^2C_1C_2R_5R_4R_1R_2)U_X = SC_2R_5R_3R_2U_{IN}$$

得出如下结论：

$$\begin{aligned} A_{BP} = \frac{U_X}{U_{IN}} &= \frac{SC_2R_2R_3R_5}{R_1R_3 + (kR_1R_2 + kR_2R_3 + kR_1R_3)SC_2R_5 + S^2C_1C_2R_5R_4R_1R_2} \\ &= \frac{\frac{R_2}{R_1}SC_2R_5}{1 + \frac{(kR_1R_2 + kR_2R_3 + kR_1R_3)}{R_1R_3}SC_2R_5 + S^2C_1C_2\frac{R_5R_4R_2}{R_3}} \end{aligned} \quad \text{[Section102-1]}$$

$$\begin{aligned} A_{LP} = \frac{U_{OUT_LP}}{U_{IN}} &= \frac{\frac{-U_X}{SC_2R_5}}{U_{IN}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{(kR_1R_2 + kR_2R_3 + kR_1R_3)}{R_1R_3}SC_2R_5 + S^2C_1C_2\frac{R_5R_4R_2}{R_3}} \end{aligned} \quad \text{[Section102-2]}$$

$$\begin{aligned} A_{HP} = \frac{U_{OUT_HP}}{U_{IN}} &= \frac{-U_X SC_1R_4}{U_{IN}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}S^2C_1C_2R_5R_4}{1 + \frac{(kR_1R_2 + kR_2R_3 + kR_1R_3)}{R_1R_3}SC_2R_5 + S^2C_1C_2\frac{R_5R_4R_2}{R_3}} \end{aligned} \quad \text{[Section102-3]}$$

可以看出，带通、低通、高通三种输出中，分母表达式完全相同，这意味着它们具有相同的特征频率和品质因数。

必要的简化

让我们重新回到本节开始，图 Section102-1 所示电路，其推导结果为式[Section102-1]~式[Section102-3]。

对于一个二阶低通、高通、带通滤波器来说，特征频率 f_0 、平坦区增益 A_m 、品质因数 Q 三个参量，就可以唯一确定一个滤波器。理论上说，只需要三个阻容参数即可确定这三个关键参量。而前述的表达式中，有 7 个电阻，2 个电容，存在 $9-3=6$ 个冗余量。因此，我们必须做出如下合理的约定，以减少冗余，进而简化设计。

- 1) 设定 $C_1=C_2=C$ ，且电容值 C 由设计者自行确定。这减少了 2 个冗余量。
- 2) 设定电阻 $R_2=R_3=R_6=R_A$ ，且 R_A 由设计者自行确定。这减少了 3 个冗余量。
- 3) 设定电阻 $R_4=R_5=R_X$ ， R_X 为未知量。这减少了 1 个冗余量。最终，只剩下电阻 R_1 、 R_X 、 R_7 三个未知量待求。这样，前述表达式就简化成如下：

对于带通：

$$A_{BP} = \frac{\frac{R_A}{R_1}SCR_X}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1}SCR_X + S^2C^2R_X^2} \quad \text{[Section102-1a]}$$

对于低通：

$$A_{LP} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1}SCR_X + S^2C^2R_X^2}$$

[Section102-2a]

对于高通：

$$A_{HP} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}S^2C^2R_X^2}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1}SCR_X + S^2C^2R_X^2}$$

[Section102-3a]

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2R_X^2 \quad \omega_0 = \frac{1}{CR_X} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi CR_X}$$

[Section102-4]

则有：

带通的分析 and 设计

根据式[Section102-1a]，将其写成频率表达式为：

$$\begin{aligned} A_{BP}(j\omega) &= \frac{\frac{R_A}{R_1}j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ &= \frac{R_A}{R_1} \frac{R_1}{2kR_1 + kR_A} \times \frac{\frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1}j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ &= A_{m_{BP}} \times \frac{\frac{1}{Q} \times j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} \times j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned}$$

[Section102-1b]

其中，有：

$$A_{m_{BP}} = \frac{R_A}{R_1} \frac{R_1}{2kR_1 + kR_A} = \frac{R_A}{R_1} Q$$

[Section102-5]

$$Q = \frac{R_1}{2kR_1 + kR_A}$$

[Section102-6]

以上分析，完成了“已知电阻、电容，获得 f_0 、 $A_{m_{BP}}$ 、 Q ”的任务。而要实现设计，就需要完成“已知 f_0 、 $A_{m_{BP}}$ 、 Q ，求解电阻、电容”的任务，为此，有如下步骤：

- 1) 根据表 Section84-1，合理选择电容 $C_1=C_2=C$ ；
- 2) 合理选择 $R_2=R_3=R_6=R_A$ ；
- 3) 根据式[Section102-4]，反解出电阻 $R_4=R_5=R_X$ ：

$$R_4 = R_5 = R_X = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

- 4) 将式[Section102-5]和式[Section102-6]相除，得：

$$R_1 = R_A \frac{Q}{A_{m_BP}}$$

(Section102-7)

5) 根据式(3)得：

$$k = \frac{R_7}{R_6 + R_7} \Rightarrow R_7 = \frac{k}{1-k} R_A$$

根据式(Section102-6)得：

$$k = \frac{R_1}{(2R_1 + R_A)Q}$$

则有：

$$R_7 = \frac{k}{1-k} R_A = \frac{\frac{R_1}{(2R_1 + R_A)Q}}{\frac{(2R_1 + R_A)Q - R_1}{(2R_1 + R_A)Q}} R_A = \frac{R_1 R_A}{(2R_1 + R_A)Q - R_1}$$

(Section102-8)

低通和高通的分析 and 设计

状态可变型滤波器的低通、高通输出频域表达式为：

$$\dot{A}_{LP}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = A_{m_LHP} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \times j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

(Section102-2b)

$$\dot{A}_{HP}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{(2kR_1 + kR_A)}{R_1} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = A_{m_LHP} \times \frac{(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q} \times j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

(Section102-3b)

对比低通标准表达式，可知：

$$A_{m_LHP} = -\frac{R_2}{R_1} = \frac{A_{m_BP}}{Q}$$

(Section102-9)

$$Q = \frac{R_1}{2kR_1 + kR_A}$$

(Section102-6)

可见特征频率 f_0 和品质因数 Q 的表达式与带通完全相同，唯一区别的是中频增益 A_{m_LHP} ，它的下标是 LHP，即低高通，换句话说，低通的 0Hz 增益和高通的无穷大 Hz 增益是完全相同的，都是 R_2/R_1 。此值，与带通的峰值增益 A_{m_BP} 表达式相差一个 Q 倍。

设计方法更为简单：

1) 根据表 Section84-1，合理选择电容 $C_1=C_2=C$ ；

2) 合理选择 $R_2=R_3=R_6=R_A$ ；

3) 根据式(Section102-4)，反解出电阻 $R_4=R_5=R_X$ ：

$$R_4 = R_5 = R_X = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

4) 据式(Section102-9)，反解电阻：

$$R_1 = -\frac{R_A}{A_{m_LHP}}$$

(Section102-10)

5) 根据式(3)得：

$$k = \frac{R_7}{R_6 + R_7} \Rightarrow R_7 = \frac{k}{1-k} R_A$$

根据式(Section102-6)得：

$$k = \frac{R_1}{(2R_1 + R_A)Q}$$

则有：

$$R_7 = \frac{k}{1-k} R_A = \frac{\frac{R_1}{(2R_1 + R_A)Q}}{\frac{(2R_1 + R_A)Q - R_1}{(2R_1 + R_A)Q}} R_A = \frac{R_1 R_A}{(2R_1 + R_A)Q - R_1}$$

(Section102-8)

举例1 带通：

利用状态可变型滤波器设计一个窄带通滤波器。要求滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=2$ ， $A_{m_BP}=5$ ，并据此估算其中的低通、高通输出。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：电路结构如图 Section102-1。设计步骤如下：

- 1) 根据表 Section84-1，合理选择电容 $C_1=C_2=C=0.1\mu\text{F}$ ；
- 2) 合理选择 $R_2=R_3=R_6=R_A=10\text{k}\Omega$ ；
- 3) 根据式(Section102-4)，反解出电阻 $R_4=R_5=R_X=1/2\pi f_0 C=31831\Omega$ 。
- 4) 据式(Section102-7)，得： $R_1=R_A Q/A_{m_BP}=4000\Omega$ 。
- 5) 据式(Section102-8)得： $R_7=R_1 R_A/((2R_1 + R_A)Q - R_1)=1250\Omega$ 。

估算图中低通和高通的性质：图中运放 3 的输出是低通，运放 1 的输出是高通，其特征频率和品质因数均与带通相同，两者的平坦区增益应为带通的峰值增益除以 Q ，为 2.5。

据此得到电路如图 Section102-2 所示，三个输出的频率特性如图 Section102-3 所示。

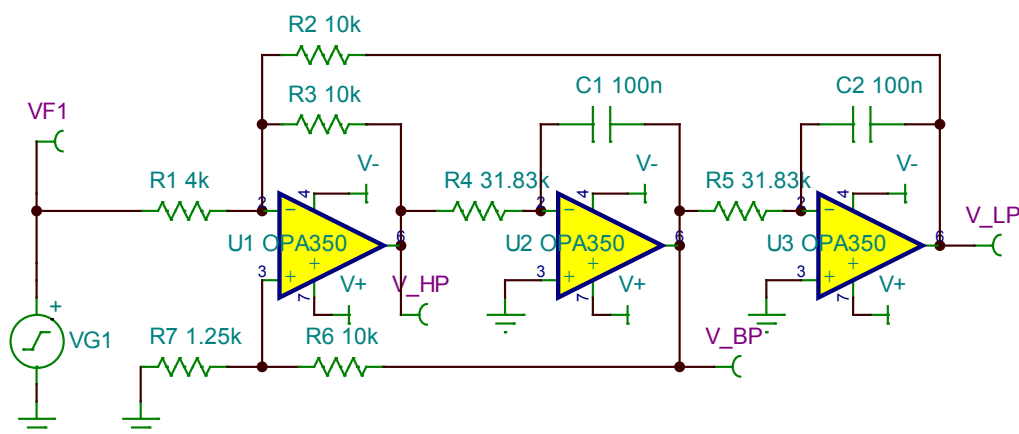


图 Section102-2 举例1 电路

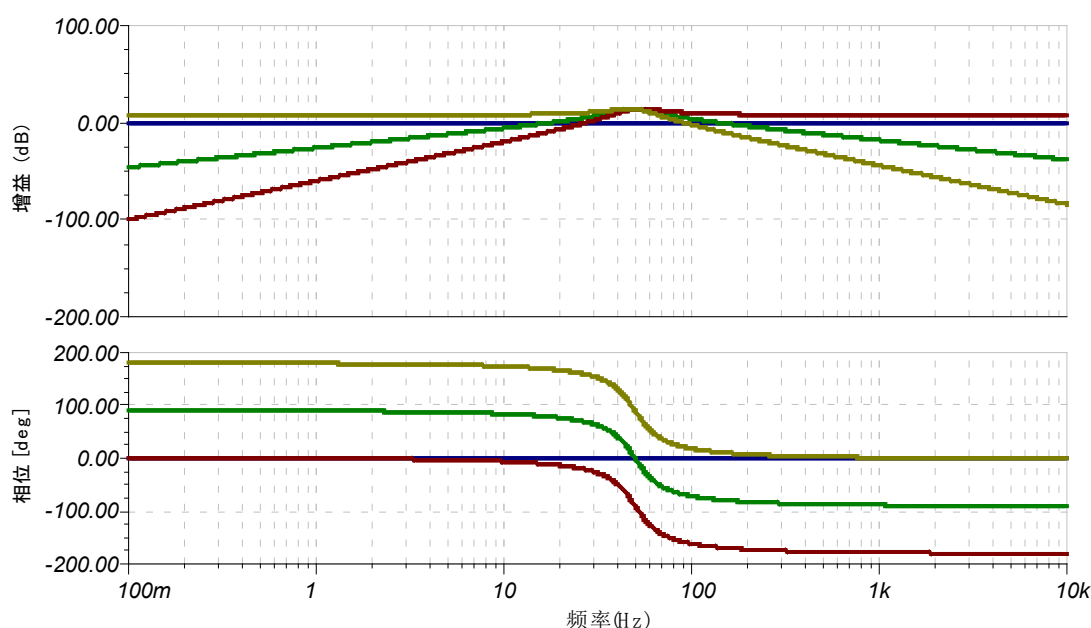


图 Section102-3 举例 1 仿真频率特性

UAF42-集成状态可变型滤波器

针对状态可变型滤波器，德州仪器公司推出了集成产品 UAF42，它可以直接形成低通、高通、带通输出，结合内部提供的第 4 只运放，还可形成带阻、全通，或者反相切比雪夫。电路结构如图 Section102-4 所示。

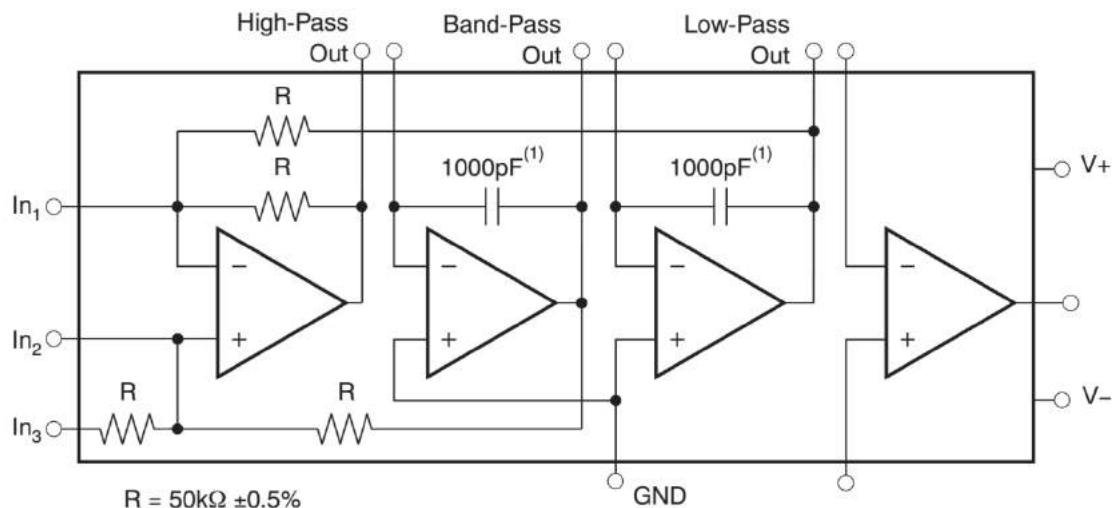


图 Section102-4 集成滤波器 UAF42 内部结构

与使用独立的运放搭建状态可变型滤波器相比，集成滤波器 UAF42 的最大优势在于：它内部具备 4 只误差小于 $\pm 0.5\%$ 的 $50\text{k}\Omega$ 电阻 R ，还具有 2 只误差小于 $\pm 0.5\%$ 的 1000pF 电容。这对于实现精准频率，特别是带通、带阻，具有重要价值。手工选择阻容，很难做到这一点。

UAF42 能够实现两种输入连接方式：同相输入和反相输入，图 Section102-5 是本节阐述的接法，即反相输入接法。它有 3 组由用户选择的电阻，以决定滤波器的 3 个关键参数：中心频率由图中电阻 R_{F1} 和 R_{F2} 决定，品质因数由图中 R_Q 决定，而增益则由电阻 R_G 决定。

另外一种接法是我们此前没有阐述的，即同相接法，如图 Section102-6 所示。它的传函与反相输入接法略有区别，读者可以自行推导，也可直接参考 UAF42 数据手册。

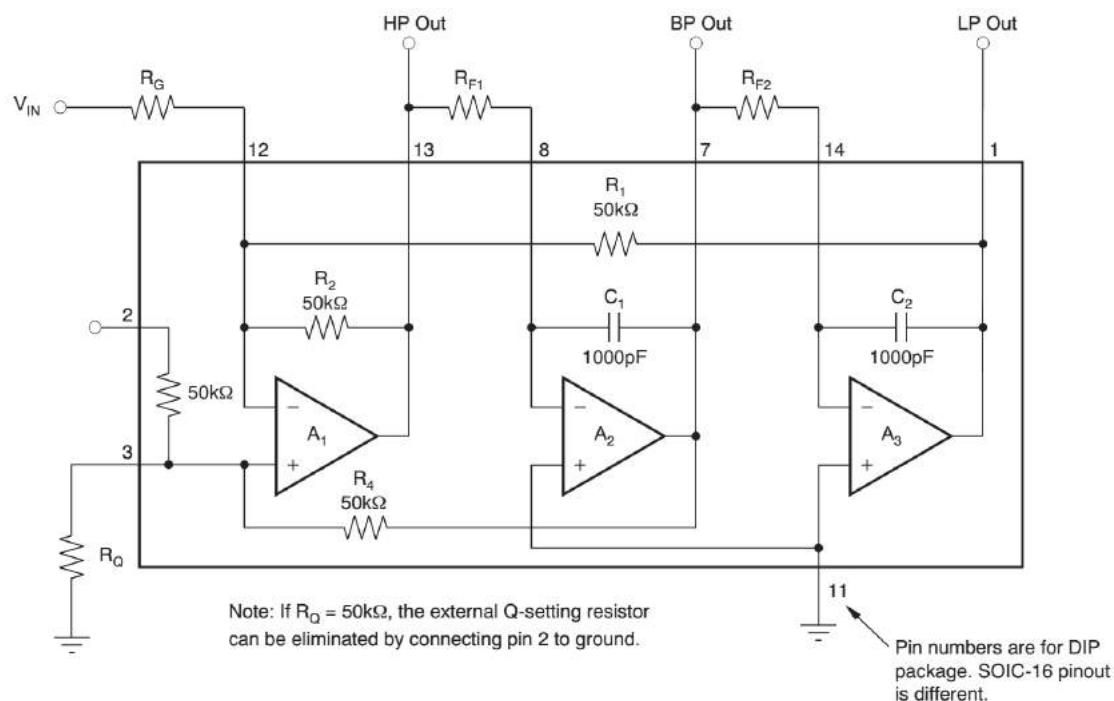


图 Section102-5 集成滤波器 UAF42 的反相输入形式

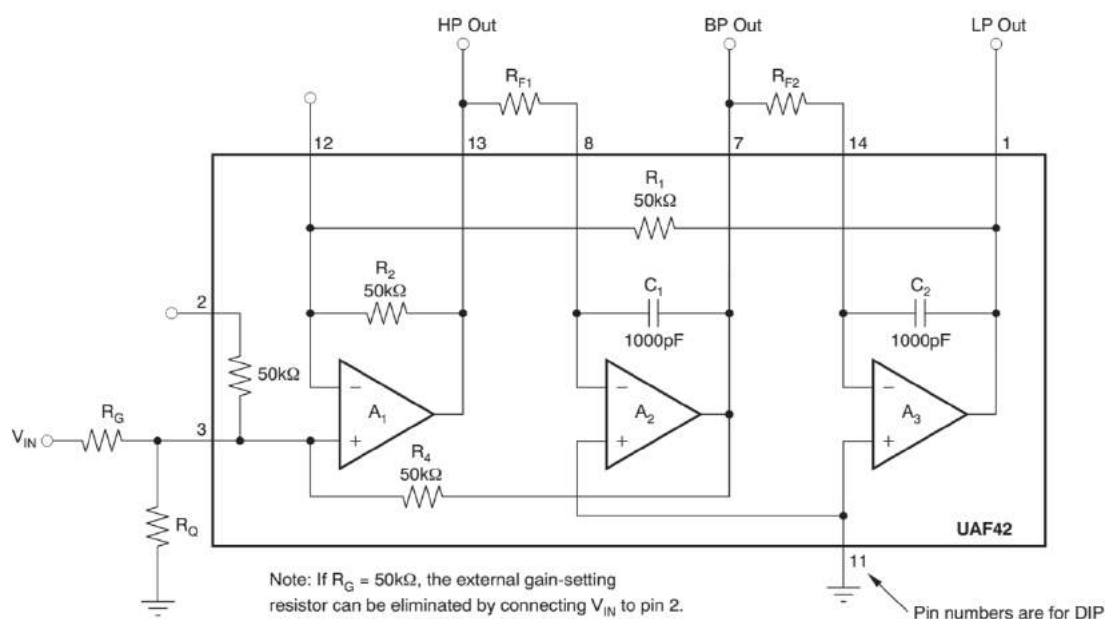


图 Section102-6 集成滤波器 UAF42 的同相输入形式

举例 2-UAF42 实现带通：

利用 UAF42 设计一个窄带通滤波器。要求与本节举例 1 完全相同，即滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=2$ ， $A_{m_BP}=5$ 。

解：电路结构如图 Section102-5。设计步骤如下：

- 1) 已知电容 $C=1nF$ ，电阻 $R_A=R=50k\Omega$ ；

- 2) 根据式(Section102-4), 反解 $R_X = 1/2\pi f_0 C = 3.1831\text{M}\Omega$, 即原图中的 R_{F1} 和 R_{F2} 。
- 3) 据式(Section102-7), 得: $R_1 = R_A Q/A_{m_BP} = 20000\Omega$, 即原图中的 R_G 。
- 4) 据式(Section102-8), 得: $R_7 = R_1 R_A / ((2R_1 + R_A)Q - R_1) = 6250\Omega$, 即原图中的 R_Q 。

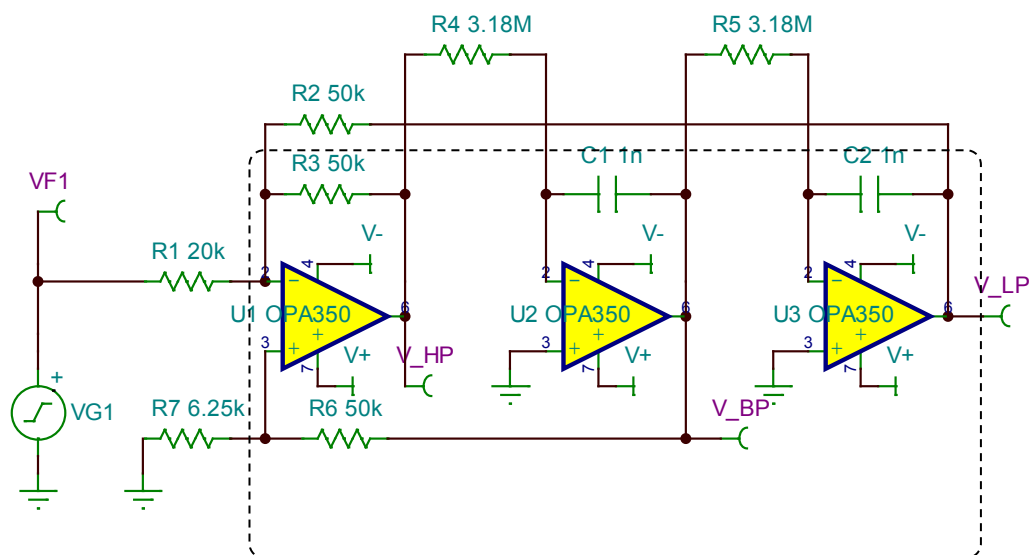


图 Section102-7 举例 2 电路, 图中虚线框内为 UAF42

举例 3-UAF42 实现陷波方法一：

利用 UAF42 设计一个窄带阻滤波器。滤波器的中心频率为 50Hz, $Q=20$, $A_{BR}=1$ 。

解：实现陷波器的方法至少有三种，第一种是独立的陷波器，包括 Bainter、Boctor、双 T 等；第二种是 1-BP 型，在已有带通滤波器基础上，靠加法器或者减法器实现。还有一种是低通+高通。其基本思想如下：

基于特征频率的低通标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

基于特征频率的高通标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{(j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

将两者相加，可得：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

这正是平坦区增益为 A_m 的标准陷波器表达式。

UAF42 具有三个输出端分别是二阶低通、高通，以及带通。因此，基于 UAF42，要实现陷波功能，我们有两种方法：第一，使用其低通和高通输出，用加法器实现陷波。第二，使用其带通输出，用减法器实现 1-BP 型陷波器。

本例实现方法一，即高通和低通相加的方法。首先进行初步分析：

题目要求陷波器的平坦区增益为 1，那么从上述分析可知，低通和高通的平坦区增益都应该为 1 才行，即 $A_{m_LHP} = -1$ ，且其特征频率均为 50Hz，各自的 $Q=20$ 。

开始设计低通和高通。已知电容 $C=1\text{nF}$ ，电阻 $R_A=R=50\text{k}\Omega$ ；

1) 根据式(Section102-4)，反解 $R_X = 1/2\pi f_0 C = 3.1831\text{M}\Omega$ ，即原图中的 R_{F1} 和 R_{F2} 。

2) 据式(Section102-10)，得 R_1 ，即原图中的 R_6 。

$$R_1 = -\frac{R_A}{A_{m_LHP}} = 50\text{k}\Omega$$

3) 据式(Section102-8)：

$$R_7 = \frac{R_1 R_A}{(2R_1 + R_A)Q - R_1} = \frac{50 \times 50}{(2 \times 50 + 50) \times 20 - 50} = 0.84746\text{k}\Omega$$

接下来设计加法器。将 UAF42 的低通输出、高通输出，作为加法器的输入，用一个运放实现同相加法器。最终电路如图 Section102-8 所示。仿真结果如图 Section102-9 所示。

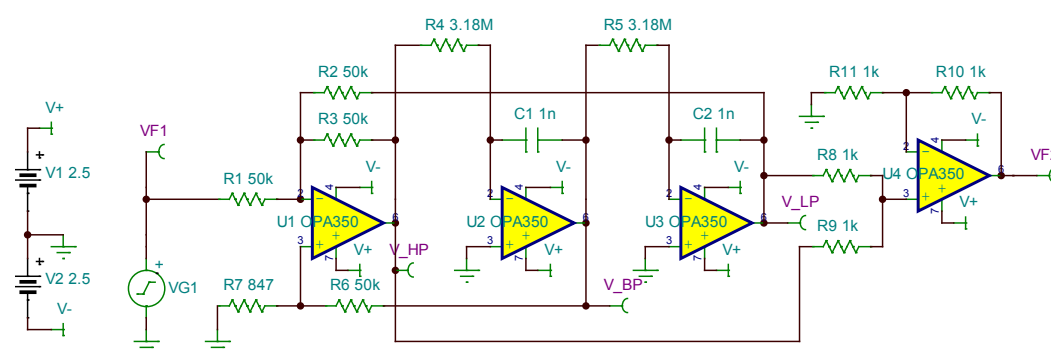


图 Section102-8 举例 3 电路

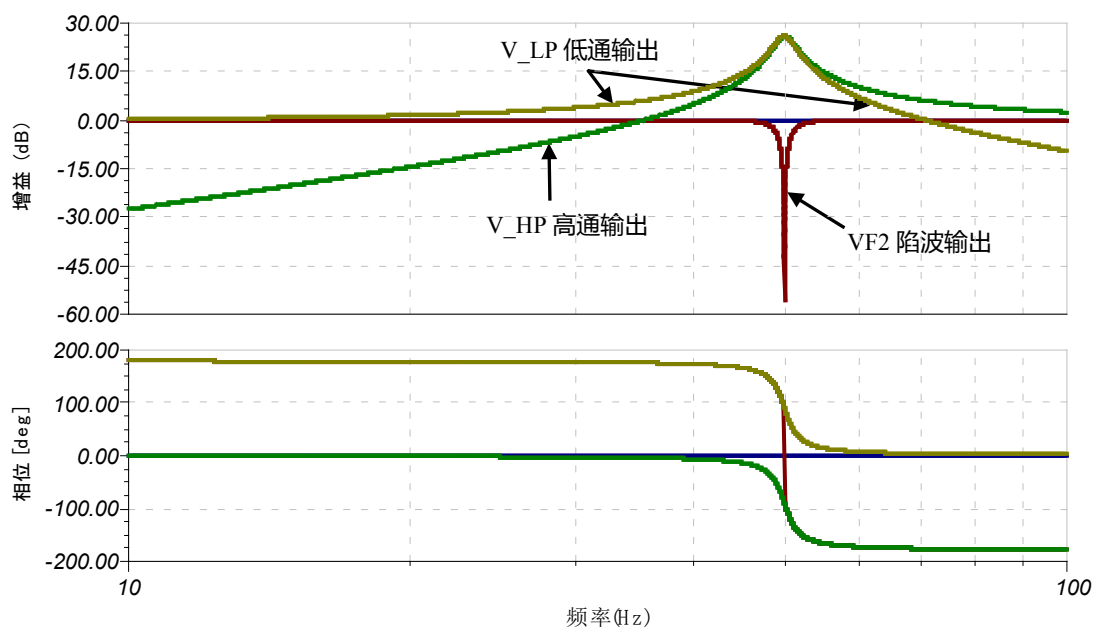


图 Section102-9 举例 3 电路的仿真频率特性

举例 4-UAF42 实现陷波方法二：

利用 UAF42 设计一个窄带阻滤波器。滤波器的中心频率为 50Hz， $Q=20$ ， $A_{BR}=1$ 。

解：下面我们使用方法二，利用 UAF42 实现 1-BP 型陷波器。因带通是同相的，设计方法参照本书 Section100 中的举例 INS2。

题目没有对基于 UAF42 的带通电路给出要求，理论上只要满足 Q 值和中心频率即可，对增益没有要求。如果偷懒的话，可以使用举例 3 中的设计结果，直接从中抽出带通供后级减法器使用即可。从[Section102-5]可以知道，该带通滤波器具有的峰值增益为：

$$A_{BP} = \frac{R_A}{R_1} \frac{R_1}{2kR_1 + kR_A} = \frac{R_A}{R_1} Q = 20$$

题目要求 $A_{BR}=1$ 倍，则 $A_{BP} // A_{BR} = 0.9524$ ，满足设计硬条件。

设 $R_{10}=1k\Omega$ ，据 Section100 中式(a4)，可得：

$$R_{11} = \frac{R_{10} A_{BP}}{A_{BR}} = 20k\Omega$$

设 $R_8=1k\Omega$ ，据 Section100 中式(a7)，得：

$$R_9 = \frac{A_{BR} // A_{BP}}{1 - A_{BR} // A_{BP}} R_8 = \frac{0.9524}{1 - 0.9524} \times 1k\Omega = 20k\Omega$$

至此完成设计，电路如图 Section102-10 所示，仿真结果如图 Section102-11 所示。

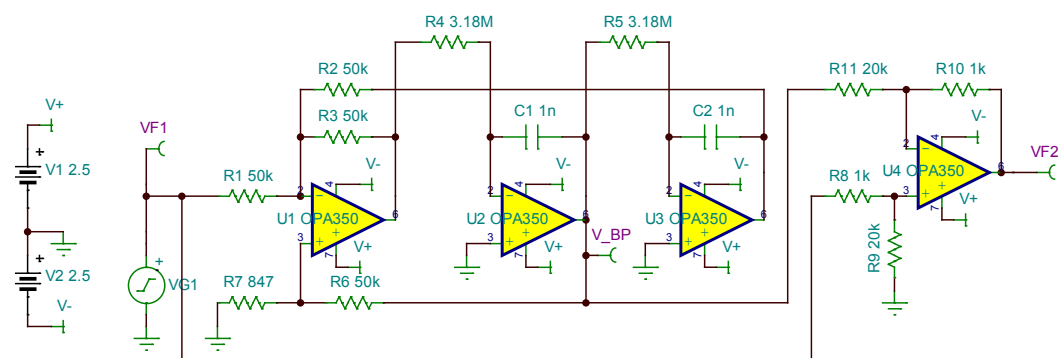


图 Section102-10 举例 4 电路

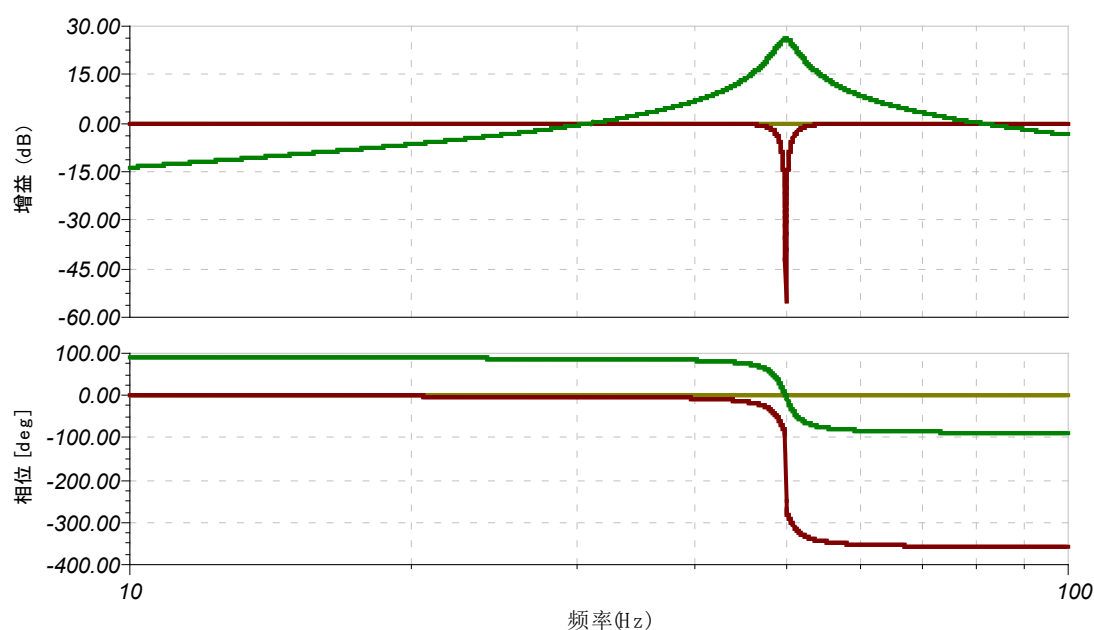


图 Section102-11 举例 4 电路仿真频率特性

下面我们对仿真结果进行一些验证。

首先，观察中心频率是否正确。在相频特征中，使用 a 标尺点中陷波器输出线，输入-180 度，得出：

$$f_{\varphi=-180} = 50\text{Hz}$$

即 $f_0 = 50\text{Hz}$ ，这说明中心频率与设计值吻合。

其次观察平坦区增益。在幅频特性中，使用 b 标尺点中陷波器输出线，将其拉到 10Hz，得：

$$A_{f=10\text{Hz}} = -471.07\mu\text{dB} = 10^{\frac{-471.07 \times 10^{-6}}{20}} = 0.999946$$

约为 1 倍，也是吻合的。

最后验证 Q 值。在幅频特性图中，使用 b 标尺点中陷波器输出线，在对话框中输入增益为-3.01dB，分别得到两个频率点：

$$f_L = f_{A=-3.01\text{dB}}(\text{左}) = 48.77\text{Hz}$$

$$f_H = f_{A=-3.01\text{dB}}(\text{右}) = 51.27\text{Hz}$$

由此可知：

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L} = 20$$

也与设计要求吻合。

特别提醒，本例中偷了个懒，直接使用了举例 3 中的带通输出。其实这样做看似可行，但是有不良后果，那就是带通增益为 20，很容易发生中途受限现象。为了避免这种情况，完全可以重新设计 1 倍带通，以实现 1-BP 型陷波。

既然我偷懒了，勤奋的事情就留给读者吧。

举例 5-UAF42 实现全通：

利用 UAF42 设计一个全通滤波器。滤波器的中心频率为 1000Hz， $Q=2$ ， $A_{Ap}=5$ 。

解：根据 Section101 讲述，全通滤波器可以用 1-2BP 实现，即用原始信号减去 2 倍的标准带通信号，而 UAF42 中具备带通输出，并且其内部就具备一个运算放大器，可以很方便的实现全通输出。

为此，首先必须明确减法器结构。我们知道，UAF42 组成的带通滤波器，其增益为正值，必须使用减法器才能实现 1-2BP。因此，采用如图 Section102-12 电路结构，它是一个非标准减法器。具体分析过程如下：

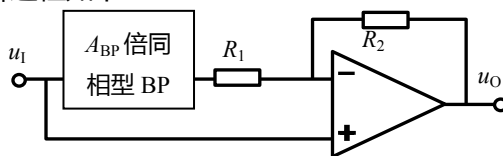


图 Section102-12 同相带通组成的“1-2BP”型全通滤波器

同相型带通表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_{BP} \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

按照图中电路结构，利用叠加原理，输入和输出之间有下式成立：

$$\begin{aligned}
 u_O &= u_I \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} u_I \left(A_{BP} \times \frac{\frac{1}{Q} j\Omega}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}\right) \\
 &= u_I \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(A_{BP} \times \frac{\frac{1}{Q} j\Omega}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

当：

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} A_{BP} = 2 \quad (4)$$

有：

$$u_O = u_I \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left(\frac{1 - \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}\right) \quad (5)$$

为全通表达式。

而标准的全通滤波器输入输出关系为：

$$u_O = u_I A_{AP} \frac{1 - \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q} j\Omega + (j\Omega)^2} \quad (6)$$

对比式(5)和式(6)，则有：

$$A_{AP} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (7)$$

题目要求 $A_{AP} = 5$ ，则可得：

$$R_2 = 4R_1 \quad (8)$$

又根据式(4)，得：

$$A_{BP} = 2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 2.5 \quad (9)$$

即我们需要设计一个 $A_{BP}=2.5$ ， $Q=2$ ， $f_0=1000\text{Hz}$ 的带通，然后按照图 Section102-12 电路，选择合适的比例电阻，即可实现全通设计。

参照本节举例 2，带通设计步骤如下：

- 1) 已知电容 $C=1\text{nF}$ ，电阻 $R_A=R=50\text{k}\Omega$ ；
- 2) 根据式(Section102-4)，反解 $R_X = 1/2\pi f_0 C = 159.15\text{k}\Omega$ ，即原图中的 R_{F1} 和 R_{F2} 。
- 3) 据式(Section102-7)，得： $R_1 = R_A Q / A_{m_BP} = 40000\Omega$ ，即原图中的 R_G 。
- 4) 据式(Section102-8)，得： $R_7 = R_1 R_A / ((2R_1 + R_A)Q - R_1) = 9091\Omega$ ，即原图中的 R_Q 。

对减法器，选择合适的电阻 $R_{11}=1\text{k}\Omega$ ，得反馈电阻 $R_{10}=4\text{k}\Omega$ ，得到最终电路如图 Section102-13，图中采用三个运放 U1-U3 实现 UAF42 的滤波部分，采用 U4 实现 UAF42 内部的附属运放。其仿真频率特性如图 Section102-14 所示。

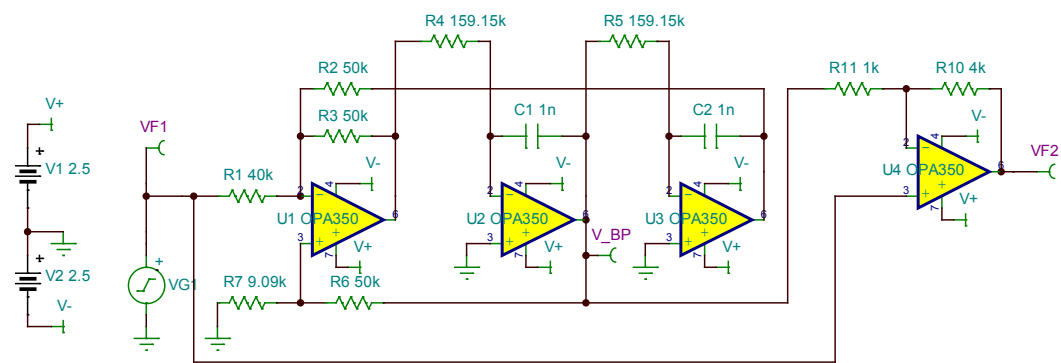


图 Section102-13 举例 5 电路

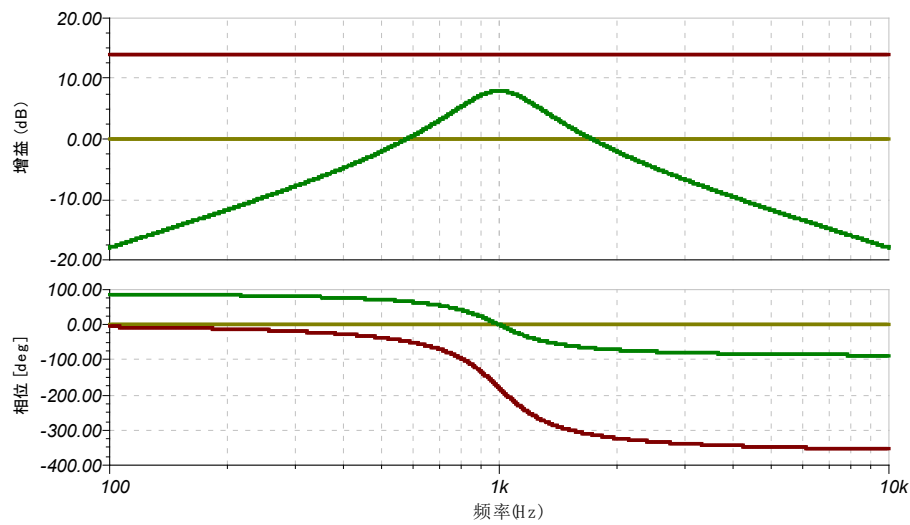


图 Section102-14 举例 5 仿真频率特性

Section103.Biquad 滤波器分析

“Biquad”原意为双二次式，由“bi”和“quadratic”合并而成。含义是一个传函的分子分母均为二次方程式。它的电路原型源自 1968 年 Bell 电话实验室的 J.Tow 发表的论文 “Active RC Filters—A State-Space Realization”，而 Biquad 一词则最早出现于 Bell 电话实验室的 L.Thomas 发表的论文“The Biquad: Part I -Some Practical Design Considerations”。该文采用的仍为 Tow 提出的电路（略有区别），被称为 Biquad。该电路结构如图 Section103-1 所示。因此，我们说到 Biquad 滤波器，是特指图 Section103-1 所示的滤波器，它的传函中，分子分母确实都是二次表达式。但是，不幸的是，Biquad 一词现在出现了使用混乱，被泛指所有二阶滤波器模块。比如 Sallen-Key Biquad，Low Pass Biquad 等。

以上历史，知道就好，叫什么，怎么叫，无需纠结。开始分析吧。

可以看出，Biquad 滤波器分为运放 A1、A2、A3 组成的主核，以及由 A4 组成的加法器两个环节。

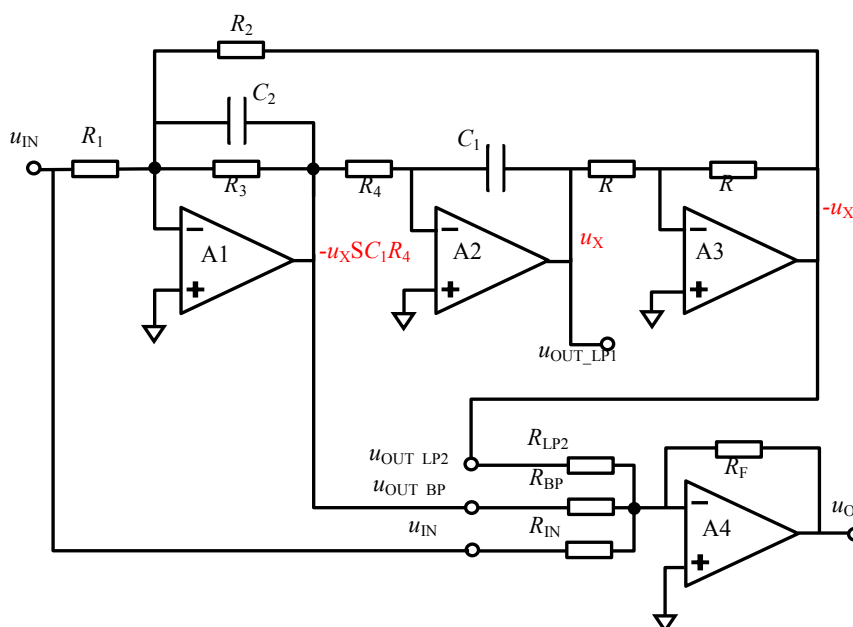


图 Section103-1 Biquad 滤波器

定义 A2 输出为 u_X ，则 A3 输出为 $-u_X$ ，A1 输出必为 $-u_X SC_1 R_4$ 。对 A1 负输入端列电流方程，有：

$$\frac{U_{IN}}{R_1} + \frac{-U_X}{R_2} = \frac{U_X SC_1 R_4}{\frac{1}{SC_2}} + \frac{U_X SC_1 R_4}{R_3} = U_X S^2 C_1 C_2 R_4 + \frac{U_X SC_1 R_4}{R_3}$$

化简得：

$$R_2 R_3 U_{IN} = U_X (S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 + SC_1 R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3)$$

低通滤波器 1，即运放 A2 输出的传函为：

$$A_{LP1} = \frac{U_X}{U_{IN}} = \frac{R_2 R_3}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 + SC_1 R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3}$$

(1)

低通滤波器 2，即运放 A3 输出的传函为：

$$A_{LP2} = \frac{-U_X}{U_{IN}} = -\frac{R_2 R_3}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 + SC_1 R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3}$$

(2)

带通滤波器，即运放 A1 输出的传函为：

$$A_{BP} = \frac{-U_X SC_1 R_4}{U_{IN}} = -\frac{SC_1 R_2 R_3 R_4}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 + SC_1 R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3}$$

(3)

加法器的传函为：

$$\begin{aligned} A_{OUT} &= \frac{\frac{R_F}{R_{BP}} \times SC_1 R_2 R_3 R_4 + \frac{R_F}{R_{LP2}} \times R_2 R_3 - \frac{R_F}{R_{IN}} (S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 + SC_1 R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3)}{S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 + SC_1 R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3} \\ &= -\frac{R_F}{R_{IN}} \times \frac{S^2 C_1 C_2 R_2 R_4 + SC_1 \frac{R_4(R_1 R_2 - \frac{R_{IN}}{R_{BP}} \times R_2 R_3)}{R_1 R_3} + 1 - \frac{R_{IN}}{R_{LP2}} \times \frac{R_2}{R_1}}{S^2 C_1 C_2 R_2 R_4 + SC_1 \frac{R_2 R_4}{R_3} + 1} \end{aligned}$$

[Section103-1]

从输出传函可以看出，它的分子、分母均为 s 的二次表达式。这给我们带来了太多的想象空间，特别是改变加法器的输入项，在已有低通、带通基础上，就可以实现高通、带阻以及全通。

在进一步分析之前，为减少冗余、简化分析，我们先假设两个电容相等。则 Biquad 滤波器的输出变为：

$$A_{OUT} = -\frac{R_F}{R_{IN}} \times \frac{S^2 C^2 R_2 R_4 + SC \frac{R_4(R_1 R_2 - \frac{R_{IN}}{R_{BP}} \times R_2 R_3)}{R_1 R_3} + 1 - \frac{R_{IN}}{R_{LP2}} \times \frac{R_2}{R_1}}{S^2 C^2 R_2 R_4 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + 1}$$

[Section103-1a]

高通

为实现高通，必须使得传函分子中只保留 s^2 项。则有：

$$\frac{R_4(R_1 R_2 - \frac{R_{IN}}{R_{BP}} \times R_2 R_3)}{R_1 R_3} = 0 \rightarrow R_1 = \frac{R_{IN}}{R_{BP}} \times R_3$$

(4)

$$1 - \frac{R_{IN}}{R_{LP2}} \times \frac{R_2}{R_1} = 0 \rightarrow R_1 = \frac{R_{IN}}{R_{LP2}} \times R_2$$

(5)

输出频域表达式变为：

$$\dot{A}_{OUT}(j\omega) = -\frac{R_F}{R_{IN}} \times \frac{(j\omega)^2 C^2 R_2 R_4}{(j\omega)^2 C^2 R_2 R_4 + (j\omega) C \frac{R_2 R_4}{R_3} + 1}$$

[Section103-1b]

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_2 R_4}}$$

[Section103-2]

$$\dot{A}_{OUT}(j\omega) = -\frac{R_F}{R_{IN}} \times \frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + (j\frac{\omega}{\omega_0})\frac{\sqrt{R_2R_4}}{R_3} + 1}$$

对比二阶高通标准式，式[Section102-insert9]，可知：

$$A_m = -\frac{R_F}{R_{IN}} \quad (\text{Section103-3})$$

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2R_4}} \quad (\text{Section103-4})$$

据此，可以总结设计方法如下：

1) 首先选择合适的电容 C ，选择合适的反相器电阻 R ，选择合适的加法器反馈电阻 R_F ；

2) 其次，设定 $R_2 = R_4$ ，根据式[Section103-2]反算，得：

$$R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi C f_0} \quad (\text{Section103-5})$$

3) 根据式[Section103-4]反算，得：

$$R_3 = Q\sqrt{R_2R_4} = QR_2 \quad (\text{Section103-6})$$

4) 根据式[Section103-3]反算，得：

$$R_{IN} = -\frac{R_F}{A_m} \quad (\text{Section103-7})$$

5) 设 $R_{LP2} = R_{IN}$ ，利用式(5)得：

$$R_1 = R_2 \quad (\text{Section103-8})$$

6) 利用式(4)，得：

$$R_{BP} = \frac{R_{IN}}{R_1} \times R_3 = R_{IN} \frac{R_3}{R_2} = QR_{IN} \quad (\text{Section103-9})$$

举例 1：

利用 Biquad 滤波器设计一个高通滤波器。要求滤波器的中心频率为 200Hz， $Q=1.2$ ， $A_m=2$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：电路结构如图 Section103-1。设计步骤如下：

- 1) 选择电容 $C=0.1\mu\text{F}$ ， $R=10\text{k}\Omega$ ， $R_F=10\text{k}\Omega$ 。
- 2) 根据式[Section103-5]，得： $R_2 = R_4 = 1/2\pi C f_0 = 7958\Omega$ 。
- 3) 根据式[Section103-6]，得： $R_3 = QR_2 = 9459\Omega$ 。
- 4) 根据式[Section103-7]，得： $R_{IN} = R_F/A_m = 3333\Omega$ 。
- 5) $R_{LP2} = R_{IN}=3333\Omega$ ；据式[Section103-8]得： $R_1 = R_2=7958\Omega$ 。
- 6) 根据式[Section103-9]得： $R_{BP} = QR_{IN}=4000\Omega$ 。

据此得到仿真电路如图 Section103-2 所示。仿真的频率特性如图 Section103-3 所示。

对其进行测试，得到如下关键参数：

先在幅频特性图中，将坐标线拉到 10kHz 处，得到增益 $A_{10kHz} = 9.55\text{dB} = 3.003$ 倍，与设计要求的 3 倍基本吻合。此值可以视为是 $|A_{\infty}|$ 。

$f_{\varphi=-90^\circ} = 199.98\text{Hz}$ ，即特征频率点，与设计要求的 200Hz 基本吻合。

$A_{199.98\text{Hz}} = 11.13\text{dB} = 3.602$ 倍，按照式(Section102-insert10)换算出 Q 值为 1.199，与设计要求的 1.2 基本吻合。

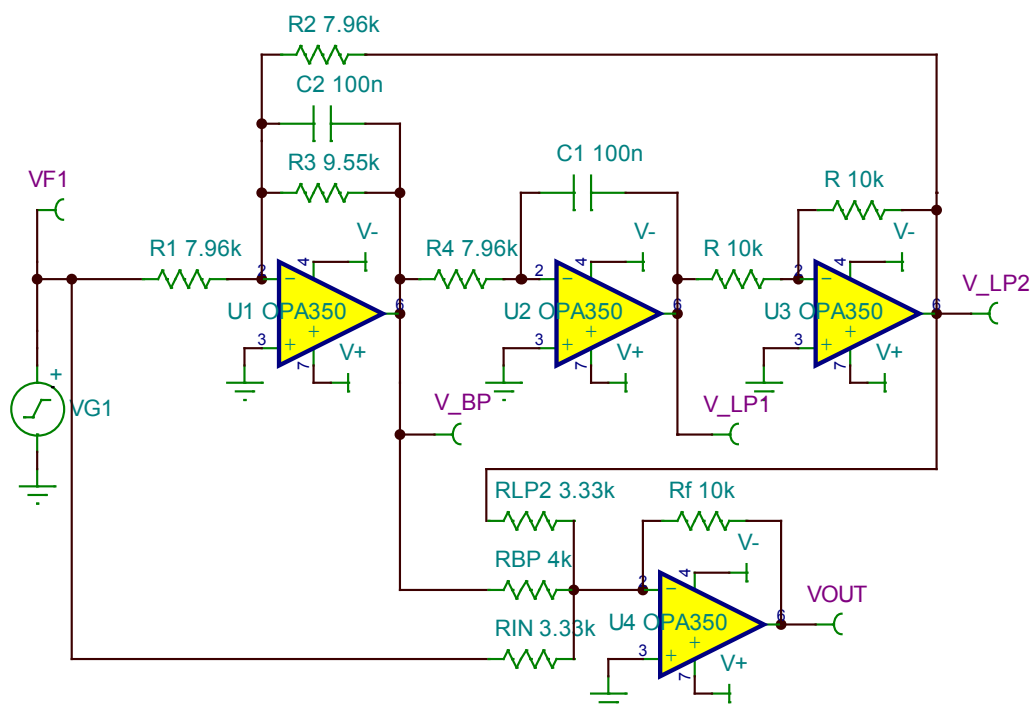


图 Section103-2 举例 1 电路，Biquad 滤波器实现的高通

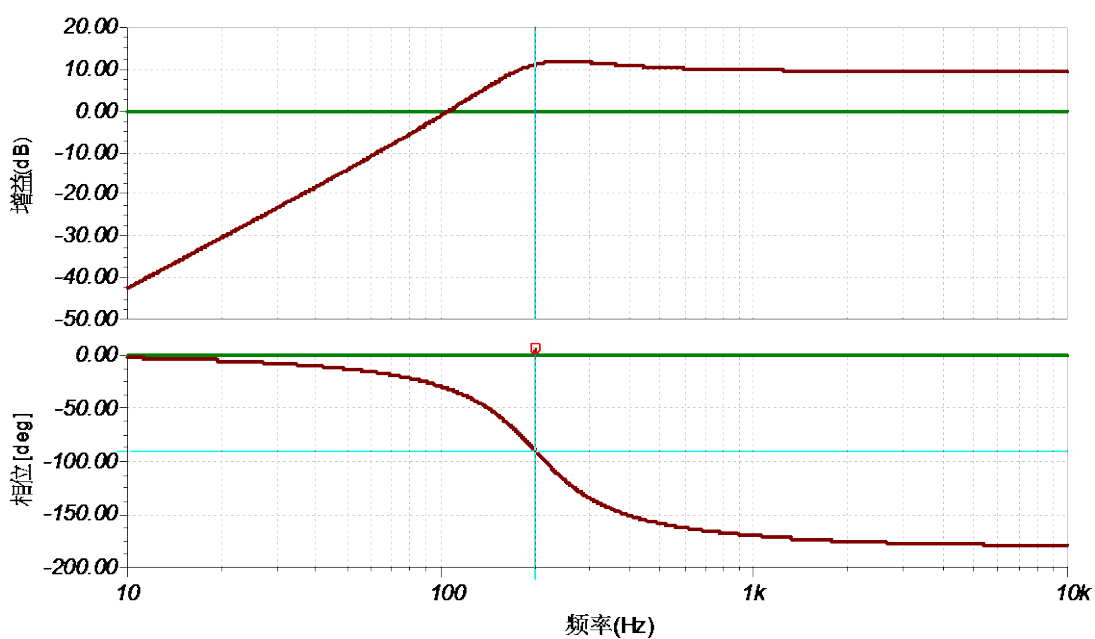


图 Section103-3 举例 1 电路仿真频率特性

陷波

陷波器的标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

[Section82-5]

为了实现这个表达式，图 Section103-4 将带通输出和原始输入信号实施加法运算，就可以得到期望的结果。这种思想与 Section100 中的 1-BP 型陷波器完全相同。

首先，利用两个电容相等的简化措施，带通输出的式(3)演变成：

$$A_{BP} = -\frac{SCR_2R_3R_4}{S^2C^2R_1R_2R_3R_4 + SCR_1R_2R_4 + R_1R_3} \quad (3a)$$

即：

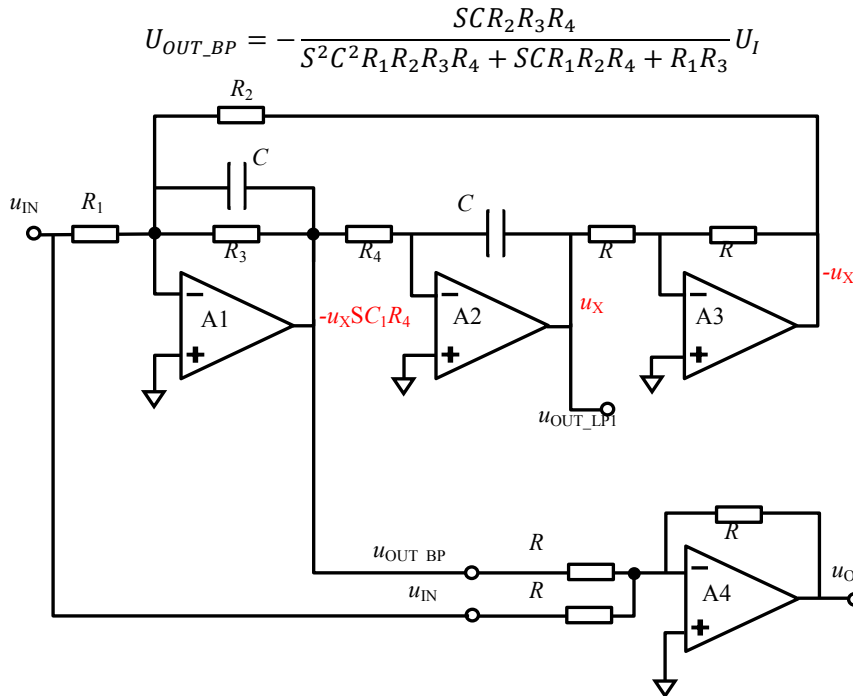


图 Section103-4 Biquad 滤波器组成的陷波器

则图 Section103-4 的输出传函为：

$$\begin{aligned} U_{OUT} &= -U_{OUT_BP} - U_I = \frac{SCR_2R_3R_4}{S^2C^2R_1R_2R_3R_4 + SCR_1R_2R_4 + R_1R_3} U_I - U_I \\ &= U_I \left(\frac{SCR_2R_3R_4 - S^2C^2R_1R_2R_3R_4 - SCR_1R_2R_4 - R_1R_3}{S^2C^2R_1R_2R_3R_4 + SCR_1R_2R_4 + R_1R_3} \right) \\ &= -U_I \frac{1 + SC \frac{R_1R_2R_4 - R_2R_3R_4}{R_1R_3} + S^2C^2R_2R_4}{1 + SC \frac{R_2R_4}{R_3} + S^2C^2R_2R_4} \end{aligned}$$

可以看出，要实现陷波功能，必须消掉分子中的 S 项。因此，只要令：

$$\frac{R_1R_2R_4 - R_2R_3R_4}{R_1R_3} = 0, \text{ 即 } R_1 = R_3$$

[Section103-10]

则陷波输出传函变为：

$$A_{BR} = \frac{U_{OUT}}{U_I} = - \frac{1 + S^2 C^2 R_2 R_4}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

其频域表达式为：

$$\dot{A}_{BR}(j\omega) = - \frac{1 + (j\omega)^2 C^2 R_2 R_4}{1 + (j\omega)C \frac{R_2 R_4}{R_3} + (j\omega)^2 C^2 R_2 R_4} \quad [\text{Section103-11}]$$

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_2 R_4}} \quad [\text{Section103-2}]$$

则频域表达式演变成：

$$\dot{A}_{BR}(j\omega) = - \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0}) \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad [\text{Section103-12}]$$

对照陷波器标准式(Section82-5) (前一页也有), 可知：

$$A_m = -1 \quad [\text{Section103-13}]$$

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}} \quad [\text{Section103-14}]$$

至此, 已知元器件参数——电阻电容值, 求解电路参数——增益、特征频率、品质因数的推导任务已经完成。下面我们需要知道如何设计, 即已知电路参数, 求解元器件参数。

首先, 从图 Section103-4 电路可以看出, 电阻 R 出现在两个地方, 第一是运放 A3 的反相器电阻, 第二是运放 A4 的反相加法器电阻, 它们的取值大小, 只要合适, 并不会影响电路其它性能。

其次, 剩下的有电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 , 电容 C , 共 5 个参数。注意, 电路只有两个待求量, 特征频率和品质因数 (平坦区增益已经确定为-1), 因此这 5 个元件中可以做一些任选或者约定。具体的设计步骤如下：

1) 根据表 Section84-2, 选择电容 C ；

2) 约定电阻 $R_2=R_4$, 利用式(Section103-2)反算, 求解电阻：

$$R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi C f_0} \quad [\text{Section103-15}]$$

3) 根据式(Section103-14), 反算电阻 R_3 ：

$$R_3 = Q R_2 \quad [\text{Section103-16}]$$

4) 利用式(Section103-10), 得：

$$R_1 = R_3$$

举例 2：

利用 Biquad 滤波器设计一个陷波器。要求陷波器的中心频率为 50Hz， $Q=20$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：电路结构如图 Section103-4。设计步骤如下：

- 1) 选择电容 $C=1\mu\text{F}$ ， $R=10\text{k}\Omega$ 。
- 2) 根据式(Section103-15)，得： $R_2 = R_4 = 1/2\pi C f_0 = 3183\Omega$ 。
- 3) 根据式(Section103-16)，得： $R_3 = Q R_2 = 63.66\text{k}\Omega$ 。
- 4) 根据式(Section103-10)，得： $R_1 = R_3 = 63.66\text{k}\Omega$ 。

至此，全部参数设计完毕，选择 OPA350 做电路中的运放，绘制电路图如图 Section103-5 所示。其频率特性如图 Section103-6 所示。

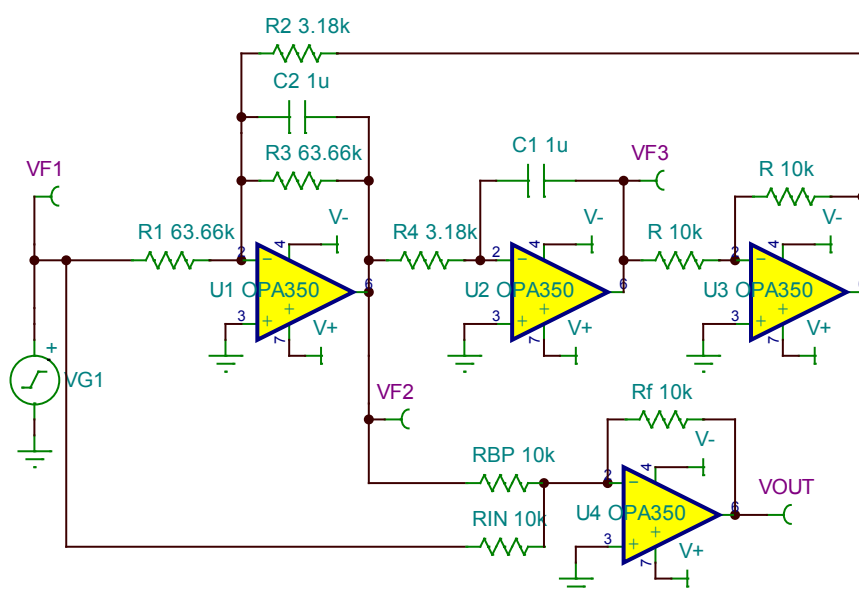


图 Section103-5 举例 2 电路，Biquad 滤波器组成的陷波器

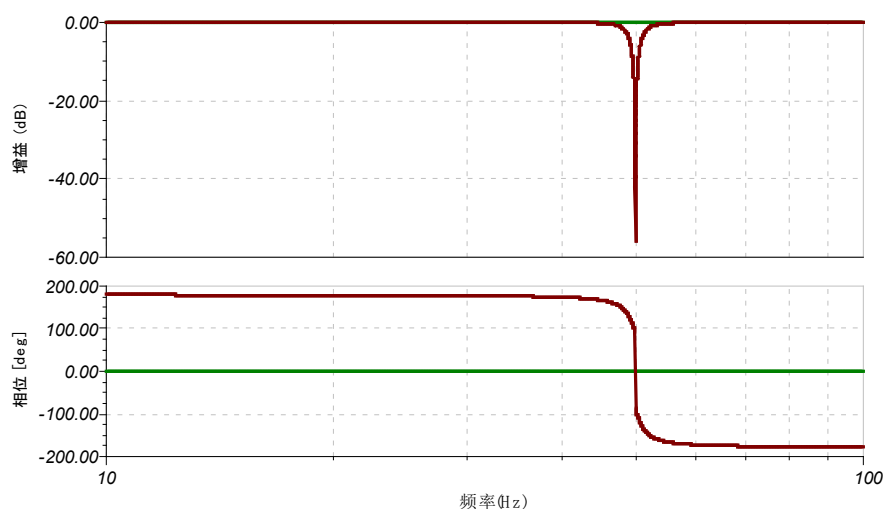


图 Section103-6 举例 2 电路的仿真频率特性

可以看出，陷波频率发生在 50Hz 附近。为了验证 Q 值，做如下测量：

$$f_{-3.01\text{dB左}} = 48.77\text{Hz} ; f_{-3.01\text{dB右}} = 51.27\text{Hz} ; Q = \frac{f_0}{f_{-3.01\text{dB右}} - f_{-3.01\text{dB左}}} = 50$$

与设计要求吻合。

全通

全通滤波器的标准式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

[Section82-8a]

在陷波器设计中，我们选择 $R_1=R_3$ ，成功将分子中的 S 项消掉，而在全通滤波器中，不仅不能消掉 S 项，还要求分子 S 项正好是分母 S 项的负值。这让我们想到，如果仍采用图 Section103-4 电路结构，只是将 R_1 改变，是否就能够实现上述要求呢？

利用陷波小节类似的推导方法，图 Section103-4 的输出传函为：

$$U_{OUT} = -U_I \frac{1 + SC \frac{R_1 R_2 R_4 - R_2 R_3 R_4}{R_1 R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

可以看出，要实现全通滤波功能，必须分子分母的 S 项互反，即满足：

$$\frac{R_1 R_2 R_4 - R_2 R_3 R_4}{R_1 R_3} = -\frac{R_2 R_4}{R_3}, \text{ 即 } R_1 = 0.5 R_3$$

[Section103-17]

则陷波输出传函变为：

$$A_{BR} = \frac{U_{OUT}}{U_I} = -\frac{1 - SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

其频域表达式为：

$$\dot{A}_{BR}(j\omega) = -\frac{1 - (j\omega)C \frac{R_2 R_4}{R_3} + (j\omega)^2 C^2 R_2 R_4}{1 + (j\omega)C \frac{R_2 R_4}{R_3} + (j\omega)^2 C^2 R_2 R_4}$$

[Section103-18]

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_2 R_4}}$$

[Section103-2]

则频域表达式演变成：

$$\dot{A}_{BR}(j\omega) = -\frac{1 - (j\frac{\omega}{\omega_0})\frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})\frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

[Section103-19]

对照陷波器标准式(Section82-8a)，可知：

$$A_m = -1$$

[Section103-13]

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}}$$

[Section103-14]

可知，全通滤波器的设计与陷波器几乎完全相同，唯一区别在于选择 $R_1 = 0.5R_3$ 。

举例 3：

利用 Biquad 滤波器设计一个全通滤波器。要求中心频率为 50Hz， $Q=20$ 。用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：电路结构如图 Section103-4。设计步骤如下：

- 1) 选择电容 $C=1\mu\text{F}$ ， $R=10\text{k}\Omega$ 。
- 2) 根据式(Section103-15)，得： $R_2 = R_4 = 1/2\pi C f_0 = 3183\Omega$ 。
- 3) 根据式(Section103-16)，得： $R_3 = Q R_2 = 63.66\text{k}\Omega$ 。
- 4) 根据式(Section103-17)，得： $R_1 = 0.5R_3 = 31.83\text{k}\Omega$ 。

至此，全部参数设计完毕，选择 OPA350 做电路中的运放，绘制电路图如图 Section103-7 所示。其频率特性如图 Section103-8 所示。

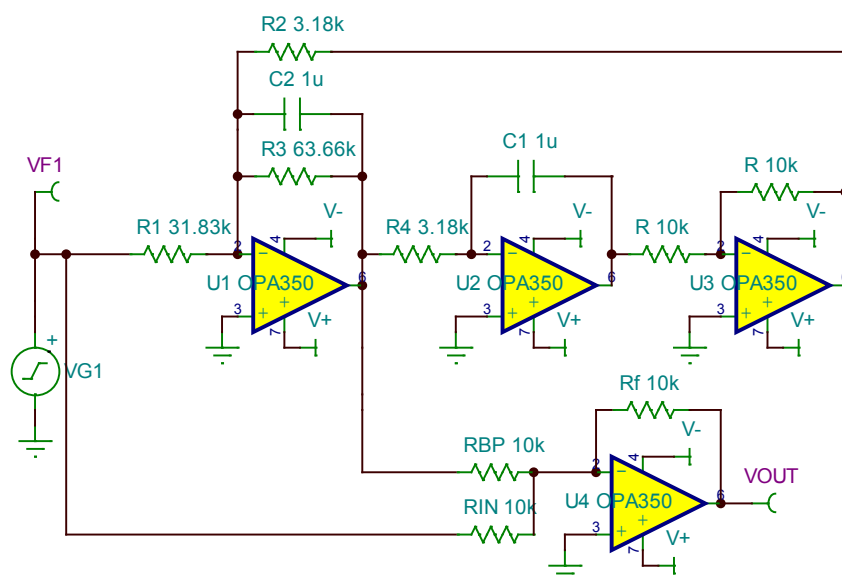


图 Section103-7 举例 3 电路——全通滤波器

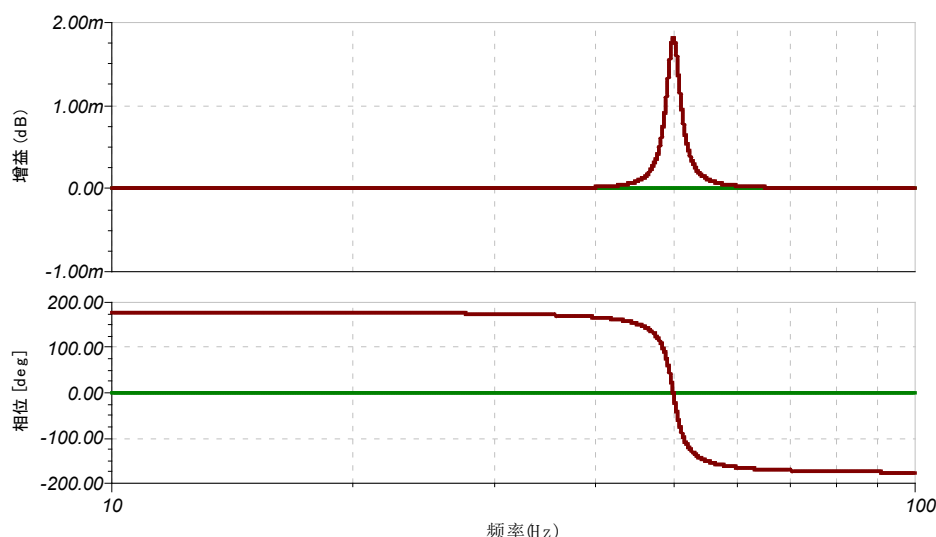


图 Section103-8 举例 3 电路的仿真频率特性

从频率特性图可以看出，此电路在 50Hz 处有一个微弱的增益隆起，约为 18m dB（即 10002 倍），这不会影响全通滤波器在整个频率范围内增益等于 1 的事实。同时，在 50Hz 处，其相移为 0 度。注意，标准全通滤波器的在中心频率处应为 -180 度相移，此处之所以为 0 度，是因为本例电路的增益为 -1 倍，本身就具备反相。从频率特性也可以看出，此电路的中心频率约为 50Hz。

下面我们来验证一下此电路的 Q 值。根据 Section82 分析结果，验证一个全通滤波器的 Q 值，需要使用如下公式：

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_H - \omega_L} = \frac{f_0}{f_H - f_L} \quad (\text{Section82-12})$$

在相频特性图上，中心频率点相移为 0 度，那么可知 f_L 对应的相移应为 90 度，则利用标线仿真工具 a（图中是一个 a 加上一个坐标符号），点中相频特性曲线，在对话框内输入 90 度，可得：

$$f_L = f_{\varphi=90} = 48.77\text{Hz}$$

同理可知 f_H 对应的相移应为 -90 度，在对话框内输入 -90 度，可得：

$$f_H = f_{\varphi=-90} = 51.27\text{Hz}$$

则有：

$$Q_{\text{实测}} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{50}{51.27 - 48.77} = 20$$

与设计要求完全一致。

Biquad 全通滤波器的中途受限现象

举例 3 电路，看起来很完美。它是一个全通滤波器，增益的模始终为 1，随输入信号频率变化，它的输出会有相移变化。那么，当供电电源电压为 $\pm 2.5\text{V}$ ，输入信号为一个围绕 50Hz 变化的，2V 幅度正弦波，结果会是什么呢？

当输入信号是 10Hz 时，输出应该是一个具有 178.81 度相移的，幅度仍为 2V 的正弦波；当输入信号为 100Hz 时，输出应该是一个具有 -176.18 度相移的，幅度仍为 2V 的正弦波。因为供电电压为 $\pm 2.5\text{V}$ ，它们都没有超过电源轨。图 Section103-9 是两个仿真实验的示波器波形，结果与预期基本一致。为了后续分析方便，在仿真电路中增加了一个测试点：运放

U1 的输出端，即电路中带通输出，设为 VF2。

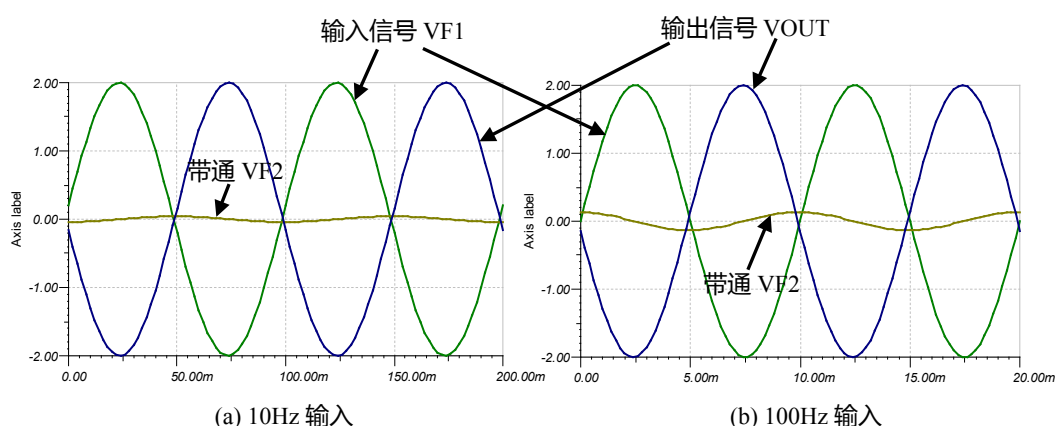


图 Section103-9 举例 3 电路的示波器记录波形

当输入信号频率设置为 50Hz，幅度仍为 2V 时，输出应该为一个正弦波，其幅度仍应为 2V，只是相移变为 0 度。这是期望的结果，但事实不是这样，测试结果如图图 Section103-10 所示。可以看出，输出波形已经严重变形，且增益和相移与期望结果完全不同。

罪魁祸首，是 Section100 中讲述的“中途受限现象”。虽然全通输出的增益是 1 倍，但本电路中，输出由原始信号和带通信号相减形成，在 50Hz 处的带通峰值增益为 2 倍，2V 的输入信号，理论上应该输出 4V 信号，但电源电压是 $\pm 2.5\text{V}$ ，这就产生了中途受限。

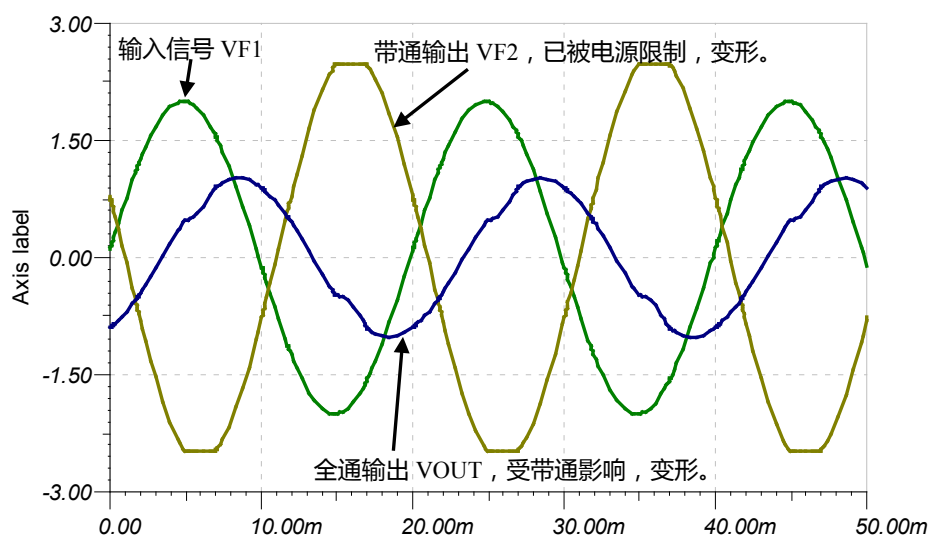


图 Section103-10 举例 3 电路的示波器记录波形—50Hz，2V 输入

图 Section103-11 为包含 VF2 的频率特性仿真结果，可以清晰看到，在幅频特性上，原始信号和全通输出基本重叠在一起，都是 0dB，但带通输出 VF2 为一个明显的隆起，在 50Hz 处约为 6dB，即 2 倍。这是造成中途受限的根本原因。

杜绝原因，就能避免中途受限现象。方法一，将输入信号减小，由 2V 变为 1V，此时放大 2 倍后幅度应为 2V，不超过电源轨，中途受限消失。图 Section103-12 是此时的示波器记录波形，可以看出，输出没有了中途受限现象。

读者可能会注意到，图 Section103-12 的全通输出，虽然没有中途受限现象，却也与期望结果不吻合：理论上，输出应与输入幅度一致、相差为 0 度，也就是完全重合，但结果

是幅度稍小一些，且存在 30 度左右的滞后相移。这件事情我在其它仿真时也出现过，在频率特性中峰值点明显是 50Hz，但在示波器中，输入 50Hz 却达不到峰值。我试着将输入信号频率调到 49.6Hz，峰值出现了。

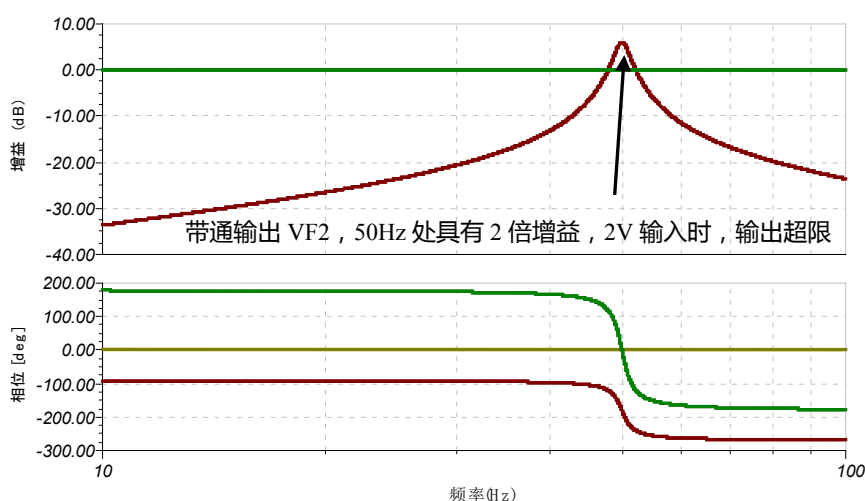


图 Section103-11 举例 3 电路的 VF2 的频率特性

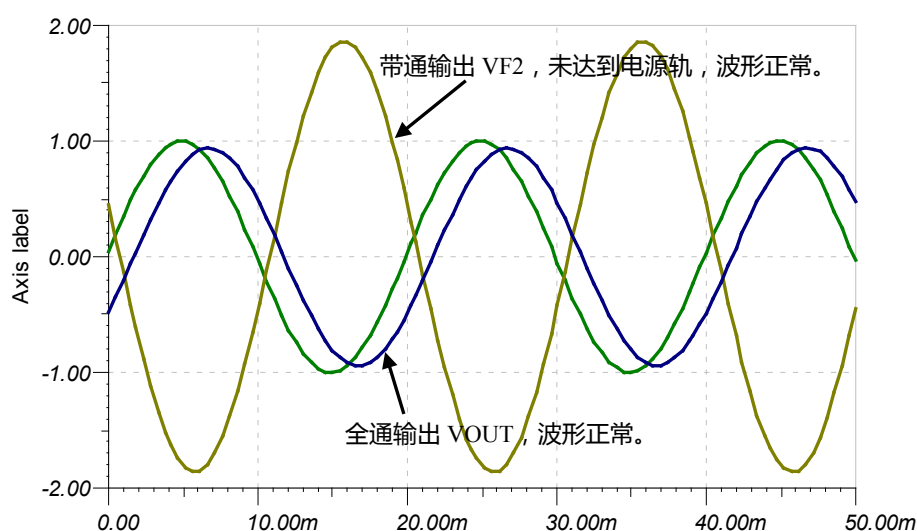


图 Section103-12 举例 3 电路的示波器记录波形—50Hz，1V 输入

这是为什么，我也不清楚，得问 TINA 的编程人员。现在，我们的主要目标是中途受限现象，以及如何克服它。根据上述实验，难道我们要接受这个事实：Biquad 结构的全通滤波器，具有明显的中途受限现象，只能接受 1/2 满幅度的输入信号？

是的，这个电路形成的全通滤波器，就是这个结论。但有没有克服的方法呢？除去第一种方法，让我们迫不得已的减少输入信号，还有另外的方法，就是改变电路。

观察原始电路图 Section103-7，可以看出，带通滤波器的增益是由 R_3/R_1 决定的，如果在此我们让带通滤波器的增益为 1，那么在反相加法器中，就应该赋予带通信号 2 倍的增益，这样仍能保证加法器的结果不变。因此我们修改电路如图 Section103-7 为 Section103-13，其关键是保持 $R_1=R_3$ ，而将 R_{BP} 由 10kΩ 改为 5kΩ，就成功克服了中途受限现象。

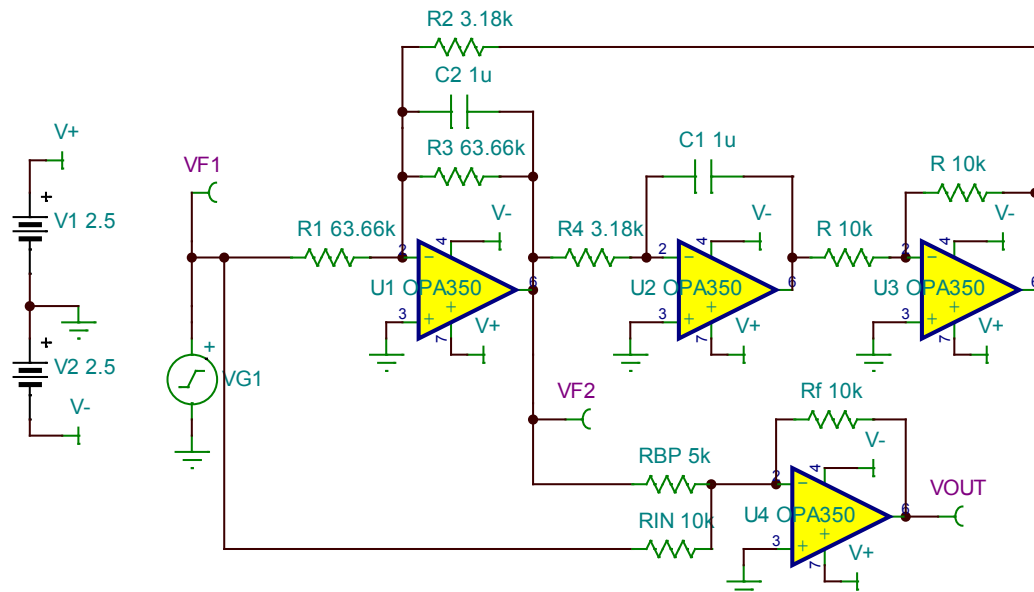


图 Section103-13 举例 3 电路的优化电路——克服中途受限

读者可以自行仿真此优化电路，确实没有中途受限现象。

Section104.Fleischer-Tow 滤波器

这是一个真正的双二次型电路，它可以实现分子分母均为二次表达式——在电路结构不发生变化情况下，单纯改变电阻值，就可以实现不同类型的滤波效果：低通、高通、带通、带阻以及全通——奇妙无比。

电路结构如图 Section104-1 所示。分析如下：

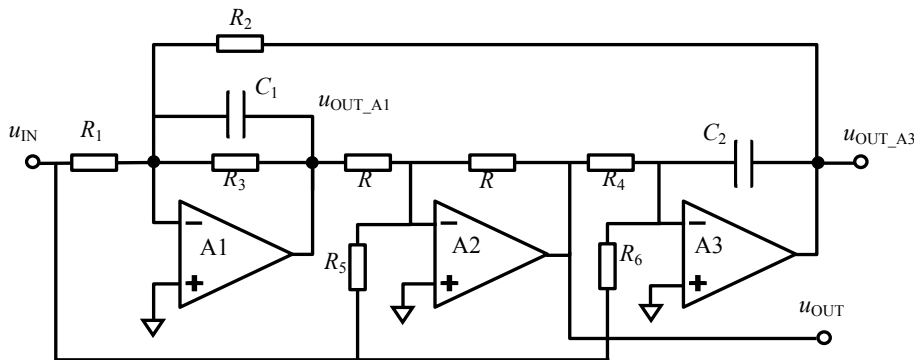


图 Section104-1 Fleischer-Tow 滤波器

对运放 A3 列输入输出关系，得：

$$U_{OUT_A3} = -\left(\frac{U_{IN}}{SC_2R_6} + \frac{U_{OUT}}{SC_2R_4}\right) \quad (1)$$

对运放 A2 列输入输出关系，得：

$$-U_{IN} \frac{R}{R_5} - U_{OUT_A1} = U_{OUT} \rightarrow U_{OUT_A1} = -U_{IN} \frac{R}{R_5} - U_{OUT} \quad (2)$$

对运放 A1 列输入输出关系，得：

$$\frac{U_{IN}}{R_1} + \frac{U_{OUT_A3}}{R_2} = \frac{0 - U_{OUT_A1}}{\frac{1}{SC_1}} + \frac{0 - U_{OUT_A1}}{R_3} \quad (3)$$

将式(1)(2)代入式(3)，得到只有 U_{IN} 和 U_{OUT} 的等式：

$$\frac{U_{IN}}{R_1} + \frac{-\left(\frac{U_{IN}}{SC_2R_6} + \frac{U_{OUT}}{SC_2R_4}\right)}{R_2} = -\left(-U_{IN} \frac{R}{R_5} - U_{OUT}\right)SC_1 - \frac{-U_{IN} \frac{R}{R_5} - U_{OUT}}{R_3}$$

$$\frac{U_{IN}}{R_1} - \frac{U_{IN}}{SC_2R_2R_6} - \frac{U_{OUT}}{SC_2R_2R_4} = U_{IN}SC_1 \frac{R}{R_5} + U_{OUT}SC_1 + U_{IN} \frac{R}{R_3R_5} + \frac{U_{OUT}}{R_3}$$

两边同乘以 $SC_2R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ 得：

$$\begin{aligned} SC_2R_2R_3R_4R_5R_6U_{IN} - R_1R_3R_4R_5U_{IN} - R_1R_3R_5R_6U_{OUT} \\ = S^2C_1C_2R_1R_2R_3R_4R_5R_6U_{IN} + S^2C_1C_2R_1R_2R_3R_4R_5R_6U_{OUT} \\ + SC_2R_1R_2R_4R_6U_{IN} + SC_2R_1R_2R_4R_5R_6U_{OUT} \\ U_{IN}(SC_2R_2R_3R_4R_5R_6 - R_1R_3R_4R_5 - S^2C_1C_2R_1R_2R_3R_4R_6R - SC_2R_1R_2R_4R_6R) \\ = U_{OUT}(R_1R_3R_5R_6 + SC_2R_1R_2R_4R_5R_6 + S^2C_1C_2R_1R_2R_3R_4R_5R_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} &= \frac{-R_1 R_3 R_4 R_5 + S C_2 R_2 R_4 R_6 (R_3 R_5 - R_1 R) - S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 R_6 R}{R_1 R_3 R_5 R_6 + S C_2 R_1 R_2 R_4 R_5 R_6 + S^2 C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6} \\
 &= -\frac{R_1 R_3 R_4 R_5}{R_1 R_3 R_5 R_6} \times \frac{1 - S C_2 \frac{R_2 R_6 (R_3 R_5 - R_1 R)}{R_1 R_3 R_5} + S^2 C_1 C_2 \frac{R_1 R_2 R_3 R_4 R_6 R}{R_1 R_3 R_4 R_5}}{1 + S C_2 \frac{R_1 R_2 R_4 R_5 R_6}{R_1 R_3 R_5 R_6} + S^2 C_1 C_2 \frac{R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6}{R_1 R_3 R_5 R_6}} \\
 &= -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - S C_2 R_2 R_6 (\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5}) + S^2 C_1 C_2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5}}{1 + S C_2 \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C_1 C_2 R_2 R_4}
 \end{aligned}$$

这是一个楼上楼下均为 2 次的表达式，因此给我们提供了多种可能：二阶低通、二阶高通、带通、带阻、全通。为简化分析，本电路允许将两个电容设置成一样： $C_1 = C_2 = C$ 。

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - S C R_2 R_6 (\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5}) + S^2 C^2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5}}{1 + S C \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

(Section104-1)

低通滤波器

将分子变为 1，就是一个标准低通滤波器。要实现这点，就需要把分子中 S 项和 S² 项的系数都变为 0，且要保证分母保持原结构不变：S 项、S² 项仍然存在。结果是， $R_1 = R_5 = \infty$ ，表达式变为：

$$A_{LP} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1}{1 + S C \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_2 R_4}}$$

(Section104-2)

则上式的频率表达式为：

$$A(j\omega) = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

(Section104-1a)

品质因数为：

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}}$$

(Section104-3)

平坦区增益为：

$$A_m = -\frac{R_4}{R_6}$$

(Section104-4)

举例 1：

使用 Fleischer-Tow 滤波器设计一个低通滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的截止频率为 $f_c=200Hz$ ， $Q=1.2$ ，低频增益为-3 倍。电阻按照 E96 系列选取，

用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：首先确定电路结构为低通滤波器，则有 $R_1 = R_5 = \infty$ ，其次，根据式(Section81-6、7)得滤波器的特征频率为 $f_0 = 147.2\text{Hz}$ 。

根据表 Section84-1，选择电容 $C=0.1\mu\text{F}$ 。且选择电阻 $R_2 = R_4 = R$ ，根据式(Section104-2)：

$$R = R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 147.2 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 10812\Omega$$

根据式(Section104-3)得：

$$R_3 = Q\sqrt{R_2 R_4} = 1.2 \times 10812 = 12975\Omega$$

根据式(Section104-4)得：

$$R_6 = -\frac{R_4}{A_m} = -\frac{10812}{-3} = 3604\Omega$$

按照 E96 系列，选择电阻如下：

$$R = R_2 = R_4 = 10.7\text{k}\Omega$$

$$R_3 = 13.0\text{k}\Omega$$

$$R_6 = 3.57\text{k}\Omega$$

至此，形成电路如图 Section104-2 所示电路。对其进行交流分析，得到图 Section104-3 所示的幅频特性和相频特性曲线。仿真测试结果表明，与设计要求基本吻合。

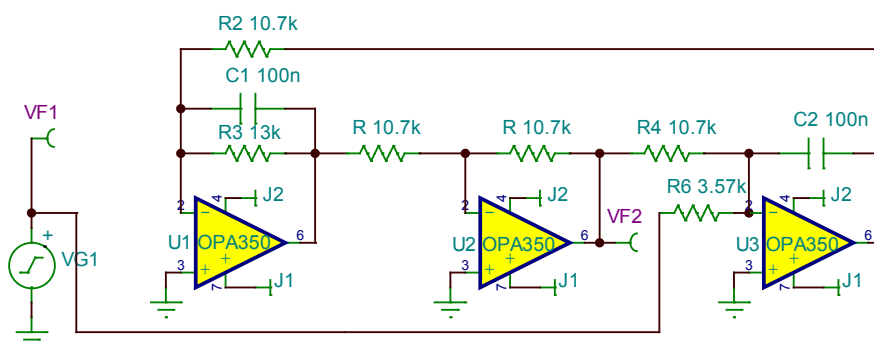


图 Section104-2 举例 1 电路—Fleischer-Tow 低通滤波器

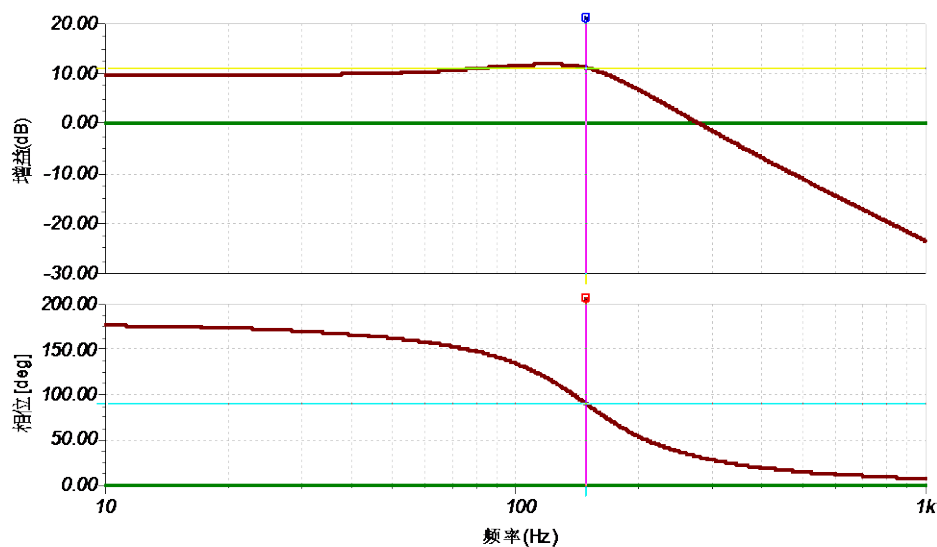


图 Section104-3 举例 1 电路—Fleischer-Tow 低通滤波器的频率响应

高通滤波器

以特征频率为基准的高通表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section104-5})$$

而 Fleischer-Tow 表达式为：

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - SC R_2 R_6 (\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5}) + S^2 C^2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5}}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4} \quad (\text{Section104-1})$$

即高通复频域表达式中，分子只含有 S^2 项，初看 Fleischer-Tow 表达式，似乎分子中的 1 是无法消除的，也就难以实现高通。但是，当我们再仔细观察就会发现，其中的 R_6 藏有玄妙：当 R_6 无穷大时，Fleischer-Tow 表达式变为：

$$\begin{aligned} A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} &= -R_4 \times \frac{\frac{1}{R_6} - SC R_2 (\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5}) + S^2 C^2 \frac{R_2 R}{R_5}}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4} \\ &= -R_4 \times \frac{-SC R_2 (\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5}) + S^2 C^2 \frac{R_2 R}{R_5}}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4} \end{aligned}$$

此时，只要设置电阻，使得 S 项变为 0 即可，即高通的约束条件为：

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5} = 0 \rightarrow R_3 R_5 = R_1 R \\ R_6 = \infty \end{cases}$$

此时，有：

$$A = -R_4 \times \frac{S^2 C^2 \frac{R_2 R_3}{R_1}}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4} = -\frac{R_3}{R_1} \times \frac{S^2 C^2 R_2 R_4}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_2 R_4}} \quad (\text{Section104-2})$$

其频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = -\frac{R_3}{R_1} \times \frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = A_m \times \frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section104-6})$$

可知此时高通滤波器的关键参数为：

$$A_m = -\frac{R_3}{R_1} \quad (\text{Section104-7})$$

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}} \quad (\text{Section104-8})$$

举例 2：

使用 Fleischer-Tow 滤波器设计一个高通滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的截止频率为 $f_c=200Hz$ ， $Q=1.2$ ，低频增益为-3 倍。电阻按照 E96 系列选取，用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：首先确定电路结构为高通滤波器，则有 $R_6 = \infty$ 。其次，根据二阶高通滤波器中，特征频率与截止频率关系：

$$K = \frac{f_0}{f_c} = \frac{\sqrt{4Q^2 - 2 + \sqrt{4 - 16Q^2 + 32Q^4}}}{2Q} = 1.359 \quad (\text{Section81-17})$$

得： $f_0 = Kf_c = 1.359 \times 200 = 271.7Hz$ 。根据表 Section84-1，选择电容 $C=0.1\mu F$ 。且选择电阻 $R_2=R_4=R$ ，根据式(Section104-2)：

$$R = R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 271.7 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 5857\Omega$$

根据式(Section104-8)解得 R_3 ：

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}} \rightarrow R_3 = QR = 7028\Omega$$

根据式(Section104-7)解得 R_1 ：

$$A_m = -\frac{R_3}{R_1} \rightarrow R_1 = -\frac{R_3}{A_m} = 2343\Omega$$

根据约束条件，解得 R_5 ：

$$R_3 R_5 = R_1 R \rightarrow R_5 = \frac{R_1 R}{R_3} = \frac{2343 \times 5857}{7028} = 1952\Omega$$

据此，依据 E96 系列选取电阻，得到高通电路和仿真结果如图 Section104-4 所示。

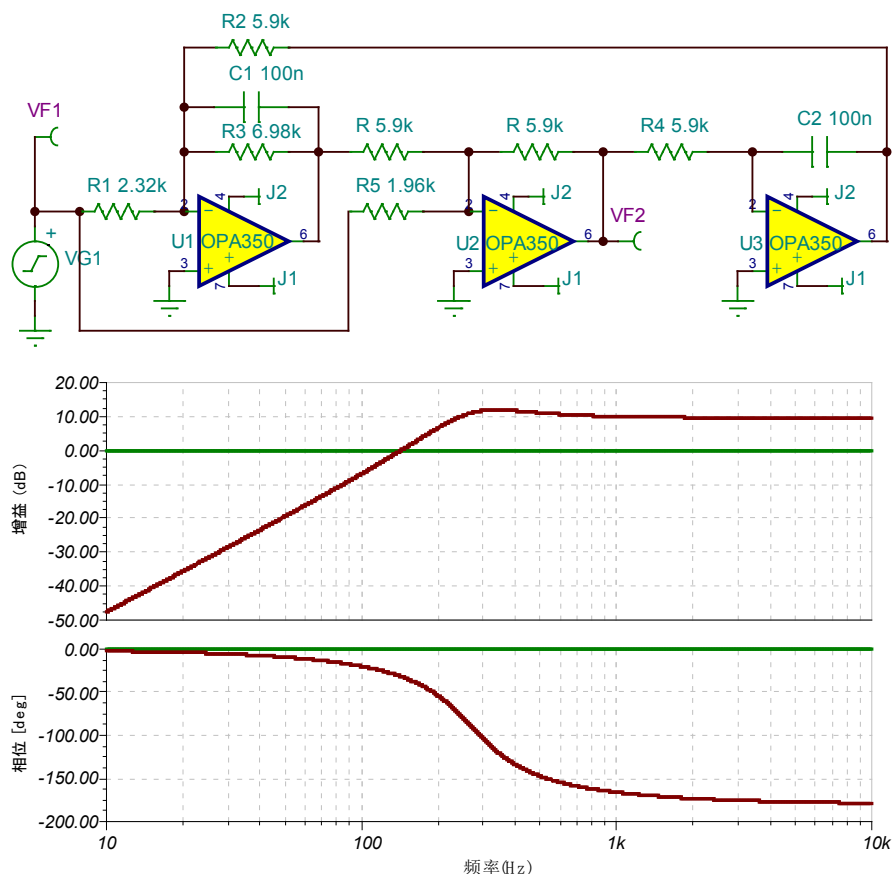


图 Section104-4 举例 2 电路—Fleischer-Tow 高通滤波器及其频率响应

结果表明，与设计要求基本吻合。

带通滤波器

基于特征频率（中心频率）的带通滤波器频域表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{\frac{1}{Q}j\Omega}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

而 Fleischer-Tow 的复频域表达式为：

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - SCR_2R_6\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3R_5}\right) + S^2C^2\frac{R_2R_6R}{R_5}}{1 + SC\frac{R_2R_4}{R_3} + S^2C^2R_2R_4}$$

只要令 $R_5 = R_6 = \infty$ ，上式则变为：

$$\begin{aligned} A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} &= -R_4 \times \frac{\frac{1}{R_6} - SCR_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3R_5}\right) + S^2C^2\frac{R_2R}{R_5}}{1 + SC\frac{R_2R_4}{R_3} + S^2C^2R_2R_4} = R_4 \times \frac{SCR_2\left(\frac{1}{R_1}\right)}{1 + SC\frac{R_2R_4}{R_3} + S^2C^2R_2R_4} \\ &= \frac{R_3}{R_1} \times \frac{SC\frac{R_2R_4}{R_3}}{1 + SC\frac{R_2R_4}{R_3} + S^2C^2R_2R_4} \end{aligned}$$

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_2 R_4}} \quad (\text{Section104-2})$$

其频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{R_3}{R_1} \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = A_m \times \frac{\frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section104-9})$$

可知此时高通滤波器的关键参数为：

$$A_m = \frac{R_3}{R_1} \quad (\text{Section104-10})$$

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}} \quad (\text{Section104-11})$$

举例 3：

使用 Fleischer-Tow 滤波器设计一个带通滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的中心频率为 $f_0=200\text{Hz}$ ， $Q=5$ ，峰值增益为 10 倍。电阻按照 E96 系列选取，用 TINA-TI 仿真软件实证。

解：首先确定电路结构为带通滤波器，则有 $R_5 = R_6 = \infty$ 。其次，选择电容为 $C=0.1\mu\text{F}$ ，根据式(Section104-2)，且令 $R = R_2 = R_4$ ，解得：

$$R = R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 200 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 7958\Omega$$

根据式(Section104-11)解得电阻 R_3 ：

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}} \rightarrow R_3 = QR = 39789\Omega$$

根据式(Section104-10)解得电阻 R_1 ：

$$A_m = \frac{R_3}{R_1} \rightarrow R_1 = \frac{R_3}{A_m} = 3978.9\Omega$$

按照 E96 系列选取电阻，得到高通电路及其频率响应如图 Section104-5 所示。结果表明，与设计要求基本吻合。

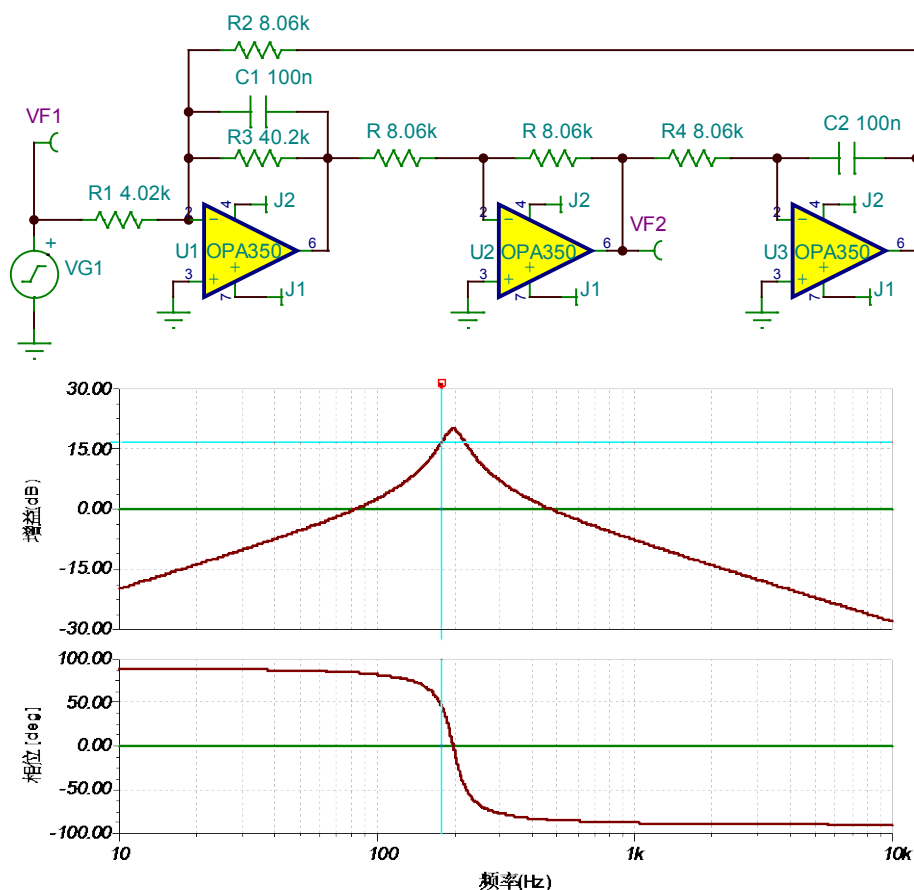


图 Section104-5 举例 3 电路—Fleischer-Tow 带通滤波器及其频率响应

带阻滤波器

基于特征频率（中心频率）的带通滤波器频域表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\sqrt{k}\Omega)^2}$$

(Section82-5a)

而 Fleischer-Tow 的复频域表达式为：

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - SCR_2R_6\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3R_5}\right) + S^2C^2\frac{R_2R_6R}{R_5}}{1 + SC\frac{R_2R_4}{R_3} + S^2C^2R_2R_4}$$

(Section104-1)

只要令：

$$\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3R_5} = 0$$

(Section104-12)

变形后的约束条件为：

$$R_1R = R_3R_5$$

(Section104-12a)

式(Section104-1)则变为：

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 + S^2 C^2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5}}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{R_5}}{C \sqrt{R_2 R_6 R}} \quad f_0 = \frac{\sqrt{R_5}}{2\pi C \sqrt{R_2 R_6 R}} \quad (\text{Section104-13})$$

其频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{R_4 \sqrt{R_2 R_5}}{R_3 \sqrt{R_6 R}} + (j\sqrt{\frac{R_4 R_5}{R_6 R}} \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

可知此时带阻滤波器的关键参数为：

$$A_m = -\frac{R_4}{R_6} \quad (\text{Section104-14})$$

$$Q = \frac{R_3 \sqrt{R_6 R}}{R_4 \sqrt{R_2 R_5}} \quad (\text{Section104-15})$$

$$k = \frac{R_4 R_5}{R_6 R} \quad (\text{Section104-16})$$

k 为通用带阻滤波器的参数，见式(Section82-5a)。

目前约束条件有一个，式(Section104-12a)，已知条件有 4 个，为式(Section104-13)~(Section104-16)，即总的约束方程有 5 个。而未知数有 C ，以及 7 个电阻。根据表格合理选择 C 后，剩下 7 个未知数，显然可以先设定其中任意一个电阻，再令其中两个电阻相等，以与 5 个方程数量相同，就可以解出最终的答案。我建议假设两个条件：

$$R = 1\text{k}\Omega \quad (\text{Section104-17})$$

$$R_2 = R_6 \quad (\text{Section104-18})$$

将式(Section104-16)和式(Section104-16)相除，得：

$$\frac{k}{-A_m} = \frac{\frac{R_4 R_5}{R_6 R}}{\frac{R_4}{R_6}} = \frac{R_5}{R} \rightarrow R_5 = -\frac{k}{A_m} R \quad (\text{Section104-19})$$

根据式(Section104-13)

$$f_0 = \frac{\sqrt{R_5}}{2\pi C \sqrt{R_2 R_6 R}}$$

再利用 $R_2 = R_6$ 解得：

$$R_2 = R_6 = \frac{\sqrt{\frac{R_5}{R}}}{2\pi C f_0} = \frac{\sqrt{-\frac{k}{A_m}}}{2\pi C f_0} \quad (\text{Section104-20})$$

利用式(Section104-14)，得：

$$A_m = -\frac{R_4}{R_6}$$

$$R_4 = -A_m R_6$$

(Section104-21)

利用式(Section104-15)，得：

$$Q = \frac{R_3 \sqrt{R_6 R}}{R_4 \sqrt{R_2 R_5}}$$

$$R_3 = \frac{Q R_4 \sqrt{R_2 R_5}}{\sqrt{R_6 R}} = Q \sqrt{\frac{R_5}{R}} R_4 = Q \sqrt{-\frac{k}{A_m}} (-A_m \frac{\sqrt{-\frac{k}{A_m}}}{2\pi C f_0}) = \frac{kQ}{2\pi C f_0}$$

(Section104-22)

根据式(Section104-12a)，得：

$$R_1 R = R_3 R_5$$

$$R_1 = \frac{R_3 R_5}{R} = -\frac{k}{A_m} \frac{kQ}{2\pi C f_0}$$

(Section104-23)

至此，设计完毕，只要知道了 k ， A_m ， f_0 ， Q ，就可以利用式(Section104-17)~式(Section104-23)，根据选定的 C ，求解出电阻 R ， $R_1 \sim R_6$ 。

举例 4：

使用 Fleischer-Tow 滤波器设计一个带阻滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，滤波器的 $k=1$ ，即为标准陷波器，中心频率为 $f_0=50Hz$ ， $Q=20$ ，峰值增益为 1 倍。

解：首先确定电路结构为标准 Fleischer-Tow，如图 Section104-1。

1) 选择电容 $C=1\mu F$ 。选择电阻 $R=1k\Omega$ 。

2) 根据式(Section104-19)，求解 R_5 ：

$$R_5 = -\frac{k}{A_m} R = 1k\Omega$$

3) 根据式(Section104-20)，求解 R_2 和 R_6 ：

$$R_2 = R_6 = \frac{\sqrt{\frac{R_5}{R}}}{2\pi C f_0} = \frac{\sqrt{-\frac{k}{A_m}}}{2\pi C f_0} = 3183\Omega$$

4) 根据式(Section104-21)，求解 $R_4 = R_6 = 3183\Omega$ 。

5) 根据式(Section104-22)，求解 R_3 ：

$$R_3 = \frac{Q R_4 \sqrt{R_2 R_5}}{\sqrt{R_6 R}} = \frac{kQ}{2\pi C f_0} = 63.66k\Omega$$

6) 根据式(Section104-23)，求解 R_1 ：

$$R_1 = \frac{R_3 R_5}{R} = -\frac{k}{A_m} \frac{kQ}{2\pi C f_0} = 63.66k\Omega$$

设计电路如图 Section104-6 所示，仿真结果如图 Section104-7 所示。

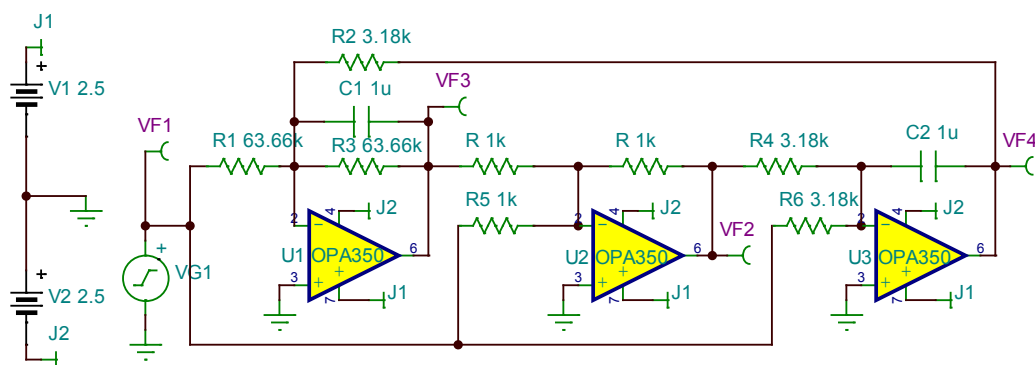


图 Section104-6 举例 3 电路—Fleischer-Tow 带阻滤波器

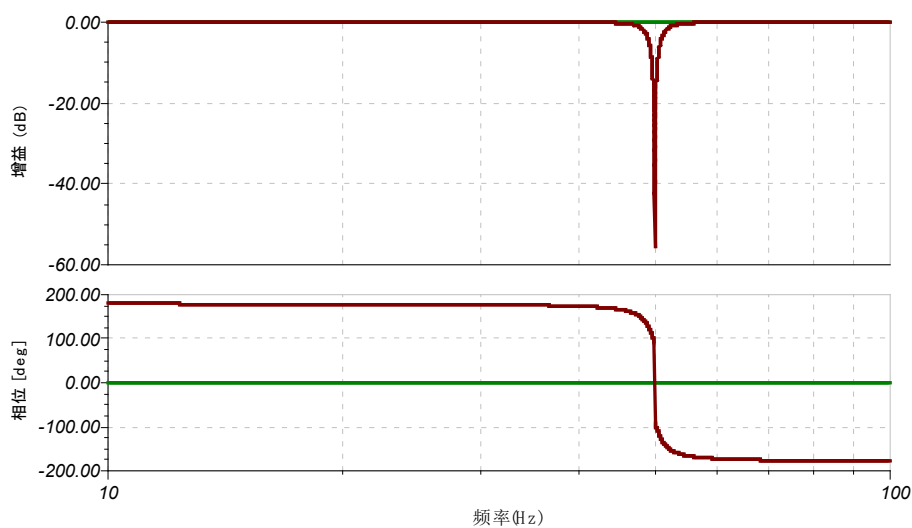


图 Section104-7 举例 4 电路—Fleischer-Tow 带阻滤波器的频率特性

平坦区增益和中心频率一眼就能看出，无需细致验证了。本例只验证 Q 值。在幅频特性图中，使用 a 标尺，点中陷波器输出线，在对话框中输入增益为 -3.01dB ，分别得到两个频率点：

$$f_L = f_{A=-3.01\text{dB}}(\text{左}) = 48.77\text{Hz}$$

$$f_H = f_{A=-3.01\text{dB}}(\text{右}) = 51.27\text{Hz}$$

由此可知：

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L} = 20$$

与设计要求吻合。

全通滤波器

基于特征频率（中心频率）的带通滤波器频域表达式为：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 - \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\Omega)^2}$$

(Section82-8a)

而 Fleischer-Tow 的复频域表达式为：

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - SC R_2 R_6 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5} \right) + S^2 C^2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5}}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

(Section104-1)

只要令分子和分母的 S 项、S² 项具有相同的系数，即可。因此：

对 S² 项有：

$$\begin{aligned} \frac{R_2 R_6 R}{R_5} &= R_2 R_4 \rightarrow \\ &\rightarrow R_6 R = R_4 R_5 \end{aligned}$$

(Section104-24)

对 S 项有：

$$R_2 R_6 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5} \right) = \frac{R_2 R_4}{R_3}$$

化简：

$$\begin{aligned} \frac{R_3 R_5 R_6 - R_1 R_6 R}{R_1 R_3 R_5} &= \frac{R_1 R_4 R_5}{R_1 R_3 R_5} \rightarrow \\ \rightarrow R_3 R_5 R_6 - R_1 R_6 R &= R_1 R_4 R_5 \end{aligned}$$

(Section104-25)

$$\begin{aligned} R_3 R_6 &= 2 R_1 R_4 \\ R_3 R_5 &= 2 R_1 R \end{aligned}$$

则式(Section104-1)一定变为：

$$A = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

设：

$$\frac{1}{\omega_0^2} = C^2 R_2 R_4 \quad \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_2 R_4}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C \sqrt{R_2 R_4}}$$

(Section104-26)

其频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{R_2 R_4}}{R_3} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = A_m \times \frac{1 - \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

可知此时高通滤波器的关键参数为：

$$A_m = -\frac{R_4}{R_6} \quad (\text{Section104-27})$$

$$Q = \frac{R_3}{\sqrt{R_2 R_4}} \quad (\text{Section104-28})$$

至此，分析完毕。要完成全通滤波器的设计，还需要做必要的约束：

设计电路已知的条件有 A_m , f_0 , Q , 以及为实现全通而必须保证的两个约束方程，式 (Section104-24)~(Section104-25)，即能够写出的方程式总共有 5 个。而要求解的参数有：电容 C 、电阻 R 、电阻 $R_1 \sim R_6$ ，共 8 个未知量。显然，有三个未知量不能被约束。因此给出如下 3 个人为约束：

1) 根据特征频率任选合适的 C ; 2) $R_2 = R_4$; 3) 选择合适的电阻 R 。

据此，得设计方法如下：

1) 根据特征频率，参照表 Section84-1，任选合适的电容 C ，选择合适的电阻 R 。

2) 根据特征频率表达式(Section104-26)，以及人为约束 2)，解出电阻 R_2 和 R_4 ：

$$R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi C f_0} \quad (\text{Section104-29})$$

3) 根据增益表达式(Section104-27)

$$R_6 = -\frac{R_4}{A_m} \quad (\text{Section104-30})$$

4) 根据品质因数表达式(Section104-28)

$$R_3 = Q R_4 \quad (\text{Section104-31})$$

5) 根据式(Section104-24)

$$R_5 = \frac{R_6 R}{R_4} = -\frac{R}{A_m} \quad (\text{Section104-32})$$

6) 根据式(Section104-25)

$$\begin{aligned} R_3 R_5 R_6 - R_1 R_6 R &= R_1 R_4 R_5 \\ R_1 &= \frac{R_3 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_6 R} \end{aligned}$$

将式(Section104-24)、式(Section104-32)代入得：

$$R_1 = -\frac{R_3}{2A_m} \quad (\text{Section104-33})$$

举例 5：

使用 Fleischer-Tow 滤波器设计一个全通滤波器。要求，运放为 OPA350，供电电压为 $\pm 2.5V$ ，中心频率为 $f_0=1000Hz$ ， $Q=5$ ，峰值增益为 10 倍。

解：1) 参照表 Section84-1，选择电容 $C=22nF$ 。选择电阻 $R=10k\Omega$ 。

2) 根据式(Section104-29)，计算出：

$$R_2 = R_4 = \frac{1}{2\pi C f_0} = 7234.3\Omega$$

3) 根据式(Section104-30), 计算出:

$$R_6 = -\frac{R_4}{A_m} = 723.43\Omega$$

4) 根据式(Section104-31), 计算出:

$$R_3 = Q R_4 = 36171\Omega$$

5) 根据式(Section104-32), 计算出:

$$R_5 = \frac{R_6 R}{R_4} = -\frac{R}{A_m} = 1000\Omega$$

此式一出, 就应该知道我为什么选择电阻 $R=10k\Omega$, 而不是常用的 $1k\Omega$ 。

6) 根据式(Section104-33), 计算出:

$$R_1 = -\frac{R_3}{2A_m} = 1808.6\Omega$$

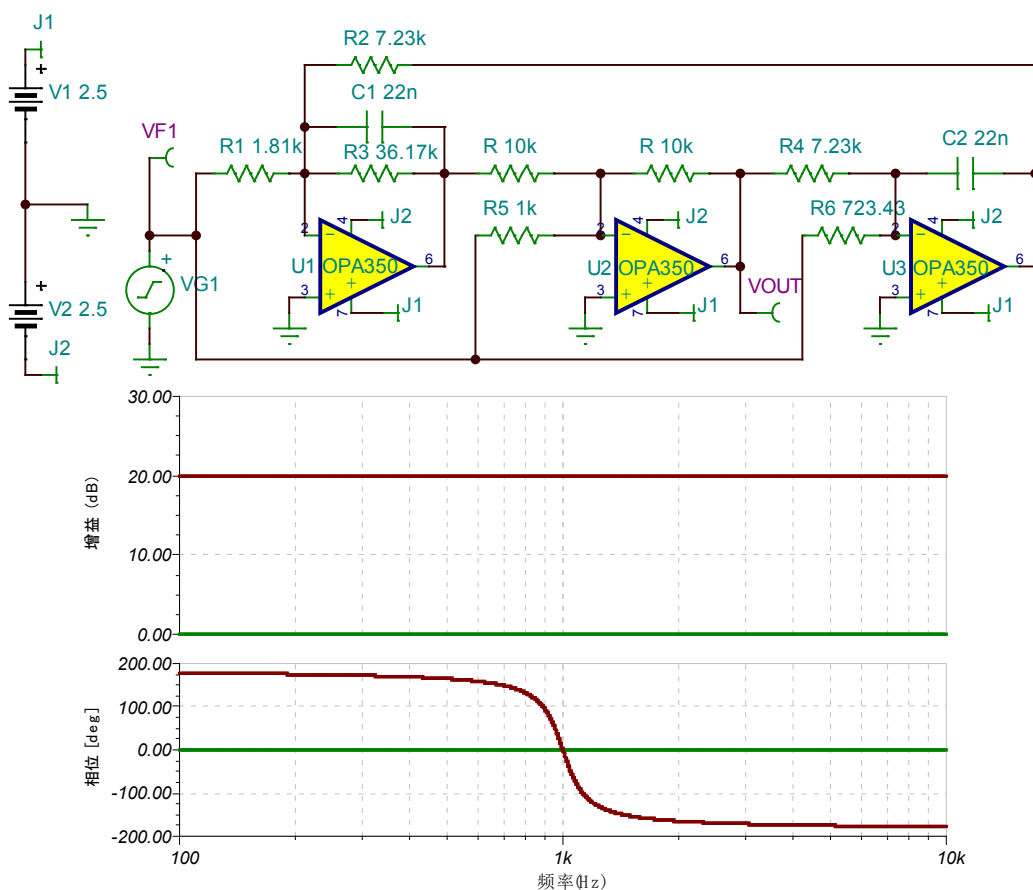


图 Section104-8 举例 5 电路—Fleischer-Tow 全通滤波器和仿真频率特性

电路和仿真结果如图 Section104-8 所示。增益和中心频率都是吻合的, 看看 Q 是否吻合。利用 a 标尺, 可得:

$$f_L = f_{\varphi=90} = 904.84\text{Hz} \quad f_H = f_{\varphi=-90} = 1.10\text{kHz}$$

$$Q_{\text{实测}} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{1000}{1100 - 905} = 5.13$$

与设计要求基本吻合, 误差可能源自 TINA 给出的 $110k$ 不准确。如果是 1104Hz , 按照 3 位有效数字, TINA 将仍显示 $110k$, 而 Q 值则变为 5.02 。

Section105.椭圆滤波器——有源

椭圆滤波器，Elliptic Filter，又称为考尔滤波器，Cauer Filter，是一种具有零点的滤波器，它实现的低通滤波器，有如下特点：

1) 具有最窄的过渡带，与说断就断的砖墙滤波器最为相似；

2) 通带、阻带内均有波动。

3) 偶数阶滤波器的阻带，增益很小但不会随频率增大而趋于 0；奇数阶滤波器的阻带，会随着频率的增加，以一阶衰竭模式趋于 0。因此，多数情况下，椭圆滤波器都以奇数阶形式存在。

最简单的椭圆滤波器——2 阶椭圆

其实，椭圆滤波器一点儿都不神秘，我们早已见过它——在本书 Section100 中，我们介绍了陷波器的另外两种情况，即下式：

$$\dot{A}(j\Omega) = A_m \times \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\Omega + (j\sqrt{k}\Omega)^2} \quad (\text{Section82-5a})$$

这个式子的特点是，它的分子存在零点。将这个表达式写成更为通用的：

$$\dot{A}(j\omega) = A_m \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_s})^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

即，分母为标准二阶低通滤波器的分母，而分子为 1 与平方项的和。将其再次变形：

$$\dot{A}(j\omega) = (A_m \times \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}) \times (1 + (j\frac{\omega}{\omega_s})^2) = \dot{A}_1(j\omega) \times \dot{A}_2(j\omega)$$

$\dot{A}_1(j\omega)$ 为标准二阶低通， $\dot{A}_2(j\omega)$ 为分子项。不要小看这个分子项，它的存在，导致滤波器产生了非常奇妙的变化，也引发了椭圆滤波器的诞生。

图 Section105-1 是一个特征角频率 ω_0 为 1 的巴特沃斯低通，与一个零点频率 ω_s 为 2 的分子项相乘的幅频特性图。

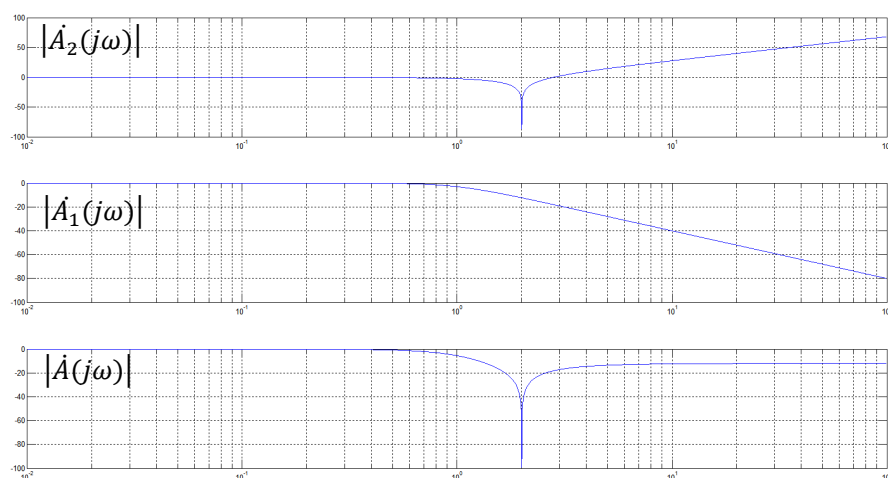


图 Section105-1 二阶椭圆滤波器构成原型

其传递函数的频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{0.7071}j\frac{\omega}{1} + (j\frac{\omega}{1})^2} \right) \times (1 + (j\frac{\omega}{2})^2) = \dot{A}_1(j\omega) \times \dot{A}_2(j\omega)$$

对此表达式，需要知道几个关键频率点的模：

1) 当 $\omega=0$ ，有：

$$|\dot{A}(j\omega)| = 1 = 0\text{dB}$$

2) 当 $\omega=1$ ，有：

$$|\dot{A}(j\omega)| = \left| \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{0.7071}j1 + (j1)^2} \right) \times (1 + (j\frac{1}{2})^2) \right| = 0.5303 = -5.5\text{dB}$$

3) 当 $\omega=2$ ，有：

$$|\dot{A}(j\omega)| = \left| \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{0.7071}j2 + (j2)^2} \right) \times (1 + (j\frac{2}{2})^2) \right| = 0 = -\infty\text{dB}$$

从 $\omega=1$ 到 $\omega=2$ ，增益会有一个剧烈的下降。这是过渡带变窄的最核心因素。在图中我们看不到 $-\infty\text{dB}$ ，是因为我在做这张图时，横轴角频率的增加是离散的，没有准确击中 $\omega=2$ 。

3) 当 $\omega=\infty$ ，有：

$$|\dot{A}(j\omega)| = \left| \left(A_m \times \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \right) \times (1 + (j\frac{\omega}{\omega_s})^2) \right| = \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2} = 0.25 = -12.04\text{dB}$$

也就是说，当角频率无限增加时，上述表达式形成的模，并不像标准低通一样，趋于 0，而是稳定在 ω_0^2/ω_s^2 。

至此，我们得到的结果有两个，有好有坏。好的是，它出现了一个极为陡峭的过渡带，在 $\omega=1$ 到 $\omega=2$ 之间，这有利于形成砖墙滤波器效果。坏的是，随着频率的上升，增益没有趋于 0，而是趋于 0.25 倍，这不像低通滤波器。

但是，如果我们将好多个这样的二阶传递函数串联起来，形成 4 阶、6 阶、8 阶等，就可以得到，第一，过渡带将变得更为陡峭，第二，高频段的增益会是 2 个、3 个、4 个 0.25 倍的相乘，也将变得很小。虽然它仍不是标准低通，但是对高频的抑制，也算是非常明显了。

图 Section105-2 是直接将 4 个 $\dot{A}(j\omega)$ 相乘得到的幅频特性。从中看出，它具有非常陡峭的过渡带，且在角频率趋于很大时，增益趋于 -48.16dB ，也就是 0.00391 倍。

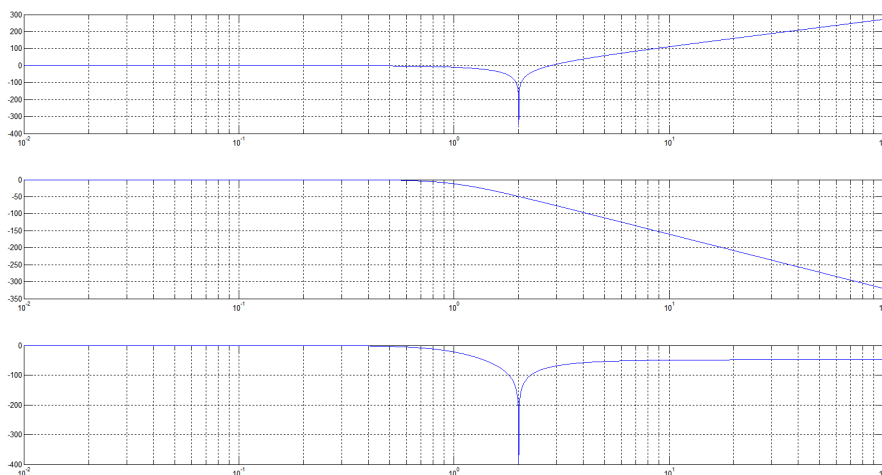


图 Section105-2 8 阶椭圆滤波器构成原型

但是，这样愚蠢地将 4 个完全相同的二阶传函相乘，就想得到美妙的结果，基本上是妄想。它存在几个问题：第一，它的效率太低了，4 个传函才得到了 -48dB 的高频衰减；第二，它的截止频率此时已经降得很低，不再是 1。

椭圆滤波器——以 7 阶为例

数学家想出了两个办法，以得到优美的椭圆滤波效果。第一，将级联的二阶传函中，每一级的特征角频率 ω_{0i} 、品质因数 Q_i 、以及零点角频率 ω_{si} ，都视为可调节的系数，以探索不同系数带来的效果。第二，给传函中增加一级一阶低通滤波，即分子上仍为 n 次， n 为偶数，而分母上变为 $n+1$ 次，以迫使随着频率的增加，增益会逐渐下降，这更像一个低通滤波器。

这样，就形成了椭圆滤波器，以 7 阶为例，其增益随频率的通用表达式为：

$$\begin{aligned} \dot{A}(j\omega) &= \frac{(1 + (j\frac{\omega}{\omega_{s1}})^2) \times (1 + (j\frac{\omega}{\omega_{s2}})^2) \times (1 + (j\frac{\omega}{\omega_{s3}})^2)}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_{00}})(1 + \frac{1}{Q_1}j\frac{\omega}{\omega_{01}} + (j\frac{\omega}{\omega_{01}})^2) \times (1 + \frac{1}{Q_2}j\frac{\omega}{\omega_{02}} + (j\frac{\omega}{\omega_{02}})^2) \times (1 + \frac{1}{Q_3}j\frac{\omega}{\omega_{03}} + (j\frac{\omega}{\omega_{03}})^2)} \\ &\quad \text{[Section105-1]} \end{aligned}$$

椭圆滤波器系数的选择，是一个极为复杂的过程，不同的系数，会引起通带内波动大小不同、阻带频率的不同、以及阻带内的最大增益不同。怎么选的，我不会，但有人会。Kendall Su 所著 Analog Filter[2003 Kluwer Academic Publishers]给出了很多实际椭圆滤波器的系数，本书以特征频率体系对其进行了变换，得到与式(Section105-1)匹配的系数。以其中某一个 7 阶椭圆为例，系数如下：

	特征角频率 ω_{0i}	品质因数 Q_i	零点角频率 ω_{si}
一阶($i=0$)	0.29811730		
第 1 级($i=1$)	1.00662843	12.0415573	1528568700
第 2 级($i=2$)	0.86473145	3.14527862	1820436807
第 3 级($i=3$)	0.56742047	1.16163869	3.087082453

将上述系数代入式(Section105-1)，用 Matlab 作图可得其幅频特性曲线，如图 Section105-3。读者可以看到，其幅频特性曲线在 $\omega=1$ 之前，几乎是完全平坦的，0dB，在

$\omega=1\sim 1.5$ 之间，增益迅速下降，在无穷小和-79dB 之间振荡波动。粗看，这已经是一个相当完美的低通滤波器。

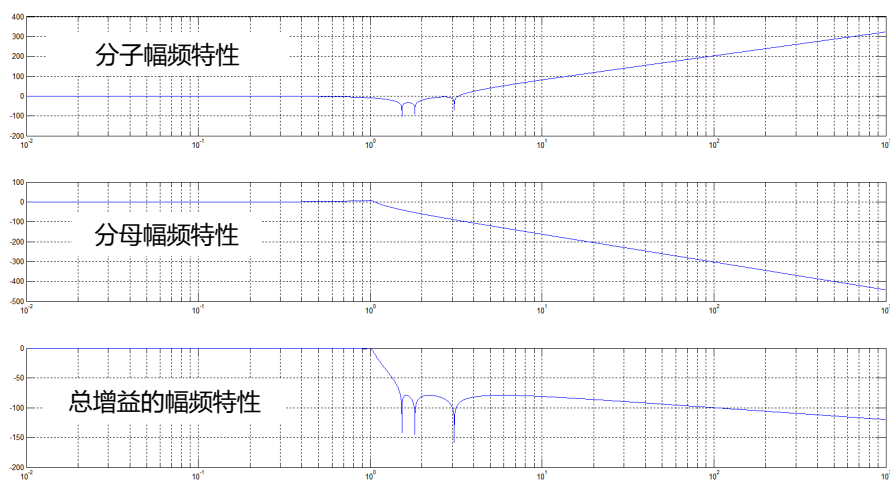


图 Section105-3 一个实际的 7 阶椭圆滤波器分子、分母和总的幅频特性

任意阶数椭圆滤波器

奇数阶椭圆滤波器的通用频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + j \frac{\omega}{\omega_{si}})^2}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_{00}}) \prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{Q_i} j \frac{\omega}{\omega_{0i}} + (j \frac{\omega}{\omega_{0i}})^2)}$$

(Section105-2)

其中， ω_{00} 是一阶低通的特征角频率（也是其截止角频率）。确定 n 后，可以实现 $2n+1$ 阶椭圆滤波器。例如前述的 7 阶滤波器，分子分母均由三个二次项相乘得到， $n=3$ 。

偶数阶椭圆滤波器的通用频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + j \frac{\omega}{\omega_{si}})^2}{\prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{Q_i} j \frac{\omega}{\omega_{0i}} + (j \frac{\omega}{\omega_{0i}})^2)}$$

(Section105-3)

椭圆滤波器的关键参数

将图 Section105-3 中总增益幅频特性的纵轴，由 dB 显示改为直接显示。

放大其中的通带部分，如图 Section105-4 左。可以看出在通带内，增益有起伏，图中只显示了两个波谷，其实有 3 个。标准的椭圆滤波器，多个波谷的幅度是一致的，称之为“通带等纹波”。

1) 通带增益 A_{p0} ，是指平坦区增益，对低通滤波器来说，指频率为 0Hz 时的增益，对高通滤波器来说，指频率为 ∞ 时的增益。对此图， $A_{p0}=1=0\text{dB}$ 。

2) 通带增益极值 A_{pm} ，指通带内增益最大或者最小值，即平坦区中隆起的最大值，或者下陷的最小值。对于标准椭圆滤波器来说，这个极值可能出现多次。对此图， A_{pm} 约为 0.945。

3) 通带纹波 R_{dB} ，指通带内的波动，以 dB 为单位：

$$R_{dB} = \left| 20 \times \log_{10} \frac{A_{pm}}{A_{p0}} \right| = |A_{pm}(\text{dB}) - A_{p0}(\text{dB})|$$

对此图， R_{dB} 约为 0.5dB。

4) 通带角频率 ω_p 。如果 $A_{pm} < A_{p0}$ ，则说明幅频特性呈现下凹式波动，如图 Section105-4 左，则从低频向高频寻找，幅频特性曲线第一次交越 A_{pm} 的角频率，即为通带角频率，名为 ω_p 。 ω_p 左侧，其增益总是大于等于 A_{pm} ，定义为通带。如果 $A_{pm} > A_{p0}$ ，则说明幅频特性呈现上凸式波动，如举例 2 图 Section105-7，则从低频向高频寻找，幅频特性曲线第一次交越 A_{p0} 的角频率，即为通带角频率。总之，是以较小的增益为横线，和幅频特性曲线相交。

5) 阻带增益和阻带角频率 ω_s 。放大其中的阻带部分，如图 Section105-4 右。可以看出在阻带内，增益也有起伏。标准的椭圆滤波器，多个波峰的幅度是一致的，称之为“阻带等纹波”。找到阻带内最大的波峰，其增益即为阻带增益， A_s ，然后让角频率从最大波峰，如果等纹波，则从最左侧的波峰开始下降，遇到的第一个大于 A_s 的角频率点，即为阻带角频率，名为 ω_s 。 ω_s 右侧，均为阻带。

6) 阻带衰减 ΔA_s ，以 dB 为单位，定义如下：

$$\Delta A_s = 20 \times \log_{10} \frac{A_{p0}}{A_s} = A_{p0}(\text{dB}) - A_s(\text{dB})$$

7) 过渡带比。 $\omega_p \sim \omega_s$ 之间，即为过渡带。 ω_s/ω_p ，称之为过渡带比。

很显然，对低通滤波器来说， ω_s/ω_p 一定大于 1，它越接近于 1，则越接近于砖墙滤波器，过渡带越窄。

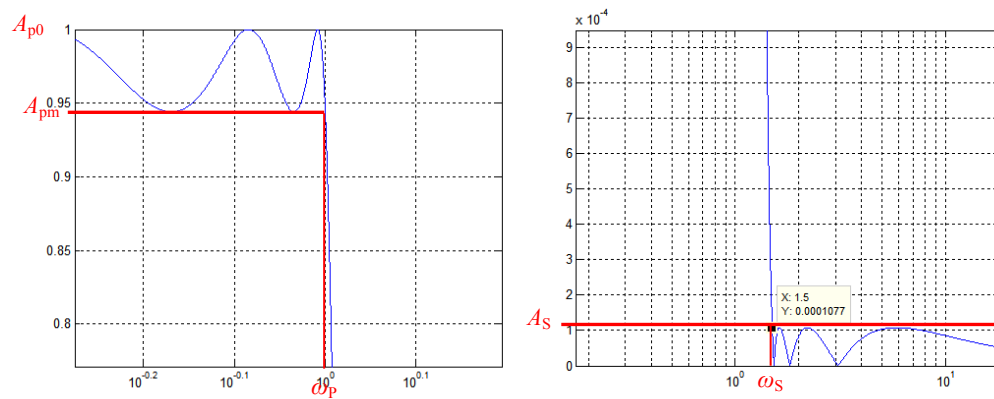


图 Section105-4 椭圆滤波器的关键参数

椭圆滤波器系数表

本书提供的椭圆滤波器表格，所有数据都由原始数据计算获得，而原始数据来自于 Kendall Su 所著 Analog Filter(2003 Kluwer Academic Publishers)。

系数表以式(Section105-2)和式(Section105-3)为基础。

表 Section105-1 带内纹波 0.5dB, $\omega_s/\omega_p=1.5$

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
2	1.26617253	1.22746558	1.981678829
3	1.07199269	2.36718021	1.675116142
	0.76695213		
4	1.02977555	4.03894465	1.592341989
	0.68689631	0.74662189	3.478406167
5	1.01582182	6.21441916	1.557406392
	0.75895452	1.33094841	2.331875771
	0.42597073		
6	1.00976226	8.88311901	1.539249414
	0.82138477	2.14203144	1.981678829
	0.45710956	0.69947751	5.08206827
7	1.00662843	12.0415573	1.5285687
	0.86473145	3.14527862	1.820436807
	0.56742047	1.16163869	3.087082453
	0.2981173		
8	1.00480428	15.6882909	1.521741535
	0.89468501	4.32729846	1.730797622
	0.66040884	1.77981493	2.453940551
	0.34225314	0.68501594	6.712672877
9	1.00364925	19.8226292	1.5171079
	0.91592624	5.68161156	1.675116142
	0.72945853	2.52475572	2.153215284
	0.4494743	1.10095276	3.874834371
	0.22996083		
10	1.00287083	24.4442025	1.513816723
	0.9314339	7.20465862	1.637877114
	0.78036435	3.38591629	1.981678829
	0.54616608	1.63846907	2.95816906
	0.27353859	0.67864872	8.354130562

表 Section105-2 带内纹波 1dB , $\omega_s/\omega_p=1.5$

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
2	1.102012305	1.253115105	1.981678829
3	1.011787502	2.695253459	1.675116142
	0.59101528		
4	0.999405403	4.785991359	1.592341989
	0.603557131	0.826816878	3.478406167
5	0.997475549	7.495235608	1.557406392
	0.719074787	1.570892093	2.331875771
	0.33784626		
6	0.997440369	10.81435813	1.539249414
	0.798908487	2.585795072	1.981678829
	0.405709182	0.777805334	5.082050943
7	0.997762792	14.74055903	1.5285687
	0.850465273	3.835127053	1.820436807
	0.539532529	1.3778339	3.087082453
	0.23818831		
8	0.998110094	19.27268682	1.521741535
	0.884854903	5.304897279	1.730797622
	0.64330227	2.157504915	2.453940551
	0.304971376	0.762227326	6.712672877
9	0.998410902	24.41018298	1.5171079
	0.908742417	6.988029909	1.675116142
	0.717968558	3.088554091	2.153215284
	0.428251363	1.307386652	3.874821467
	0.18427506		
10	0.998657334	30.1527701	1.513816723
	0.925949545	8.880490332	1.637877114
	0.772144255	4.161298299	1.981678829
	0.532590208	1.988720054	2.95816906
	0.244205282	0.755275946	8.354130562

表 Section105-3 带内纹波 1dB，阻带最大-60dB

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
2	0	#DIV/0!	0
3	0.998373748	2.056312536	5.783509687
	0.50042888		
4	0.995432901	3.888012007	2.64652041
	0.551333719	0.796647309	6.190864511
5	0.996777859	6.948005756	1.740548348
	0.703698437	1.524888033	2.654092152
	0.32551786		
6	0.998034188	12.16902647	1.374821959
	0.816796456	2.757594866	1.735109207
	0.426057426	0.784763917	4.346644533
7	0.998845619	21.16811861	1.201252829
	0.889966072	4.85165617	1.371226819
	0.605393385	1.484979466	2.181356599
	0.2776573		
8	0.999330131	36.73786326	1.111515839
	0.935000781	8.452650738	1.199259913
	0.748636587	2.673267501	1.55178957
	0.387950667	0.783493195	3.916577378
9	0.9996128	63.71087514	1.062875628
	0.961979943	14.67749787	1.110420177
	0.846283351	4.695823614	1.286054081
	0.573326373	1.480714148	2.055431045
	0.26270204		
10	0.999776435	110.4632578	1.035799512
	0.977889774	25.45824206	1.062265353
	0.908234419	8.176759123	1.155770604
	0.725446683	2.664263976	1.499648475
	0.375660844	0.783353042	3.788107991

表 Section105-4 带内纹波 1dB，阻带最大-30dB

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
2	1.058160659	0.981967275	5.617610342
3	1.008070375	2.455312773	1.953590228
	0.55955791		
4	1.00231103	6.043414	1.311813592
	0.659689457	0.864091221	2.675900273
5	1.00087785	14.80243875	1.117140551
	0.83307313	2.073148828	1.468826433
	0.45056343		
6	1.000354192	36.22439995	1.046302667
	0.927320781	5.06510439	1.168868059
	0.60284498	0.861370196	2.427541229
7	1.00014444	88.63479934	1.018670521
	0.969578429	12.3906963	1.065771519
	0.802865437	2.06426928	1.411854546
	0.43391247		

举例 1：

使用椭圆滤波器系数表，设计一个 5 阶椭圆滤波器频域表达式，要求通带角频率为 1，阻带最大增益为-60dB，通带内波动不超过 1dB。用 Matlab 编写程序，验证是否满足要求，且求出阻带角频率。

解：根据题目要求，可知采用表 Section105-3 合适，选择其中 n=5，获得表中黄色框内数据如下：

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
5	0.996777859	6.948005756	1.740548348
	0.703698437	1.524888033	2.654092152
	0.32551786		

根据式(Section105-2)，将数据代入得：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + j \frac{\omega}{\omega_{si}})^2}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_{00}}) \prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{Q_i} j \frac{\omega}{\omega_{0i}} + j \frac{\omega}{\omega_{0i}})^2}$$

$$= \frac{(1 + (j \frac{\omega}{1.740548348})^2)}{(1 + j \frac{\omega}{0.32551786})(1 + \frac{1}{6.948005756} j \frac{\omega}{0.996777859} + (j \frac{\omega}{0.996777859})^2)} \times \frac{(1 + (j \frac{\omega}{2.654092152})^2)}{1 + \frac{1}{1.524888033} j \frac{\omega}{0.703698437} + (j \frac{\omega}{0.703698437})^2}$$

这是一个仅与变量 ω 有关的复数表达式，即题目要求的频域表达式。求其模，即可利用 Matlab 绘制其幅频特性。如图 Section105-5 所示。从此图可以看出阻带的效果，显然其最大增益为-60dB，满足题目要求。在 Matlab 程序中，可以求解处图中 $\omega_s=1.6717$ ，即阻带角频率。

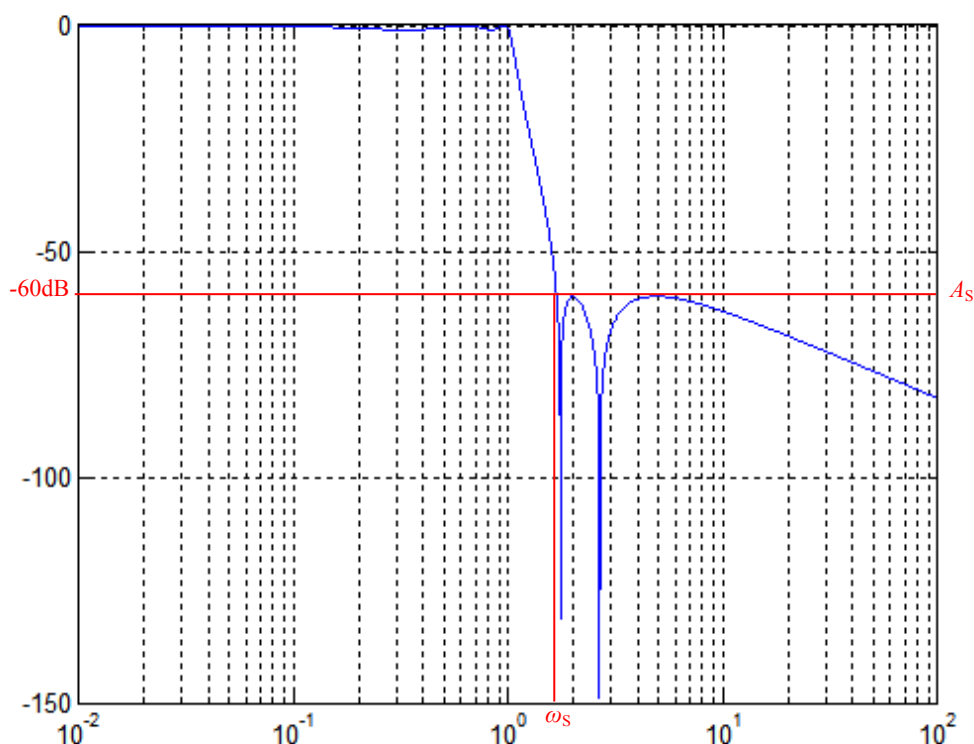


图 Section105-5 举例 1 的幅频特性全图

将此图通带部分放大显示，可以看出，其通带内波动确实为 1dB，通带频率确实为 1。

举例 2：

使用椭圆滤波器系数表，设计一个 8 阶椭圆滤波器频域表达式，要求通带频率为 150Hz，通带内波动不超过 0.5dB， $\omega_s/\omega_p=1.5$ 。用 Matlab 编写程序，验证是否满足要求，且求出阻带最大增益。

解：根据题目要求，选择表 Section105-1 合适。从中 8 阶方框取出如下数据：

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
8	1.00480428	15.6882909	1.521741535
	0.89468501	4.32729846	1.730797622
	0.66040884	1.77981493	2.453940551
	0.34225314	0.68501594	6.712672877

当通带角频率为 1，变为通带频率为 1Hz。所有系数表无需任何变换，仅需将式 Section105-3 变换为：

$$\dot{A}(jf) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + (j \frac{f}{f_{si}})^2)}{\prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{Q_i} j \frac{f}{f_{oi}} + (j \frac{f}{f_{oi}})^2)} \quad (\text{Section105-3a})$$

而当通带频率不再是 1Hz，而是 150Hz，则新的系数表以下式进行变换：

$$f_{oi} = 150 \times \omega_{0i} ; f_{si} = 150 \times \omega_{si}$$

据此得到新的系数表如下：

n	f_{0i}	Q_i	f_{si}
8	150.7206427	15.6882909	228.2612303
	134.2027517	4.32729846	259.6196434
	99.06132532	1.77981493	368.0910827
	51.3379706	0.68501594	1006.900932

根据新的系数表，列出频域表达式为：

$$\begin{aligned} \dot{A}(jf) &= \frac{\prod_{i=1}^n (1 + (j \frac{f}{f_{si}})^2)}{\prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{Q_i} j \frac{f}{f_{oi}} + (j \frac{f}{f_{oi}})^2)} \\ &= \frac{1 + (j \frac{f}{228.2612303})^2}{1 + \frac{1}{15.6882909} j \frac{f}{150.7206427} + (j \frac{f}{150.7206427})^2} \frac{1 + (j \frac{f}{259.6196434})^2}{1 + \frac{1}{4.32729846} j \frac{f}{134.2027517} + (j \frac{f}{134.2027517})^2} \\ &\times \frac{1 + (j \frac{f}{368.0910827})^2}{1 + \frac{1}{1.77981493} j \frac{f}{99.06132532} + (j \frac{f}{99.06132532})^2} \frac{1 + (j \frac{f}{1006.900932})^2}{1 + \frac{1}{0.68501594} j \frac{f}{51.3379706} + (j \frac{f}{51.3379706})^2} \end{aligned}$$

Matlab 程序得到的幅频特性曲线如图 Section105-5 所示。可以大致看出，结果基本符合要求，在 150Hz 处开始出现急剧的增益下降。在通带内也有隐约可见的纹波。通过程序计算表明，阻带增益大约为-93.17dB，根据阻带增益获得的阻带频率为 225.004Hz，如图中红色线标注的 ω_s 。

为了观察通带，可以对幅频特性曲线进行放大，如图 Section105-6 所示。可以看出，通带内有 4 个波峰，最大波动为 0.5dB，符合设计要求。根据通带频率定义，可知在最后下降的曲线上，经过 0dB 的频率为 150Hz，此即为通带频率。

据此，可知 $\omega_s/\omega_p=225.004/150=1.5$ ，符合设计要求。

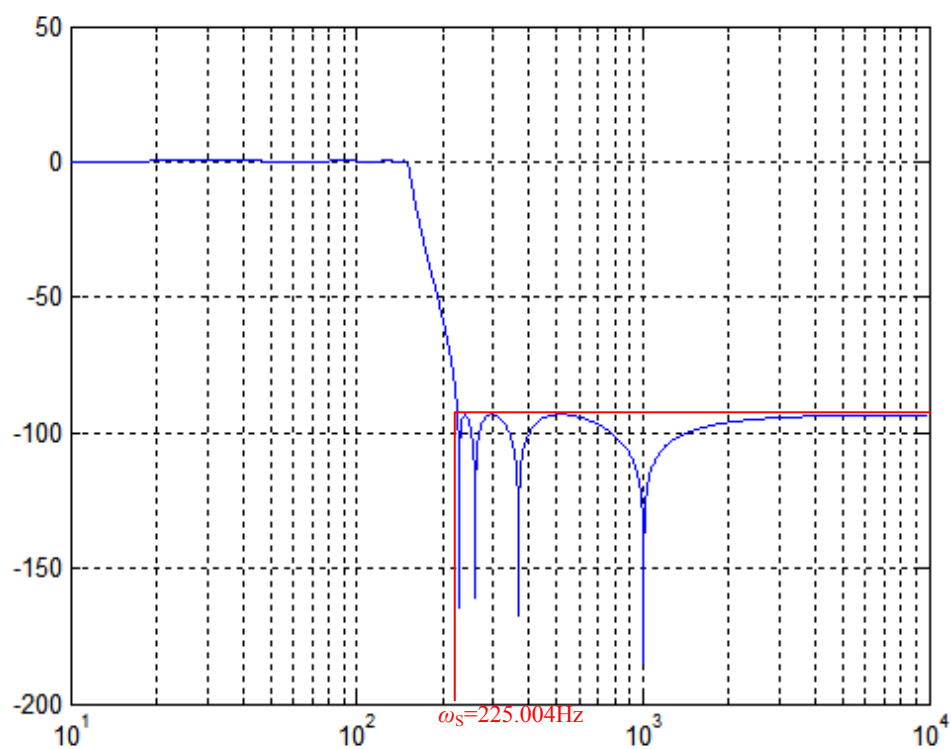


图 Section105-6 举例 2 的幅频特性全图

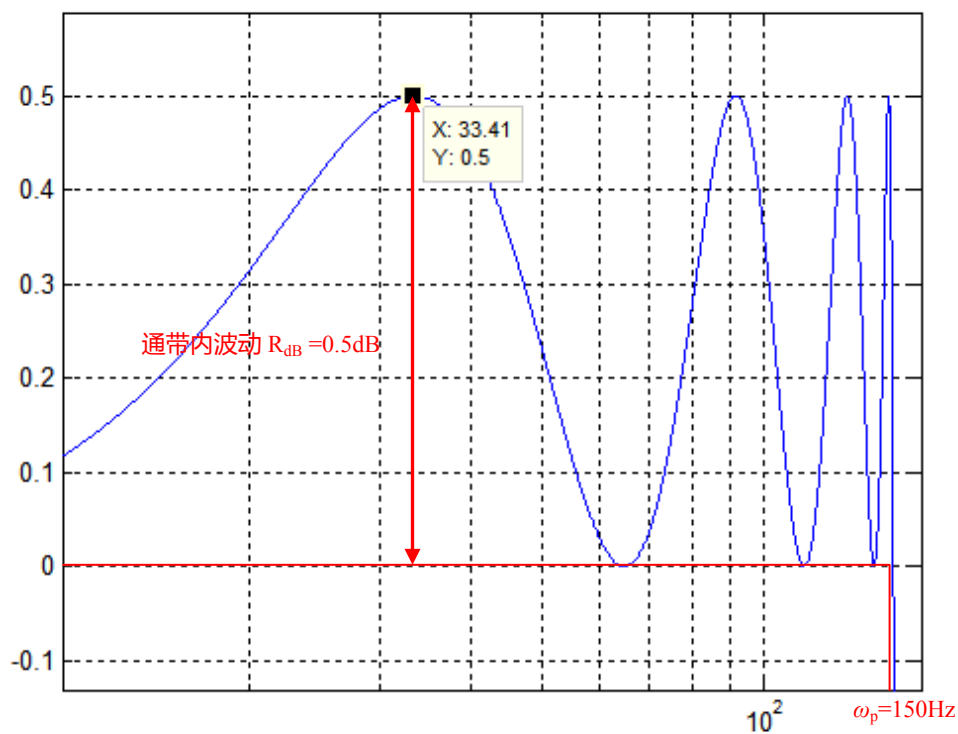


图 Section105-7 举例 2 的幅频特性通带局部

用 Fleischer-Tow 滤波器实现的椭圆滤波器

前述内容主要分析了椭圆滤波器的数学基础。现在开始，我们看如何用电路实现一个椭圆滤波器。实现椭圆滤波器的主要方法有两种，基于运放的有源椭圆滤波器，以及基于电感和电容、电阻的无源椭圆滤波器。

Section104 讲述的 Fleischer-Tow 滤波器，就可以实现椭圆滤波，它属于有源滤波。

图 Section104-1 所示的电路，为标准的 Fleischer-Tow 滤波器，其传函为：

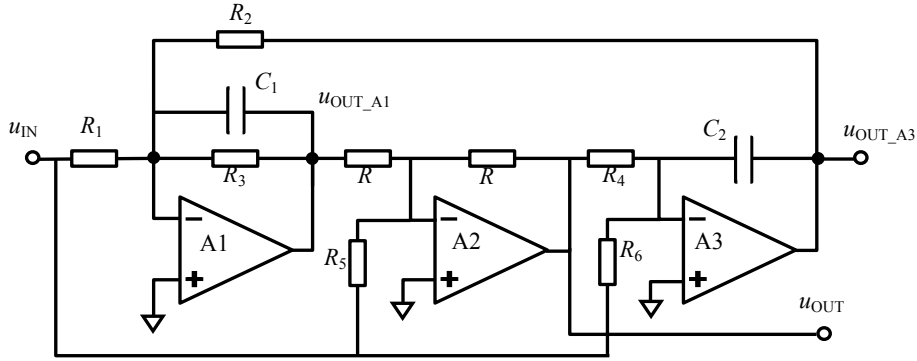


图 Section104-1 Fleischer-Tow 滤波器

$$A = \frac{u_{OUT}}{u_{IN}} = -\frac{R_4}{R_6} \times \frac{1 - SC_2 R_2 R_6 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{R_3 R_5} \right) + S^2 C_1 C_2 \frac{R_2 R_6 R}{R_5}}{1 + SC_2 \frac{R_2 R_4}{R_3} + S^2 C_1 C_2 R_2 R_4}$$

[Section104-1]

为实现椭圆滤波，进行如下约定：

$$R_3 = R_1; R_5 = R_6 = R; C_1 = C_2 = C$$

形成新的电路如图 Section105-8 所示，其传函演变为：

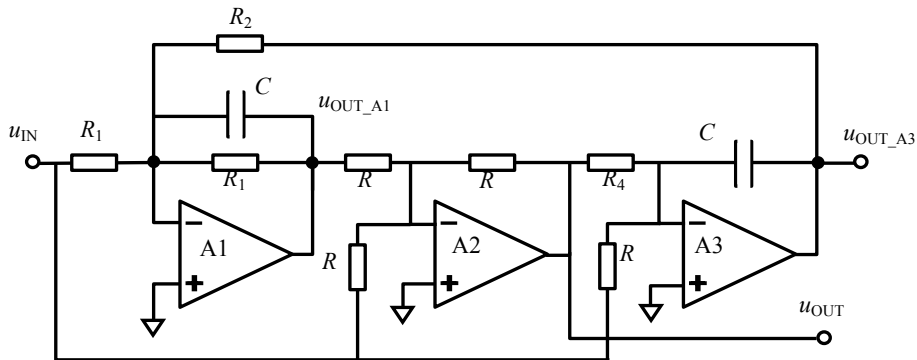


图 Section105-8 基于 Fleischer-Tow 滤波器的椭圆滤波器

$$A_{ellip} = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R} \times \frac{1 + S^2 C^2 R_2 R}{1 + SC \frac{R_2 R_4}{R_1} + S^2 C^2 R_2 R_4}$$

[Section105-4]

这是一个二阶椭圆滤波器。可知：

$$\omega_s = \frac{1}{C\sqrt{R_2 R}}; \quad f_s = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_2 R}}$$

[Section105-5a]

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_2R_4}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_2R_4}} \quad (\text{Section105-5b})$$

为将前述表达式写成标准式，则必须有：

$$C \frac{R_2R_4}{R_1} = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{C\sqrt{R_2R_4}}{Q}$$

即，

$$Q = \frac{R_1\sqrt{R_2R_4}}{R_2R_4} = \frac{R_1}{\sqrt{R_2R_4}} \quad (\text{Section105-5c})$$

$$A_m = -\frac{R_4}{R} = -\left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2 \quad (\text{Section105-5d})$$

据此，可将传函写为如下频域表达式：

$$A_{\text{ellip}}(j\omega) = \frac{U_{OUT}}{U_{IN}} = -\frac{R_4}{R} \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_s})^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = -\frac{R_4}{R} \times \frac{1 + (j\frac{f}{f_s})^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{f}{f_0} + (j\frac{f}{f_0})^2} \quad (\text{Section105-4a})$$

设计二阶椭圆滤波器—基于 Flsisher-Tow

f_s 、 f_0 、 Q 为已知，求解电阻 R 、 R_1 、 R_2 、 R_4 ，以及电容 C 。已知 3 个条件，求解 5 个未知量，因此有 2 个可以任意设定。按照一般规则，设定电容 C 和电阻 R 为已知，这可以参照此前一直采用的表 Section84-1，根据通带频率，选取合适的电容 C ，并据下式确定 R ：

$$R = \frac{1}{2\pi C f_0} \quad (\text{Section105-6})$$

根据式(Section105-5a)和式(Section105-5b)，得：

$$R_2 = \frac{1}{(2\pi C f_s)^2 R} \quad (\text{Section105-7})$$

$$R_4 = \frac{1}{(2\pi C f_0)^2 \frac{1}{(2\pi C f_s)^2 R}} = \left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2 R \quad (\text{Section105-8})$$

根据式(Section105-5c)，解得：

$$R_1 = Q\sqrt{R_2R_4} = Q\sqrt{\frac{1}{(2\pi C f_s)^2 R} \times \left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2 R} = \frac{Q}{2\pi C f_0} \quad (\text{Section105-9})$$

举例 3 :

电路如图 Section105-9 所示 (摘自 Analog Filter, Kendall Su), 求滤波器的关键参数。

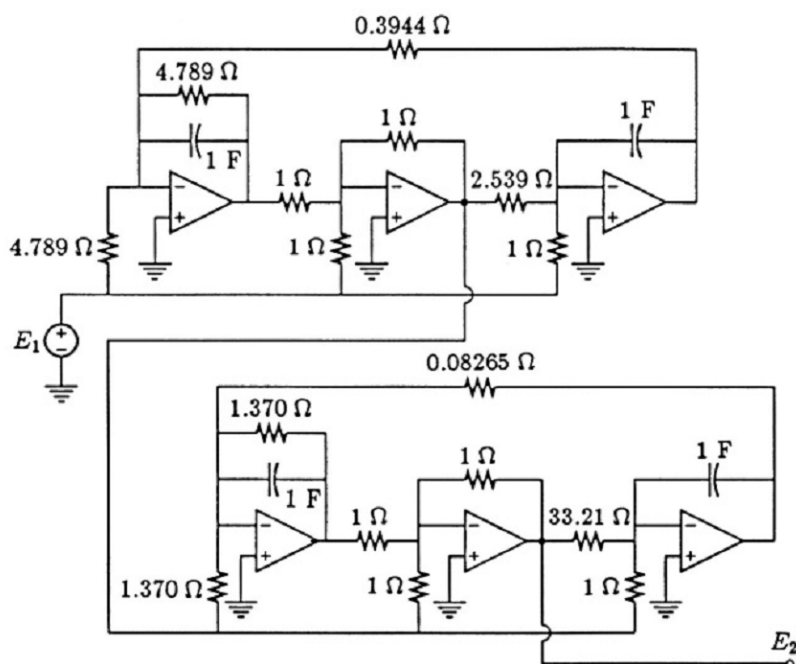


Figure 11.6: A normalized fourth-order lowpass elliptic filter.

图 Section105-9 举例 3 电路，基于 Fleischer-Tow 滤波器的 4 阶椭圆滤波器

解：这是一个基于 Fleischer-Tow 的 4 阶椭圆滤波器，按照图 Section105-8 对应阻容关系，可知：

$$\begin{aligned}\omega_{s1} &= \frac{1}{C\sqrt{R_2R}} = \frac{1}{\sqrt{0.3944 \times 1}} = 1.5923 \\ \omega_{01} &= \frac{1}{C\sqrt{R_2R_4}} = \frac{1}{\sqrt{0.3944 \times 2.539}} = 0.9993 \\ Q_1 &= \frac{R_1}{\sqrt{R_2R_4}} = \frac{4.789}{\sqrt{0.3944 \times 2.539}} = 4.786 \\ \omega_{s2} &= \frac{1}{C\sqrt{R_2R}} = \frac{1}{\sqrt{0.08265 \times 1}} = 3.4784 \\ \omega_{02} &= \frac{1}{C\sqrt{R_2R_4}} = \frac{1}{\sqrt{0.08265 \times 33.21}} = 0.6036 \\ Q_2 &= \frac{R_1}{\sqrt{R_2R_4}} = \frac{1.370}{\sqrt{0.08265 \times 33.21}} = 0.8269\end{aligned}$$

与表 Section105-2, 1dB 椭圆滤波器之 4 阶系数基本吻合。可知这是一个通带角频率为 1 的标准 4 阶椭圆滤波器。

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
4	0.999405403	4.785991359	1.592341989
	0.603557131	0.826816878	3.478406167

举例 4：

使用 Fleischer-Tow 滤波器结构，设计一个 5 阶椭圆低通滤波器，要求通带频率 200Hz，带内波动小于 0.5dB， $\omega_s/\omega_p=1.5$ 。用 TINA-TI 实施仿真并验证。

解：首先查到合适的系数表，为表 Section105-1，然后按照通带频率 200Hz，将表格中的 5 阶系数中的频率项均乘以 200，得下表：

n	f_{0i}	Q_i	f_{si}
5	1.01582182×200	6.21441916	1.557406392×200
	0.75895452×200	1.33094841	2.331875771×200
	0.42597073×200		

采用 2 级 Fleischer-Tow 滤波器，加一级有源低通滤波器，合并实现 5 阶。

对一阶低通来说，可知其特征频率为 $f_{00}=0.42597073 \times 200=85.194146\text{Hz}$ ，选择电容 C_0 为 $1\mu\text{F}$ ，则可计算出：

$$R_0 = \frac{1}{2\pi C_0 f_{00}} = \frac{1}{6.2832 \times 1 \times 10^{-6} \times 85.194146} = 1868.14\Omega$$

对第一级二阶 Fleischer-Tow 滤波器，将其下标设为 A，可知：

$$f_{0A}=1.01582182 \times 200=203.164364\text{Hz}, Q_A=6.21441916, f_{sA}=311.4812784\text{Hz}.$$

1) 选择电容 $C_A=330\text{nF}$ ，选择电阻 $R_A=1000\Omega$ 。

2) 根据式(Section105-7)、式(Section105-8)、式(Section105-9)分别计算得：

$$R_{2A}=2397\Omega; R_{4A}=2351\Omega; R_{1A}=14752\Omega.$$

对第二级二阶 Fleischer-Tow 滤波器，将其下标设为 B，可知：

$$f_{0B}=151.7909049\text{Hz}, Q_B=1.33094841, f_{sB}=466.3751541\text{Hz}.$$

3) 选择电容 $C_B=330\text{nF}$ ，选择电阻 $R_B=1000\Omega$ 。

4) 根据式(Section105-7)、式(Section105-8)、式(Section105-9)分别计算得：

$$R_{2B}=1069\Omega; R_{4B}=9440\Omega; R_{1B}=4229\Omega. \text{ 据此，绘制完整电路图，如图 Section105-10}$$

所示。运放选择 OPA350，正负 2.5V 供电。

完整的幅频特性如图 Section105-11 所示。粗略看，它的低频增益约为 27dB 左右，在 200Hz 处确实出现了非常明显的急剧跌落。大约在 300Hz 处为阻带频率，阻带增益约为 -25dB。这与我们的设计要求基本吻合。

为清晰显示通带情况，可对幅频特性的通带部分进行放大显示，得到图 Section105-12。

1) 通带内低频增益为 26.92dB，最小值为 26.42dB，两者相差 0.5dB，符合要求。

2) 按照谷值 26.42dB，找寻通带频率，为 200.01Hz。符合设计要求。

为清晰显示阻带情况，可对幅频特性的阻带部分进行放大显示，得到图 Section105-13。可以测得，阻带内最大增益为 -23.68dB。按照此值，找寻阻带频率，为 299.97Hz。它与通带频率之比为 1.499775，与设计要求 1.5 吻合。

至此，验证完毕，说明按此电路实现的椭圆滤波器符合设计要求。

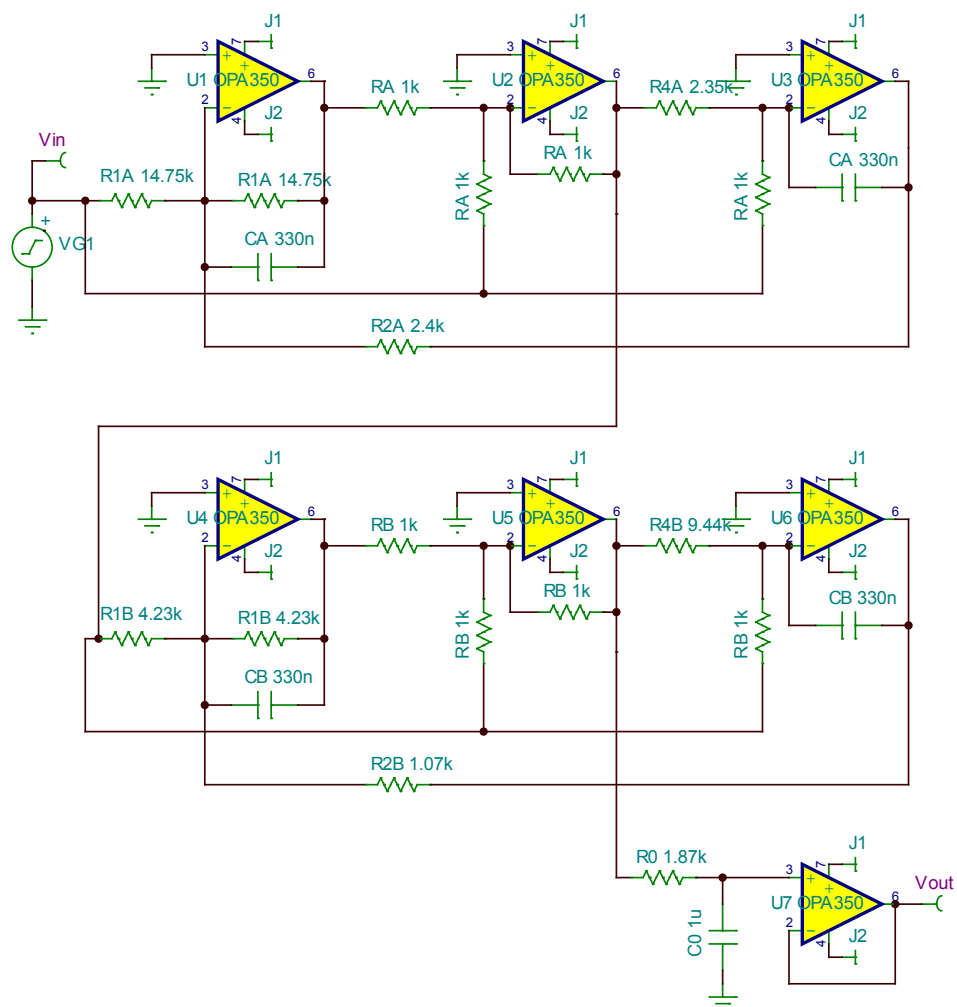


图 Section105-10 举例 4 电路，基于 Fleischer-Tow 滤波器的 5 阶椭圆滤波器

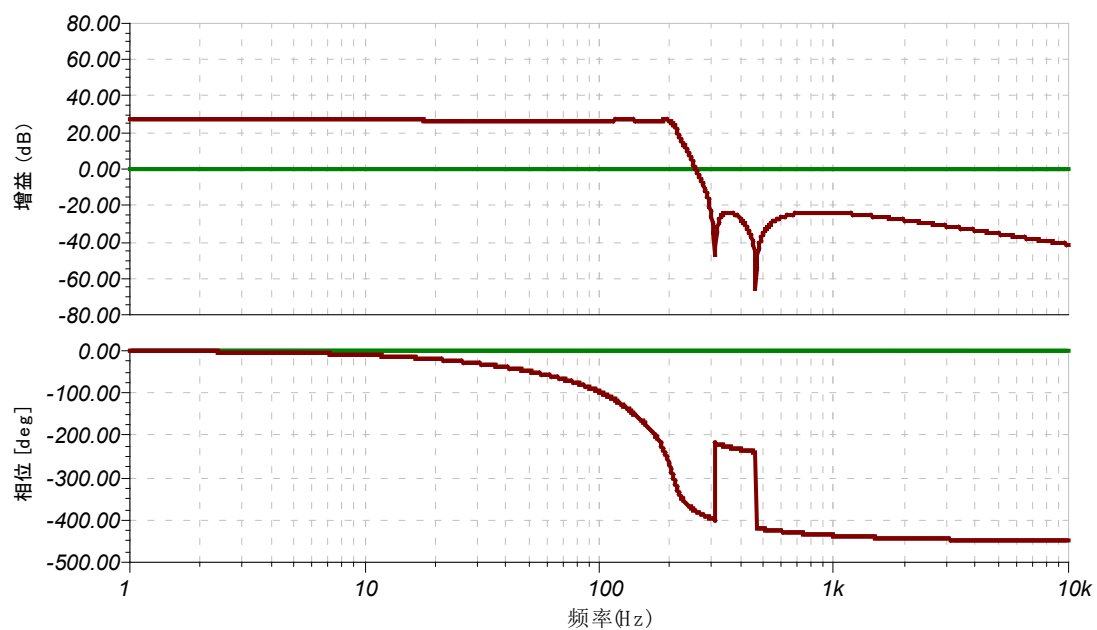


图 Section105-11 举例 4 幅频特性全图

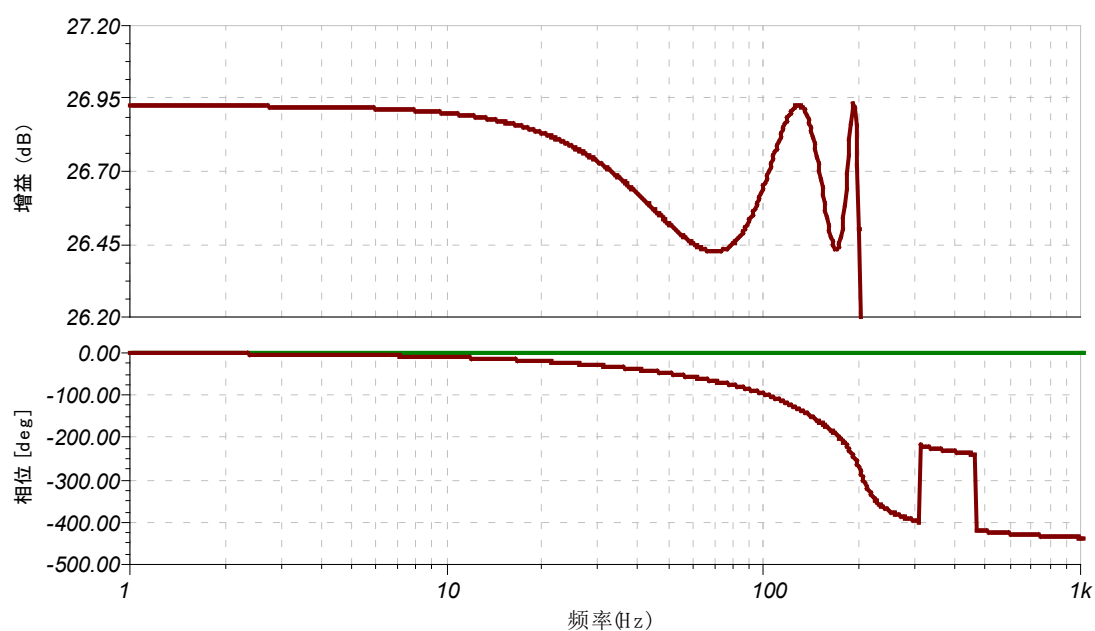


图 Section105-12 举例 4 幅频特性之通带部分

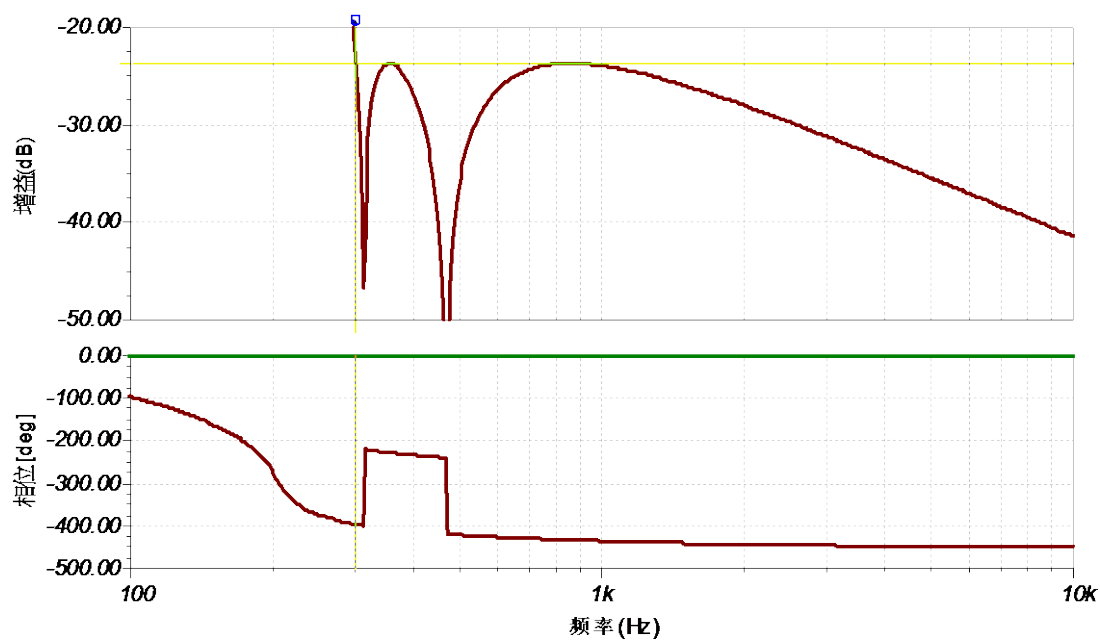


图 Section105-13 举例 4 幅频特性之阻带部分

椭圆高通滤波器

本节此前内容，均为低通滤波器。其实，椭圆滤波器也可以实现高通。实现方法非常简单，只要将系数表中的 Q 保持不变，而将两个频率系数均取倒数即可。

举例 5 :

使用 Fleischer-Tow 滤波器结构, 设计一个 5 阶椭圆高通滤波器, 要求通带频率 200Hz, 带内波动小于 0.5dB, $\omega_p/\omega_s=1.5$ 。用 TINA-TI 实施仿真并验证。

解: 此题与举例 4 的唯一区别在于将低通改为高通。

首先查到合适的系数表, 为表 Section105-1。由于要求是高通, 因此表内系数应做倒数处理, 如下表中的“倒数变换列”, 然后分别乘以 200 得到“200Hz 反归一化”列。

n	原始系数表			倒数变换		200Hz 反归一化	
	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}	$\omega_{0i\text{-new}}$	$\omega_{si\text{-new}}$	f_{0i}	f_{si}
5	1.01582182	6.21441916	1.557406392	1/1.01582182	1/1.557406392	196.8849	128.4186
	0.75895452	1.33094841	2.331875771	1/0.75895452	1/2.331875771	263.5204	85.7679
	0.42597073			1/0.42597073		469.5158	

采用 2 级 Fleischer-Tow 滤波器, 加一级有源高通滤波器, 合并实现 5 阶。

对一阶高通来说, 特征频率为 $f_{00}=469.5158\text{Hz}$, 选择电容 C_0 为 $1\mu\text{F}$, 则可计算出:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi C_0 f_{00}} = \frac{1}{6.2832 \times 1 \times 10^{-6} \times 469.5158} = 338.98\Omega$$

对二阶 Fleischer-Tow 滤波器, 无需更改电路结构, 仅需重新计算即可。

对第一级二阶 Fleischer-Tow 滤波器: $f_{0A}=196.8849\text{Hz}$, $Q_A=6.21441916$, $f_{sA}=128.4186\text{Hz}$ 。选择电容 $C_A=330\text{nF}$, 选择电阻 $R_A=1000\Omega$ 。根据式(Section105-7)、式(Section105-8)、式(Section105-9)分别计算得: $R_{2A}=14104\Omega$; $R_{4A}=425.4\Omega$; $R_{1A}=15223\Omega$ 。

对第二级二阶 Fleischer-Tow 滤波器: $f_{0B}=263.5204\text{Hz}$, $Q_B=1.33094841$, $f_{sB}=85.7679\text{Hz}$ 。选择电容 $C_B=330\text{nF}$, 选择电阻 $R_B=1000\Omega$ 。根据式(Section105-7)、式(Section105-8)、式(Section105-9)分别计算得: $R_{2B}=31620\Omega$; $R_{4B}=105.9\Omega$; $R_{1B}=2436\Omega$ 。据此, 绘制完整电路图, 如图 Section105-14 所示。运放选择 OPA350, 正负 2.5V 供电。

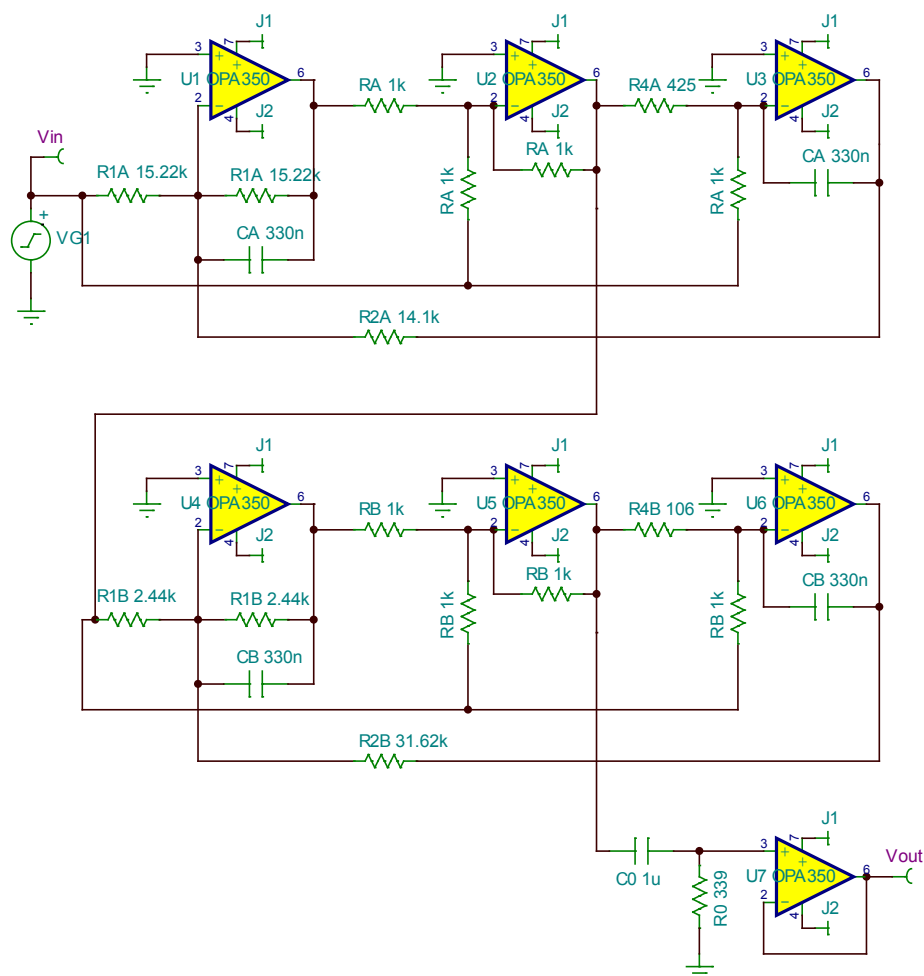


图 Section105-14 举例 5 电路，基于 Fleischer-Tow 滤波器的 5 阶高通椭圆滤波器

完整的幅频特性如图 Section105-15 所示。可以看出，它是一个高通滤波器效果，与低通电路效果刚好镜像对称。为了验证通带频率和通带波动，得到通带放大图，如图 Section105-16 所示。从图中测得，通带最小增益为-500.24mdB，最大增益为 31.61mdB，波动为 531.85mdB，与设计要求的 0.5dB 基本吻合。按照最小增益找到通带频率，为 199.95Hz，与设计要求的 200Hz 基本吻合。

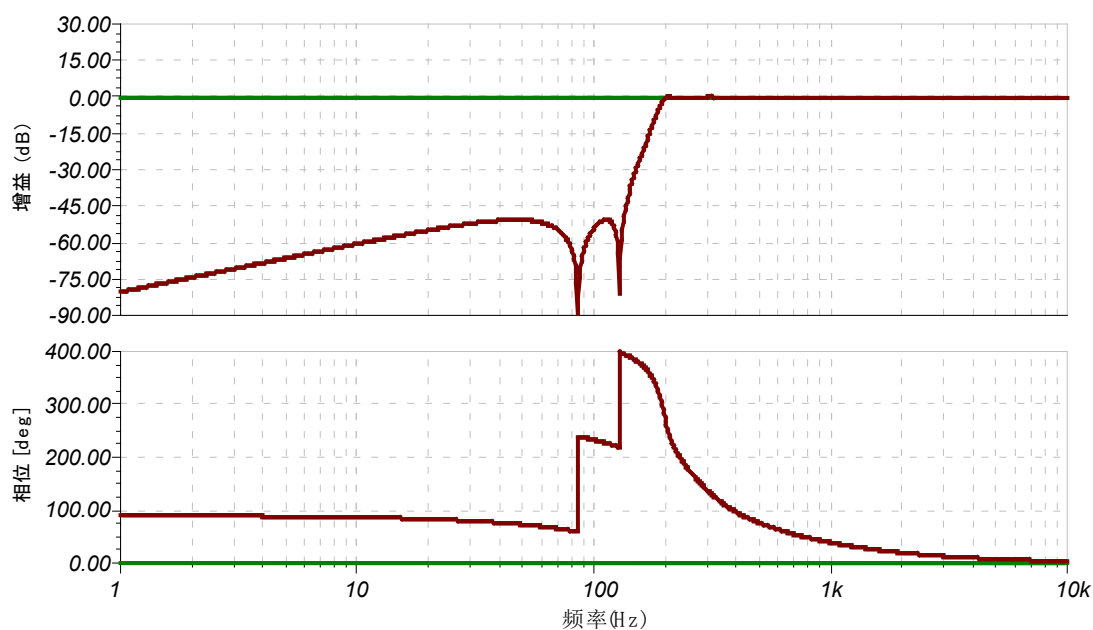


图 Section105-15 举例 5 电路幅频特性全图

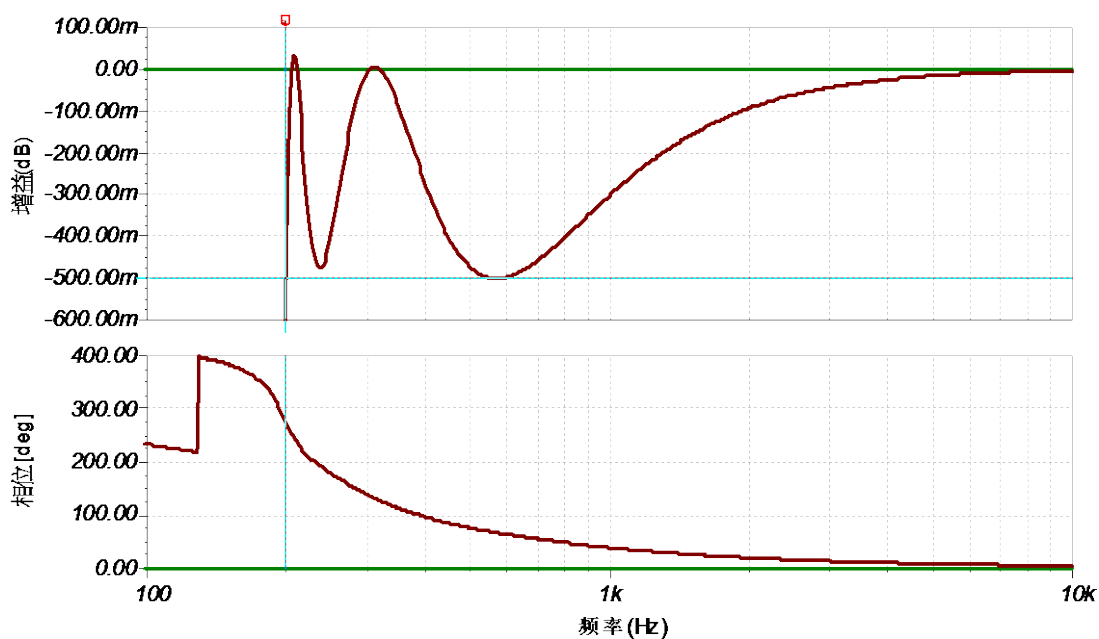


图 Section105-16 举例 5 电路幅频特性之通带部分

为了验证阻带频率，获得阻带放大如图 Section105-17 所示。测得阻带最大增益为-50.61dB，按照阻带最大增益找到阻带频率，为 133.37Hz。

通带频率除以阻带频率，为 $199.95/133.37=1.499213$ ，与设计要求 1.5 基本吻合。

需要特别注意，用 Fleischer-Tow 实现的椭圆高通滤波器，具有中途受阻现象。

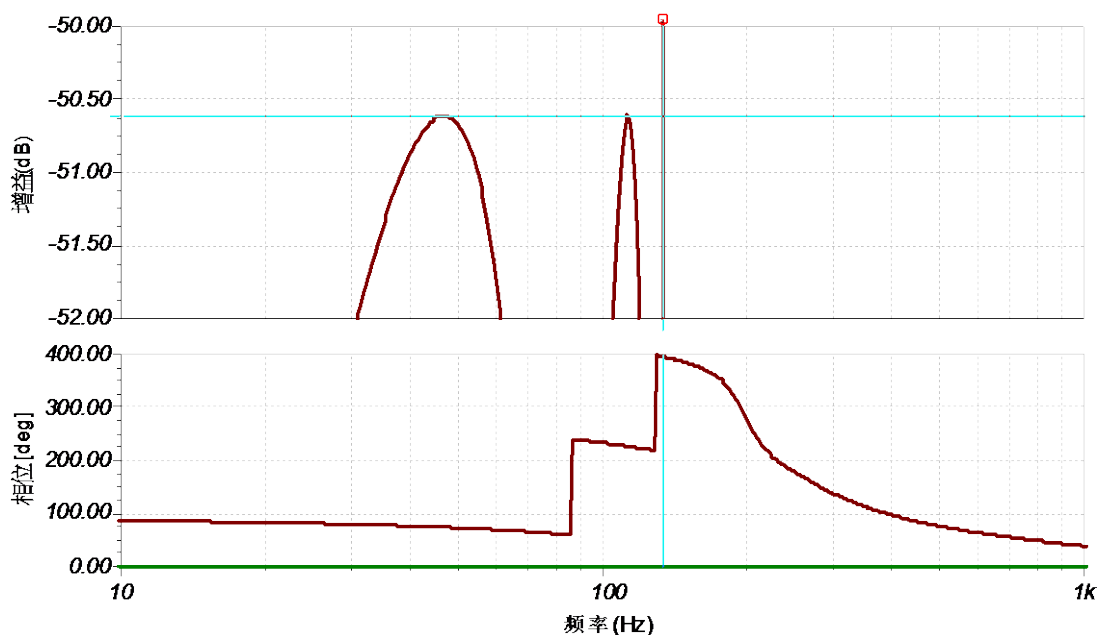


图 Section105-17 举例 5 电路幅频特性之阻带部分

用 Bainter 滤波器实现的椭圆滤波器

图 Section100-6 是 Bainter 滤波器，其传函为：

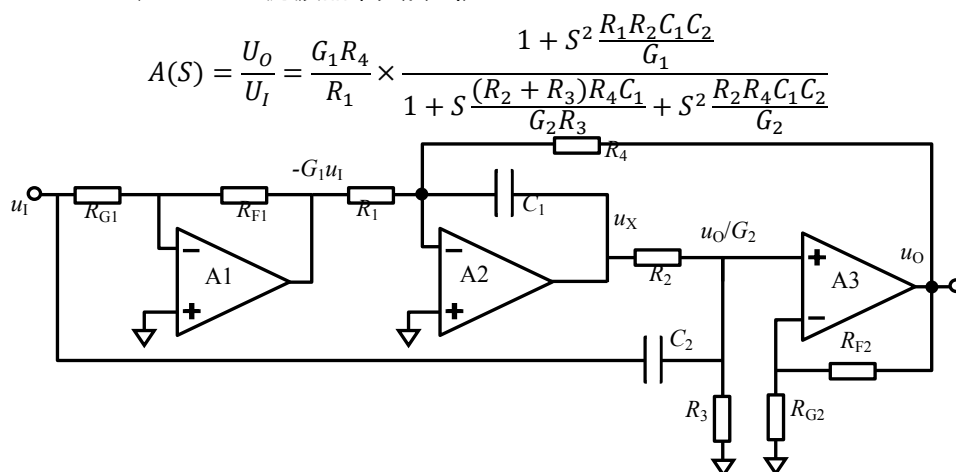


图 Section100-6 Bainter 陷波器

写成频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = \frac{G_1 R_4}{R_1} \times \frac{1 + (j\omega)^2 \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{G_1}}{1 + j\omega \frac{(R_2 + R_3) R_4 C_1}{G_2 R_3} + (j\omega)^2 \frac{R_2 R_4 C_1 C_2}{G_2}} = A_m \times \frac{1 + (j \frac{\omega}{\omega_s})^2}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section105-10})$$

其中：

$$\omega_s = \sqrt{\frac{G_1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}; \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (\text{Section105-11})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_2}{R_4 R_2 C_1 C_2}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_2}{R_4 R_2 C_1 C_2}}$$

[Section105-12]

$$Q = \frac{G_2 R_3 \sqrt{\frac{R_2 R_4 C_1 C_2}{G_2}}}{(R_2 + R_3) R_4 C_1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \sqrt{G_2 \times \frac{R_2}{R_4} \times \frac{C_2}{C_1}}$$

[Section105-13]

$$A_m = \frac{G_1 R_4}{R_1}$$

[Section105-14]

据此可知，通过设定电阻、电容，可以实现任意系数的椭圆滤波器。当频率趋于无穷大时，增益为：

$$|A(j\infty)| = A_m \times \left(\frac{f_0}{f_s}\right)^2$$

[Section105-14a]

设计二阶椭圆滤波器——基于 Bainter 滤波器

设计 Bainter 型椭圆滤波器，其实就是设计二阶低通型或者高通型陷波器。

为了减少设计分叉，一般将电阻 R_2 和 R_3 和选为相等。

已知低频增益 A_m 、 f_s 、 f_0 和 Q ，设计合适的椭圆滤波器。

首先根据 f_0 ，参考表 Section84-1，选择合适的电容 C_1 （取较小值）。然后根据 Q 值，选择电容比 k_c ，一般为 1 倍或者 10 倍，100 倍。这样购买难度小些。

$$C_2 = k_c C_1$$

[Section105-15]

根据式(Section105-11)、(Section105-12)得：

$$\frac{R_1 R_2}{G_1} = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C_1 C_2} \quad (1)$$

$$\frac{R_4 R_2}{G_2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} \quad (2)$$

将式(2)和式(1)相除得：

$$\frac{R_4}{R_1} \times \frac{G_1}{G_2} = \frac{f_s^2}{f_0^2}$$

将式(Section105-14)代入，解得：

$$G_2 = A_m \frac{f_0^2}{f_s^2}$$

[Section105-16]

根据式(Section105-16)结果，自行选择合适的电阻 R_{F2} 和 R_{G2} ，实现此 G_2 。

特别注意，为保证 $G_2 \geq 1$ ，有下式约束：

$$A_m \geq \frac{f_s^2}{f_0^2}$$

[Section105-16a]

考虑式(Section105-14a)，有：

$$|A(j\infty)| = A_m \times \left(\frac{f_0}{f_s}\right)^2 \geq 1$$

[Section105-16b]

即，基于 Bainter 的椭圆滤波器，在高频时增益总是大于等于 1 的，无论低通还是高通。

据式(2)，解得：

$$R_4 R_2 = \frac{G_2}{4\pi^2 f_0^2 C_1 C_2} = \frac{A_m}{4\pi^2 f_s^2 C_1 C_2} \quad (3)$$

又据 $R_3 = R_2$ ，代入式(Section105-13)

$$Q = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \sqrt{G_2 \times \frac{R_2}{R_4} \times \frac{C_2}{C_1}} = 0.5 \sqrt{G_2 \times \frac{R_2}{R_4} \times \frac{C_2}{C_1}}$$

$$\frac{R_2}{R_4} = \frac{4Q^2 C_1}{C_2 G_2} \quad (4)$$

式(3)式(4)相乘得：

$$R_2^2 = \frac{Q^2 A_m}{G_2} \times \frac{1}{\pi^2 f_s^2 C_2^2} = \frac{Q^2}{\pi^2 f_0^2 C_2^2}$$

即

$$R_2 = \frac{Q}{\pi f_0 C_2}$$

(Section105-17)

据式(2)，并将式(Section105-17)代入得：

$$R_4 = \frac{A_m}{4\pi^2 f_s^2 C_1 C_2 R_2} = \frac{A_m f_0}{4\pi f_s^2 C_1 Q}$$

(Section105-18)

据式(1)得：

$$\frac{R_1}{G_1} = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C_1 C_2 R_2}$$

可以任选 G_1 ，则有：

$$R_1 = \frac{G_1}{4\pi^2 f_s^2 C_1 C_2 R_2} = \frac{G_1 f_0}{4\pi f_s^2 C_1 Q}$$

(Section105-19)

根据任选的 G_1 ，自行选择电阻 R_{F1} 和 R_{G1} ，实现此 G_1 。

举例 6：

使用 Bainter 滤波器结构，设计一个 2 阶椭圆低通滤波器，要求通带频率 1000Hz，通带增益 10 倍，带内波动小于 0.5dB， $\omega_s/\omega_p=1.5$ 。用 TINA-TI 实施仿真并验证。

解：首先根据椭圆滤波器系数表，选择表 Section105-1。从中找到 2 阶块，提取系数并将其换算成特征频率、品质因数、零点频率，如下表所示。

原始系数表				1000Hz 反归一化	
n	ω_{oi}	Q_i	ω_{si}	f_{oi}	f_{si}
2	1266172532	1.227465583	1.981678829	1266.172532	1981.678829

至此可知， $A_m=10$ ， $f_s=1981.7\text{Hz}$ 、 $f_0=1266.2\text{Hz}$ ， $Q=1.2275$ 。

其次进入滤波器设计。

1) Q 值较小，无需选择较大的电容比，也无需选择较小电容。因此，确定电容比为 1，两个电容分别为： $C_1=C_2=100\text{nF}$ 。

2) 根据式(Section105-16), 计算得:

$$G_2 = A_m \frac{f_0^2}{f_s^2} = 10 \times \frac{1266.2^2}{1981.7^2} = 4.082$$

此值用于确定增益电阻。选择 $R_{G2}=1k\Omega$, 则:

$$R_{F2} = (G_2 - 1)R_{G2} = 3.082k\Omega$$

3) 根据式(Section105-17), 计算得:

$$R_2 = \frac{Q}{\pi f_0 C_2} = \frac{1.2275}{3.14159 \times 1266.2 \times 100 \times 10^{-9}} = 3085.8\Omega$$

4) 根据式(Section105-18), 计算得:

$$R_4 = \frac{A_m f_0}{4\pi f_s^2 C_1 Q} = \frac{10 \times 1266.2}{4 \times 3.14159 \times 1981.7^2 \times 100 \times 10^{-9} \times 1.2275} = 2090.3\Omega$$

5) 选择 $G_1=1$, 根据式(Section105-19), 计算得:

$$R_1 = \frac{G_1 f_0}{4\pi f_s^2 C_1 Q} = \frac{1 \times 1266.2}{4 \times 3.14159 \times 1981.7^2 \times 100 \times 10^{-9} \times 1.2275} = 209.03\Omega$$

在我看来, 这个电阻有点小, 会导致运放 A1 吐出电流可能较大。可以重来, 将 $G_1=10$, 则:

$$R_1 = \frac{G_1 f_0}{4\pi f_s^2 C_1 Q} = \frac{10 \times 1266.2}{4 \times 3.14159 \times 1981.7^2 \times 100 \times 10^{-9} \times 1.2275} = 2090.3\Omega$$

这样, 在 $G_1=10$ 情况下, 可选增益电阻 $R_{G1}=1k\Omega$, 则:

$$R_{F1} = G_1 \times R_{G1} = 10k\Omega$$

至此, 设计完毕。

第三, 开始仿真验证。根据上述计算, 在 TINA-TI 中搭建电路如图 Section105-18 所示。获得的幅频特性如图 Section105-19 所示。

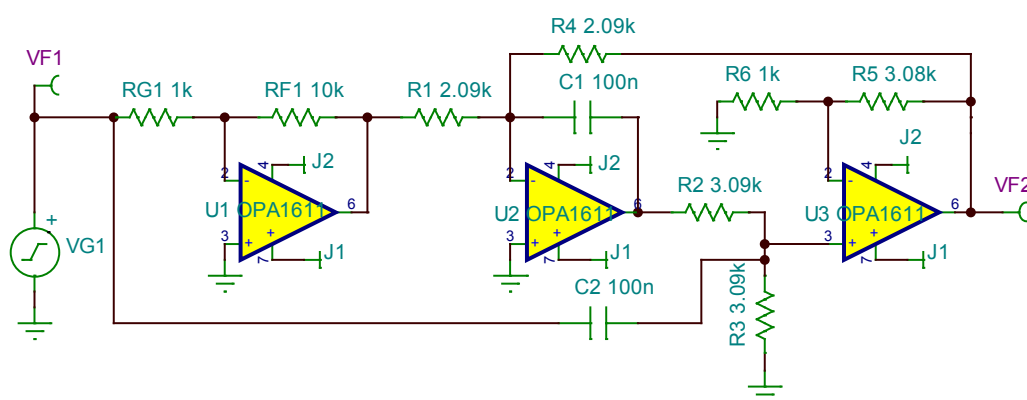


图 Section105-18 举例 6 电路, 基于 Bainter 的 2 阶低通椭圆滤波器

测量结果如下:

1) $A_{10Hz}=20dB$, $A_{100kHz}=12.21dB$ 。理论估算:

$$A_{0Hz}=A_m=10 \text{ 倍}=20dB,$$

$$|A(j\omega)| = A_m \times \left(\frac{f_0}{f_s}\right)^2 = 4.082435 \text{ 倍} = 12.22dB$$

此测量结果与估算基本吻合。

2) 从幅频特性图可以测得——如图中交叉线——阻带频率 f_s 为 15kHz。为清晰显示通带波动和通带频率, 放大幅频特性通带部分, 如图 Section105-20 所示。可以看出, 其最大增益为 20.5dB, 最小增益为 20.0dB, 波动确实为 0.5dB。按照最小增益找寻通带频率, 如图中的交叉线, 测得通带频率 f_p 为 999.86Hz。

据此可知， $\omega_s/\omega_p=f_s/f_p=1.50021$ ，与设计要求基本吻合。

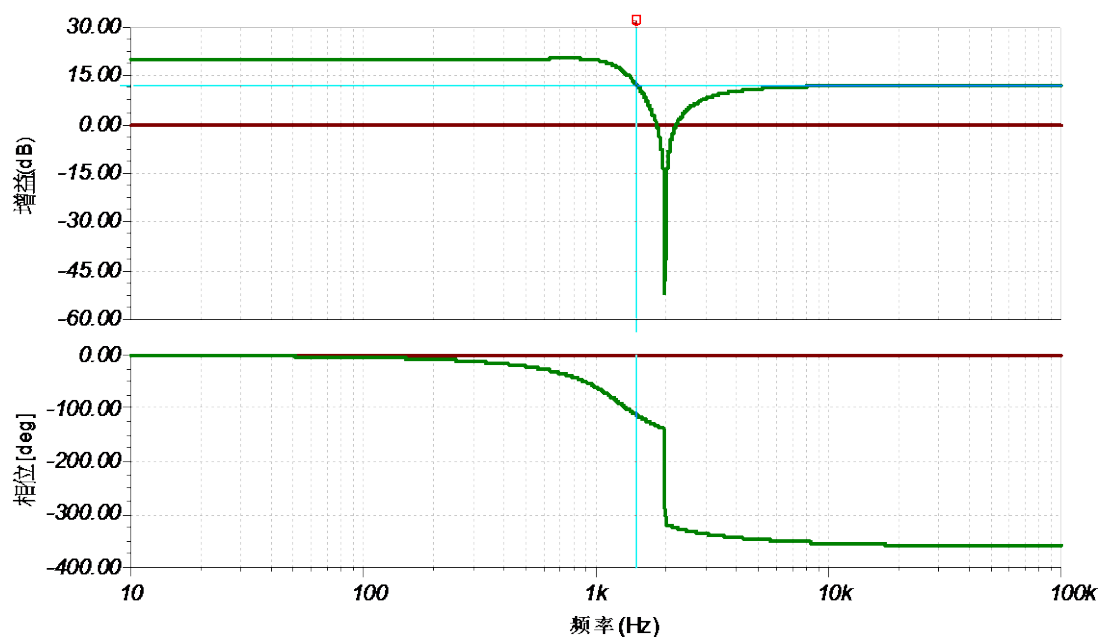


图 Section105-19 举例 6 电路的幅频特性全图

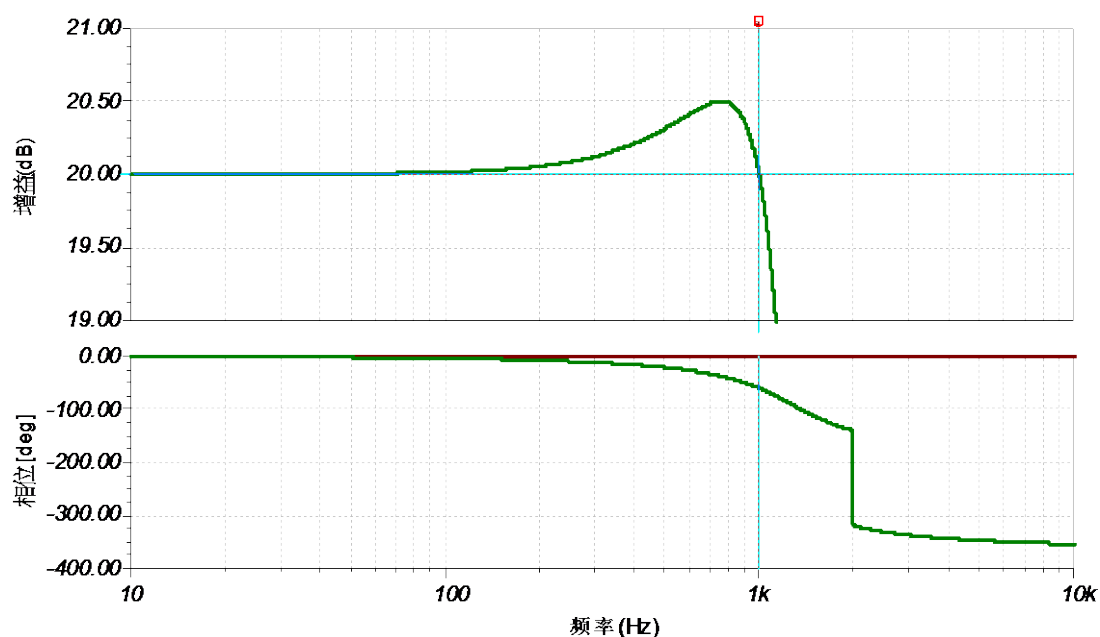


图 Section105-20 举例 6 电路的幅频特性之通带部分

举例 7：

使用 Bainter 滤波器结构，设计一个 2 阶椭圆高通滤波器，要求通带频率 1000Hz，低频端增益 1 倍，带内波动小于 0.5dB， $\omega_p/\omega_s=1.5$ 。用 TINA-TI 实施仿真并验证。

解：此例与举例 6 的区别在于，将低通换成了高通，且 $A_m=1$ 。

首先根据椭圆滤波器系数表，选择表 Section105-1。从中找到 2 阶块，提取系数并将其换算成特征频率、品质因数、零点频率，如下表所示。

n	原始系数表			倒数变换		1000Hz 反归一化	
	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}	$\omega_{0i\text{-new}}$	$\omega_{si\text{-new}}$	f_{0i}	f_{si}
2	1.266172532	1.227465583	1.981678829	1/1.266172532	1/1.981678829	789.7818	504.6226

至此可知， $A_m=1$ ， $f_s=504.62\text{Hz}$ ， $f_0=789.78\text{Hz}$ ， $Q=1.2275$ 。据此要求，采用与举例 6 完全相同的方法，可以获得如下设计结果：

$C_1=C_2=100\text{nF}$ 。 $G_2=2.449$ ， $R_{G2}=1\text{k}\Omega$ ， $R_{F2}=1.449\text{k}\Omega$ 。 $R_2=R_3=4947\Omega$ ， $R_4=2011\Omega$ 。选择 $G_1=1$ ， $R_1=2011\Omega$ ， $R_{G1}=1\text{k}\Omega$ ， $R_{F1}=1\text{k}\Omega$ 。电路如图 Section105-21。仿真结果如图 Section105-22 所示。

测量结果为：1) $A_{10\text{Hz}}=-2.51\text{dB}$ ， $A_{100\text{kHz}}=7.78\text{dB}$ 。
2) 阻带频率 f_s 为 666.74Hz 。通带内最大增益为 8.28dB ，最小增益为 7.78dB ，波动 0.5dB 。通带频率 f_p 为 1kHz 。据此可知， $\omega_p/\omega_s=f_p/f_s=1.499835$ ，与设计要求基本吻合。

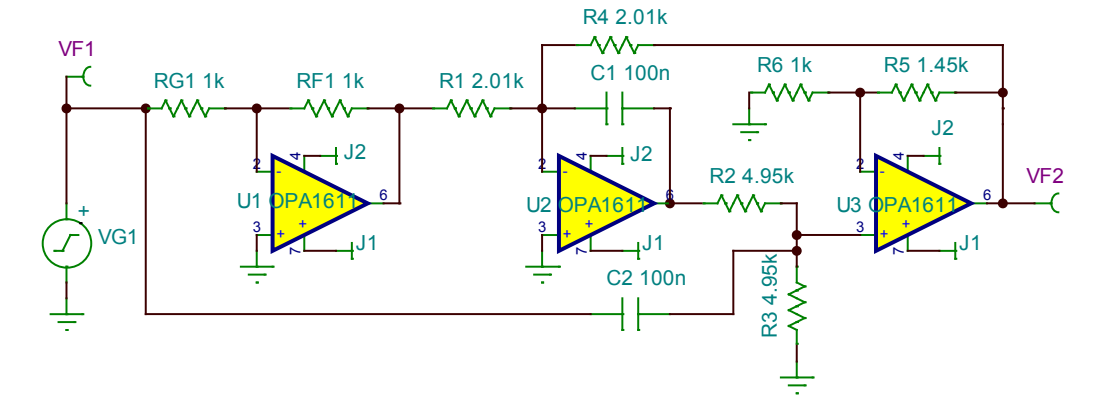


图 Section105-21 举例 7 电路

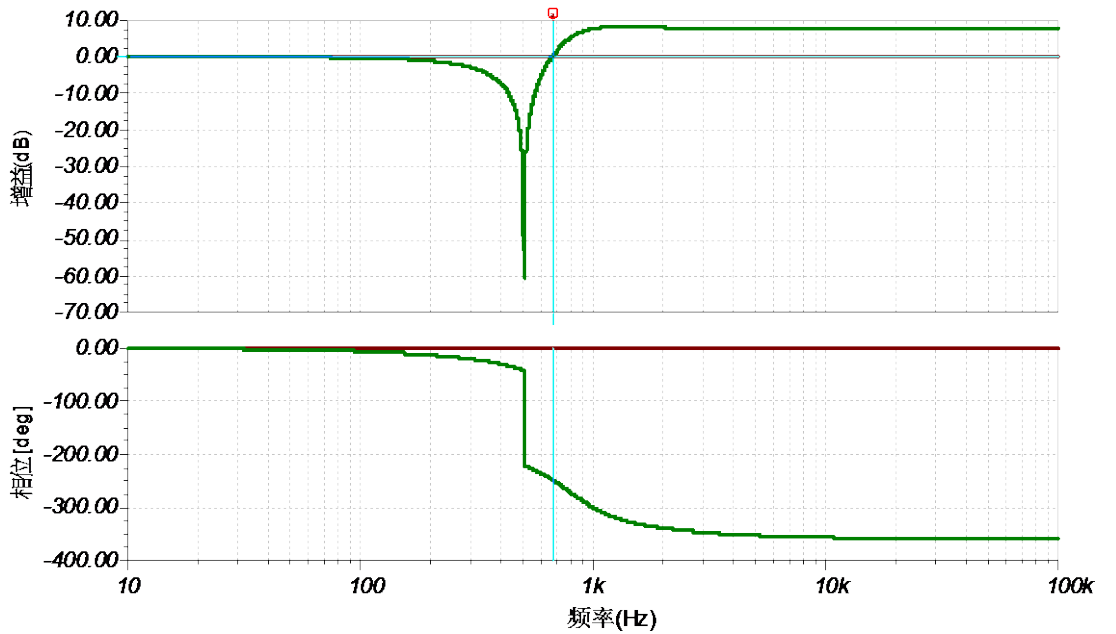


图 Section105-22 举例 7 电路的幅频特性全图

优化基于 Bainter 滤波器的椭圆滤波器

无论低通，还是高通，最好将 $|A(j\infty)|$ 设为 1。为什么呢？

先说高通，我们当然希望高频处的通带增益为 1，而低频处的阻带具有很强的衰减。这也是标准滤波器的最佳表达。

再说低通，在低频通带具有增益，高频阻带也有增益，都是大于等于 1 的，我们当然不希望哪些即将被滤除的信号，也有大于 1 的增益，只要让阻带增益变成最小，也就是 1。

在这种情况下，我们看式(Section105-16)，和式(Section105-14a)，发现，无穷大频率处的增益 $|A(j\infty)|$ ，就是 G_2 。因此，优化设计的核心，是将 G_2 设为 1。于是，优化后的电路图演变成图 Section105-18。

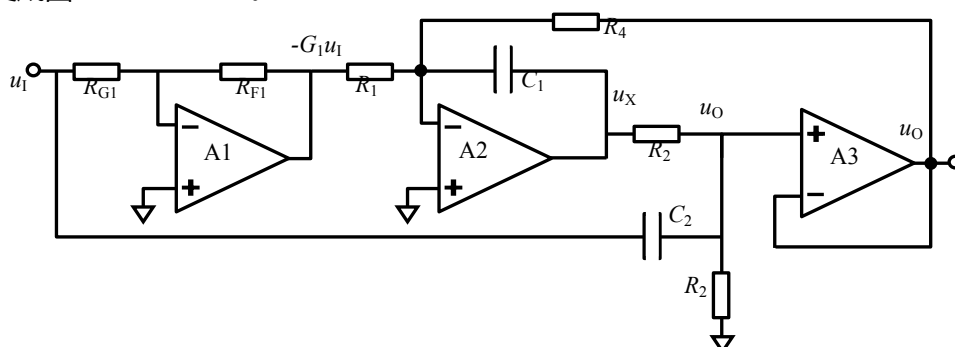


图 Section105-18 基于 Bainter 陷波器的椭圆滤波器

据式(Section105-16)得：

$$G_2 = A_m \frac{f_0^2}{f_s^2} = 1$$

则有：

$$A_m = \frac{f_s^2}{f_0^2}$$

(Section105-20)

此后的设计方法与前述方法完全相同。

基于 Bainter 变形滤波器的椭圆滤波器

图 Section105-19 电路，与 Bainter 滤波器非常像，称为 Bainter 变形电路。

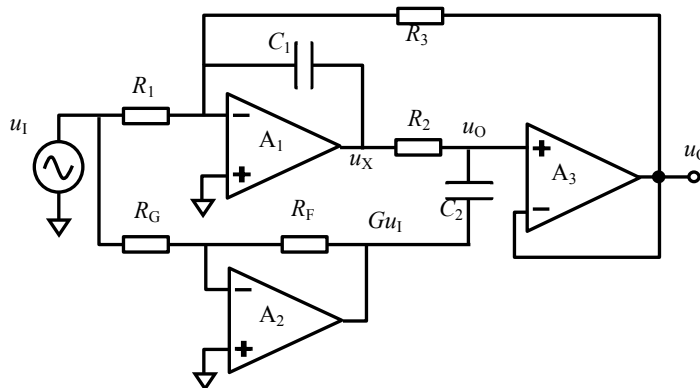


图 Section105-19 基于 Bainter 变形陷波器的椭圆滤波器

对运放 A1 的负输入端列出电流方程，可以解出 u_X ：

$$U_X = -\left(\frac{U_I}{R_1} + \frac{U_O}{R_3}\right) \frac{1}{SC_1} \quad (5)$$

对 R_2 、 C_2 的串联分压，也可以解出 u_X ：

$$\begin{aligned} U_X &= GU_I + (U_O - GU_I)SC_2(R_2 + \frac{1}{SC_2}) = GU_I + (U_O - GU_I)(1 + SC_2R_2) \\ &= GU_I + U_O - GU_I + SC_2R_2U_O - SC_2R_2GU_I = U_O(1 + SC_2R_2) - SC_2R_2GU_I \end{aligned} \quad (6)$$

其中：

$$G = -\frac{R_F}{R_G} \quad (\text{Section105-21})$$

式(5)、(6)相等，得：

$$(1 + SR_2C_2)U_O - SR_2C_2GU_I = -\left(\frac{U_I}{R_1} + \frac{U_O}{R_3}\right) \frac{1}{SC_1}$$

上式仅是 u_I 和 u_O 的关系，可以化简并求解出：

$$\begin{aligned} SC_1R_1R_3(1 + SR_2C_2)U_O - S^2C_1C_2R_1R_3R_2GU_I &= -R_3U_I - R_1U_O \\ (R_1 + SC_1R_1R_3(1 + SR_2C_2))U_O &= (S^2C_1C_2R_1R_3R_2G - R_3)U_I \\ A(S) = \frac{U_O}{U_I} &= \frac{S^2C_1C_2R_1R_3R_2G - R_3}{R_1 + SC_1R_1R_3(1 + SR_2C_2)} = -\frac{R_3}{R_1} \times \frac{1 - S^2C_1C_2R_1R_2G}{1 + SC_1R_3 + S^2C_1C_2R_2R_3} \end{aligned}$$

将其写成频域表达式为：

$$\dot{A}(j\omega) = -\frac{R_3}{R_1} \times \frac{1 + (j\omega)^2C_1C_2R_1R_2(-G)}{1 + j\omega C_1R_3 + (j\omega)^2C_1C_2R_2R_3} = A_m \times \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_s})^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (\text{Section105-22})$$

其中：

$$A_m = -\frac{R_3}{R_1} \quad (\text{Section105-22a})$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_2R_3}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_1C_2R_2R_3}} \quad (\text{Section105-23})$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 C_1 R_3} = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_2 R_3}}{C_1 R_3} = \sqrt{\frac{C_2 R_2}{C_1 R_3}} \quad (\text{Section105-24})$$

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{-GC_1C_2R_1R_2}}; \quad f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{-GC_1C_2R_1R_2}} \quad (\text{Section105-25})$$

设计 Bainter 变形滤波器的方法

已知 A_m 、 f_s 、 f_0 和 Q ，设计合适的椭圆滤波器。共 4 个已知量，现存 5 个电阻、2 个电容未知，因此可以确定 3 个阻容元件参数。

先确定电容 $C_1=C_2=C$ ，再确定 R_F ，依序求解 R_3 、 R_2 、 R_G 、 R_1 ，分析方法为：

根据式(Section105-24)，得：

$$R_2 = Q^2 R_3 \quad (\text{Section105-26})$$

根据式(Section105-23)，得：

$$R_2 R_3 = \frac{1}{4\pi^2 C^2 f_0^2} \quad (8)$$

将式(Section105-26)代入式(8)，得：

$$Q^2 R_3 R_3 = \frac{1}{4\pi^2 C^2 f_0^2}$$

即：

$$R_3 = \frac{1}{2\pi C f_0 Q} \quad (\text{Section105-27})$$

根据式(Section105-22a)，得：

$$R_1 = -\frac{R_3}{A_m} \quad (\text{Section105-28})$$

根据式(Section105-25)解得：

$$-G = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C^2 R_1 R_2} = \frac{R_F}{R_G}$$

即，

$$R_G = 4\pi^2 f_s^2 C^2 R_1 R_2 R_F \quad (\text{Section105-29})$$

举例 8：

使用 Bainter 变形滤波器结构，设计一个 2 阶椭圆低通滤波器，要求通带频率 1000Hz，通带增益-10 倍，带内波动小于 0.5dB， $\omega_s/\omega_p=1.5$ 。用 TINA-TI 实施仿真并验证。

解：首先根据椭圆滤波器系数表，选择表 Section105-1。从中找到 2 阶块，提取系数并将其换算成特征频率、品质因数、零点频率，如下表所示。

原始系数表				1000Hz 反归一化	
n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}	f_{0i}	f_{si}
2	1.266172532	1.227465583	1.981678829	1266.172532	1981.678829

至此可知， $A_m=-10$ ， $f_s=1981.7\text{Hz}$ ， $f_0=1266.2\text{Hz}$ ， $Q=1.2275$ 。

1) 确定电容分别为： $C_1=C_2=C=100\text{nF}$ 。确定电阻 $R_F=1000\Omega$ 。

2) 根据式(Section105-27)

$$R_3 = \frac{1}{2\pi C f_0 Q} = \frac{1}{6.2832 \times 100 \times 10^{-9} \times 1266.2 \times 1.2275} = 1023.99\Omega$$

3) 根据式(Section105-26)

$$R_2 = Q^2 R_3 = 1.2275^2 \times 1029.99 = 1542.9\Omega$$

4) 根据式(Section105-28)

$$R_1 = -\frac{R_3}{A_m} = 102.399\Omega$$

5) 根据式(Section105-29)

$$R_G = 4\pi^2 f_s^2 C^2 R_1 R_2 R_F = 244.945\Omega$$

据此，设计的仿真电路如图 Section105-20 所示，其仿真频率特性如图 Section105-21 所示。测量结果表明，仿真结果与设计要求基本吻合。

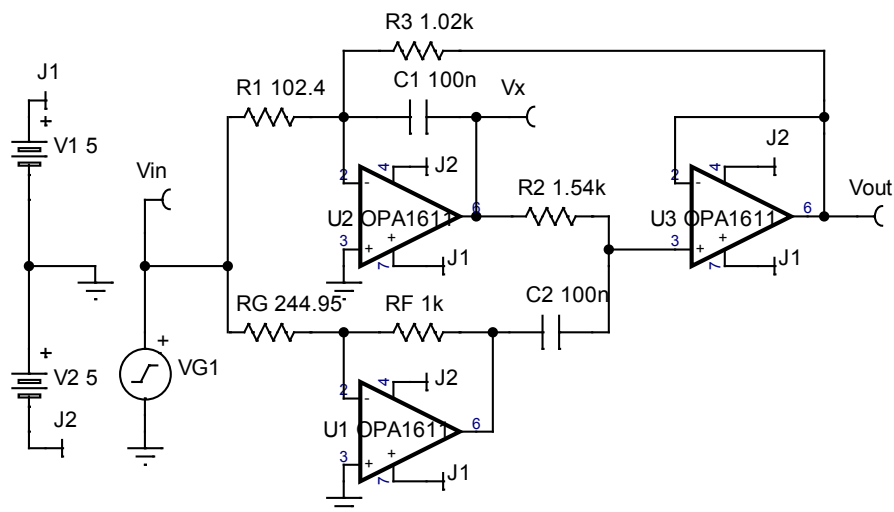


图 Section105-20 举例 8 电路，基于 Bainter 变形椭圆滤波器

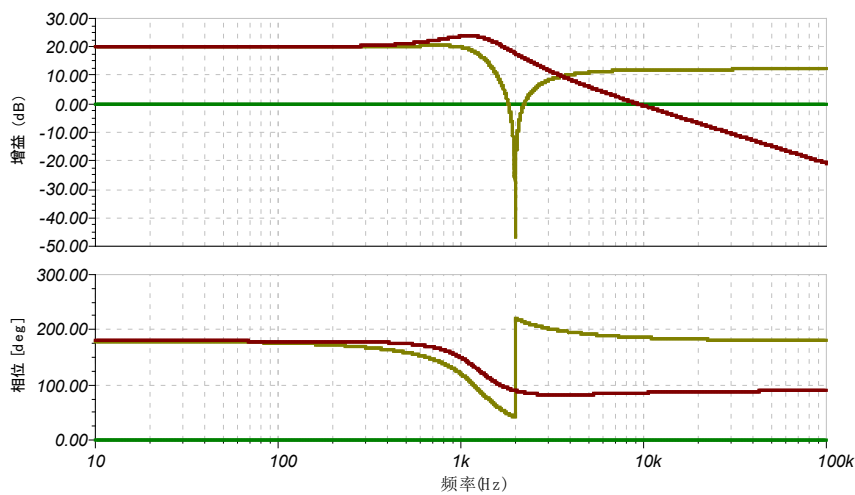


图 Section105-21 举例 8 电路的仿真频率特性

举例 9：

使用 Bainter 变形滤波器结构，设计一个 5 阶椭圆低通滤波器，服务于心电信号去除 50Hz 工频干扰。要求以 50Hz 为第一个 0 点，尽量少伤害小于 50Hz 的信号。通带增益-1 倍，带内波动小于 1dB。用 TINA-TI 实施仿真并验证。

解：我们手里有 4 张表格（表 Section105-1~4），本例要求滤波效果尽量接近于砖墙，只有这样才能保证对 50Hz 以下信号的伤害最小。表 Section105-4 的阻带衰竭不强，更易满足前述要求——所有效果都是权衡，没有那种又像砖墙，阻带衰竭又严重的。

在表 Section105-4 中查到 5 阶系数如下：

n	ω_{0i}	Q_i	ω_{si}
5	1.00087785	14.80243875	1.117140551
	0.83307313	2.073148828	1.468826433
	0.45056343		

强制让第一级的 $f_s=50\text{Hz}$ ，则 50Hz 处一定存在零点。以此对表格中频率量进行去归一化， $f_{\text{new}}=\omega_{\text{old}}\times 50/1.117140551$ ，得到下表。

n	f_{0i}	Q_i	f_{si}
5	44.79641568	14.80243875	50
	37.28595876	2.073148828	65.74044922
	20.16592405		

按照举例 8 中给出的方法，根据上表中第一行、第二行数据，对第一级、第二级椭圆滤波器实施单独计算，不赘述过程。对最后一级一阶低通，选择电容为 $1\mu\text{F}$ ，可得：

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{6.2832 \times 20.1659 \times 1 \times 10^{-6}} = 7896.2\Omega$$

据此得到设计电路如图 Section105-22 所示。

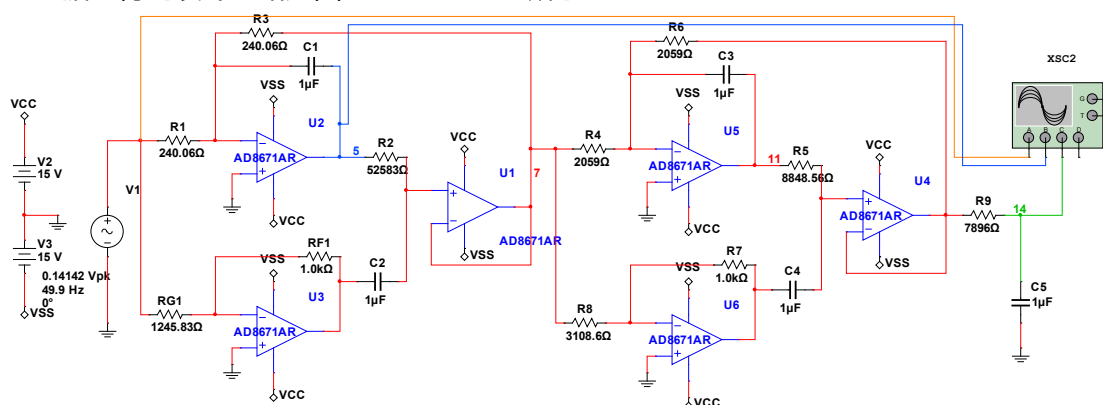


图 Section105-22 举例 9 电路

仿真的频率特性如图 Section105-23 所示。可见在 50Hz 处具有极高的抑制能力。

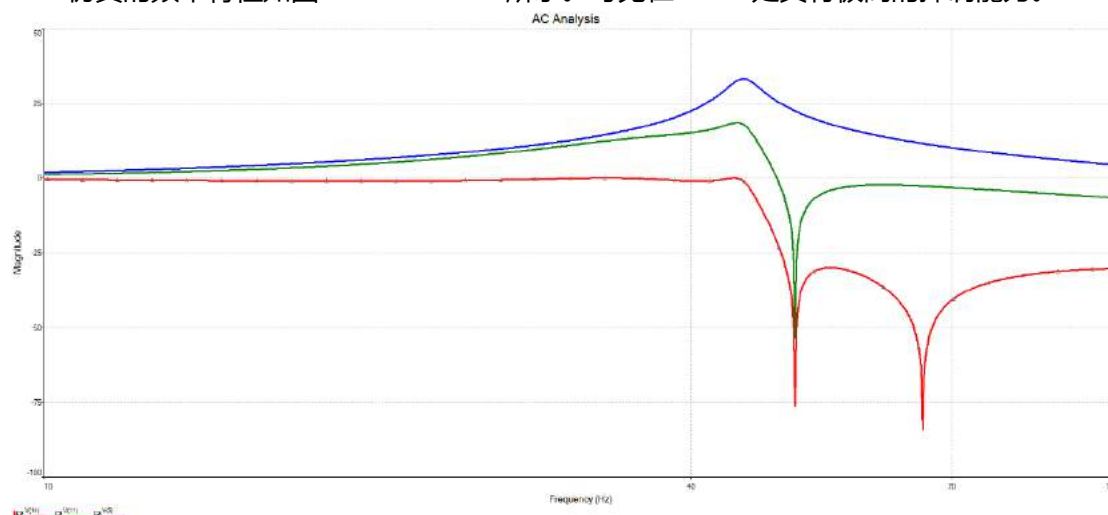


图 Section105-23 举例 9 电路仿真频率特性

从幅频特性可看出，蓝色的 V5 即电路中 U2 运放的输出端，在 45Hz 处具有 33.08dB 的增益，这就会产生所谓的中途受限现象，它直接限制了输入信号幅度不能过大。图 Section105-24 为 50Hz 、峰值 0.75V 输入正弦波时的输出波形，可见其输出信号幅度只有大约 $60\mu\text{V}$ 。此时的增益约为 -81.9dB ，说明此滤波器能够对 50Hz 实施有效的衰减，工作正

常。细心读者可能会发现，幅频特性显示此处增益约为-77dB，不是-81.9dB，其实这是因为仿真软件在绘制幅频特性图时，其频点变化是离散的，并不能保证能扫频到准确的 50Hz，未能显示最尖锐的 50Hz 谷值，属正常现象。

我们要重点强调的是下面的实验：理论上，此时将输入信号频率保持 50Hz 不变，幅度由 0.75V 变为 1.5V，那么按说其输出幅度应为 120 μ V（也变大 1 倍），但结果完全不是这样。图 Section105-25 给出了仿真波形，我们发现输出幅度大约为 74mV，陷波效果很差。这是为什么呢？原因就在于中途受限。此时，我们用示波器观察 V5 波形，发现如图 Section105-26 所示。V5 已经不再是正弦波，而是削顶的波形。这导致理论上的所有运算关系此时都失效了，因为 V5 被电源电压限制了。

重新观察幅频特性，在 50Hz 处，V5 具有大约 20dB 的增益，即 1.5V 输入会产生 15V 输出，而供电电压只有 15V，输出必然被削顶。

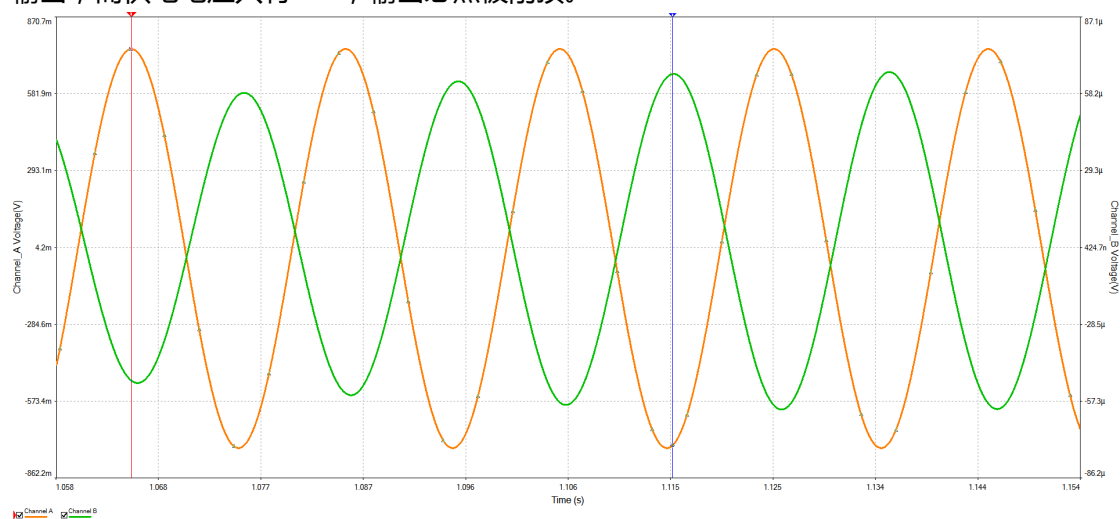


图 Section105-24 举例 9 电路输入输出波形，50Hz，0.75V_p

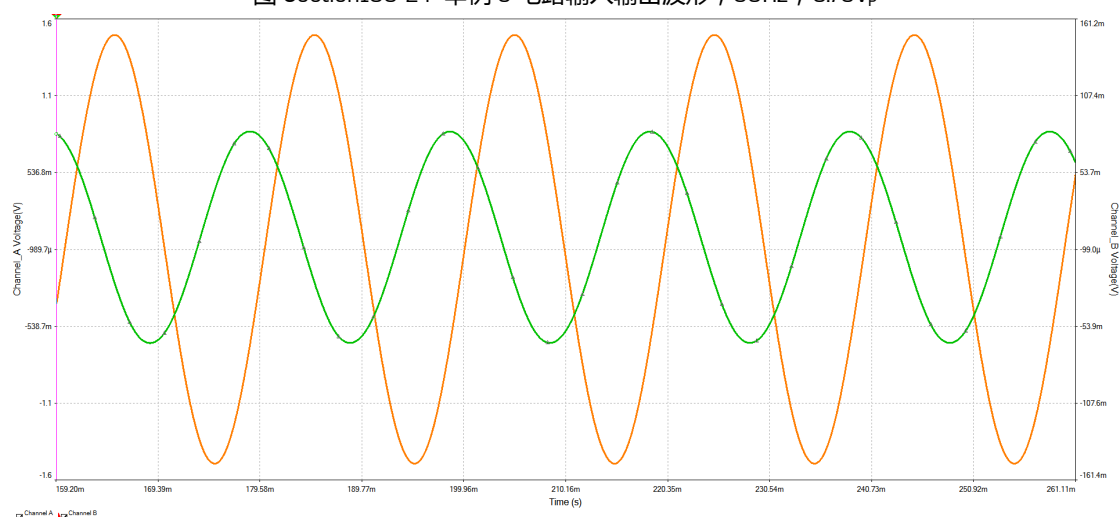


图 Section105-25 举例 9 电路输入输出波形，50Hz，1.5V_p

因此，针对这个电路，输入信号幅度绝不能过大。要保证所有信号都能满足椭圆滤波器的效果，输入信号必须足够小，以保证 V5 处的输出幅度，不会超过运放所能达到的最大幅度。对 15V 供电的 AD8671 来说，数据手册显示其最大输出幅度约为 13.2V，因此对 45Hz 信号，其输入信号幅度必须小于 $13.2V/45.08(33.08dB)=0.2928V$ 。

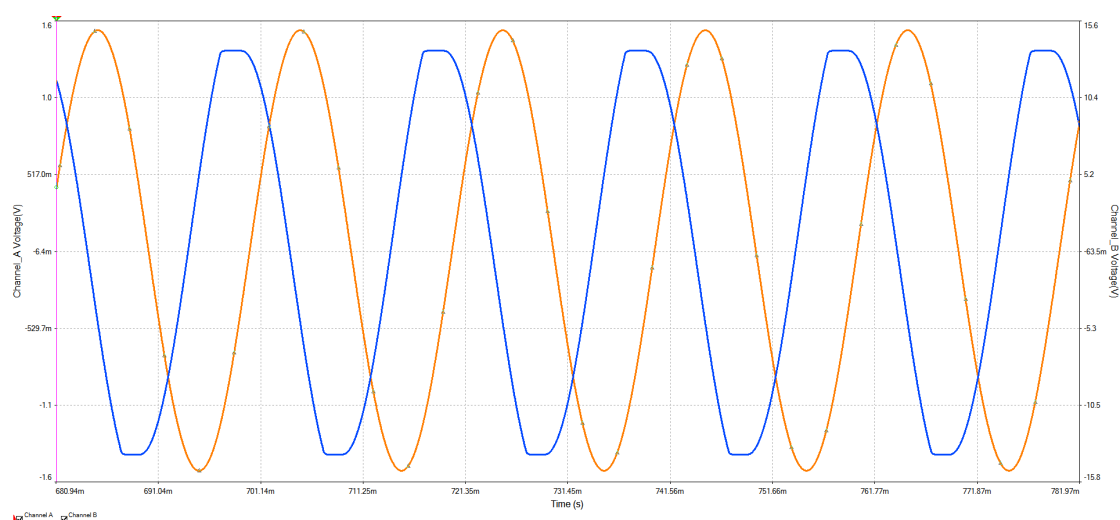


图 Section105-26 举例 9 电路输入和 V5 波形，50Hz，15V_p

以上的 5 阶椭圆滤波器可以分为三级，第一级传函为 A、第二级传函为 B，均为二阶函数，最后一级为 C，为一阶函数。举例 9 电路的串联次序为 A、B、C。我们知道，5 阶椭圆滤波器的传函为 ABC 的乘积，由于各级之间的输出阻抗都很小，因此它们满足乘法交换律：即调换其次序，不会影响总体传函。将串联次序调整为 BAC，得图 Section105-27 电路，其仿真频率特性如图 Section105-28 所示。它会在中途受限现象中表现更好一些吗？

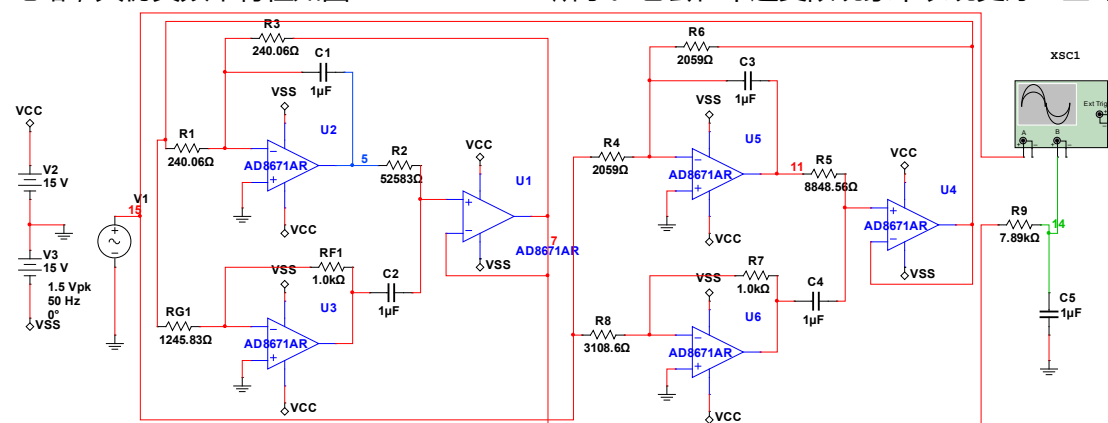


图 Section105-27 举例 9A 电路

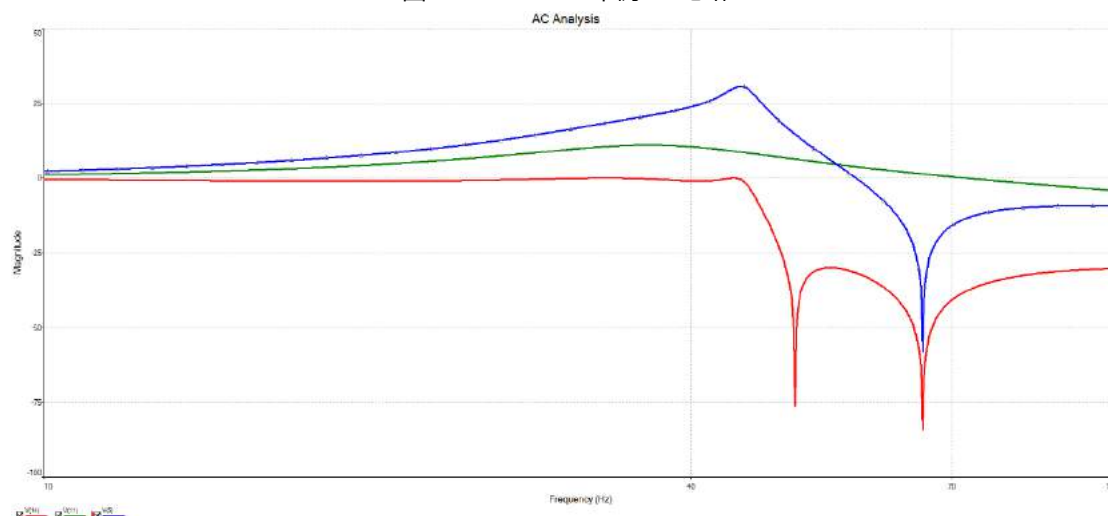


图 Section105-28 举例 9A 电路的仿真频率特性

结果表明，第一，总输出的频率特性没有改变，这印证了乘法交换律的正确性。第二，中途受限最为严重的 V5，其峰值增益发生在 44.47Hz，为 30.62dB，比举例 9 电路的 33.08dB 小；在 50Hz 处 V5 增益为 14.57dB，也比举例 9 电路的 20dB 小。这似乎对改善中途受限现象有所帮助。

为了验证此事，我们将 50Hz，1.5V_p 正弦波作为输入，看举例 9A 电路的输出表现，如图 Section105-29 所示。我们发现，绿色的输出波形幅度大约为 120μV，增益大约为 -81.9dB，与举例 9 电路输入小信号时完全相同。这说明，适当调整串联次序，会对减小中途受限现象有所帮助，但帮助程度是有限的。

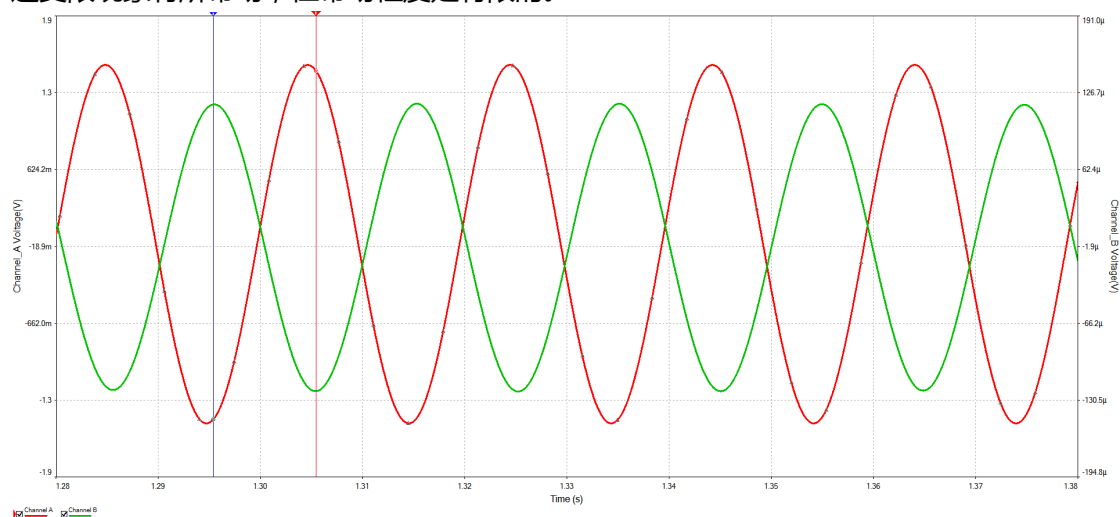


图 Section105-29 举例 9A 电路的输入和输出波形，50Hz，1.5V_p

Section106.椭圆滤波器——无源

在高频领域，一般采用无源电感、电容实现椭圆滤波器。

在 DDS（直接数字合成技术——用于正弦波产生）应用中，其主振频率一般为几十 MHz 到几百 MHz，而输出正弦波频率的最大值可以高达主振频率的 1/4 到 1/2，即输出信号最大频率可能与主振频率非常接近，这样的话，滤除主振频率，保留正弦输出的任务，就只能由过渡带比非常小，接近 1 的椭圆滤波器完成。

此频段，运放的高频性能已经下降，由它组成的有源椭圆滤波器，就显得捉襟见肘了。

无源椭圆滤波器 T 型单元

无源的椭圆滤波器，结构种类很少，只有“T 型单元组成”，以及“ π 型单元组成”两大类。其中，T 型单元如图 Section106-1 的 8 个子图所示。以图 Section106-1a 为例，图中，电阻 R_{out} 为前级的输出电阻，而 R_{load} 为滤波器的负载。不考虑这两个电阻，三个电感和一个电容，形成了一种 T 型结构。

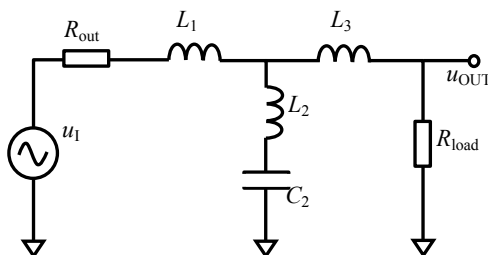


图 Section106-1a 无源 T 型 3 阶

奇数阶从 3 阶开始，每增加 2 阶，实际是在电路中多串联一级，由两个电感和一个电容组成。以 3 阶变 5 阶为例，将 L_3 左侧断开，串入 L_1 、 L_2 、 C_2 组成的“7”型结构。

所有电感电容的下标，均以其横向位置为准。如图 Section106-1b 所示横线以上的阿拉伯数字。所幸的是，两个电感（或者电容）绝不可能在相同位置出现。

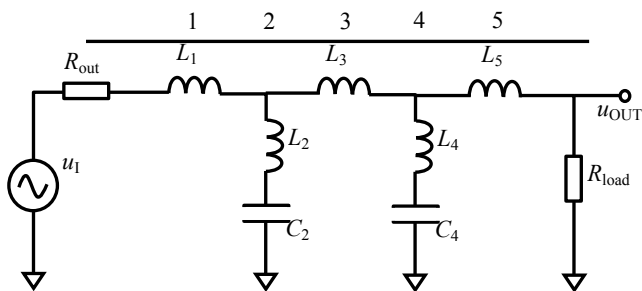


图 Section106-1b 无源 T 型 5 阶

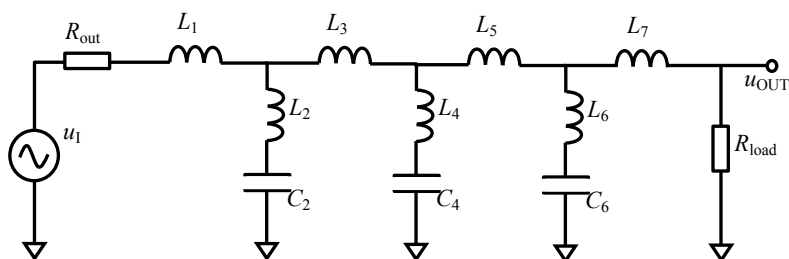


图 Section106-1c 无源 T 型 7 阶

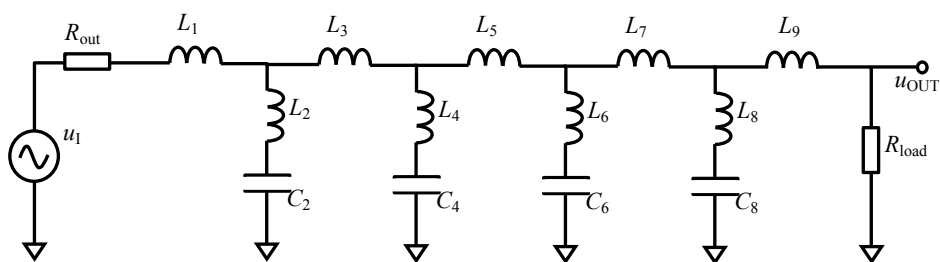


图 Section106-1d 无源 T 型 9 阶

4 阶 T 型结构，是在 3 阶基础上，多并联一个 C_4 形成。

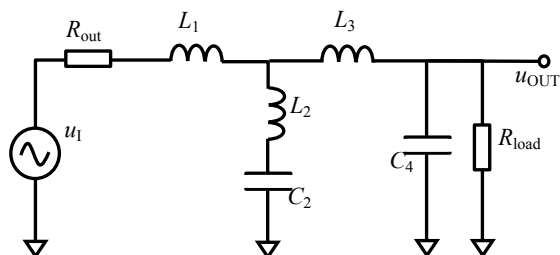


图 Section106-1e 无源 T 型 4 阶

6 阶、8 阶和 10 阶，则是在 4 阶基础上，利用 3 阶变 5 阶的方法形成。

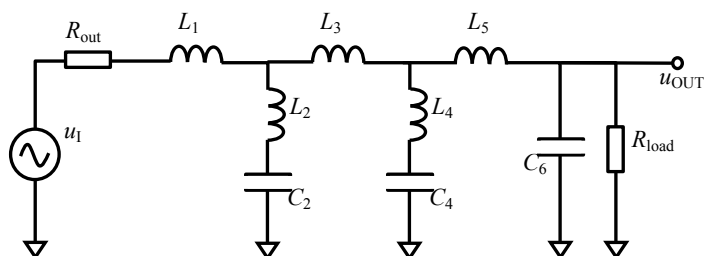


图 Section106-1f 无源 T 型 6 阶

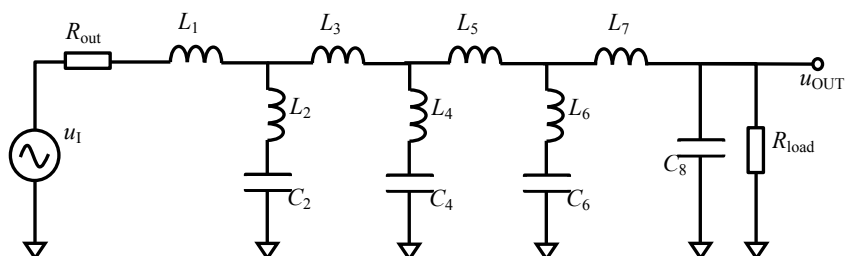


图 Section106-1g 无源 T 型 8 阶

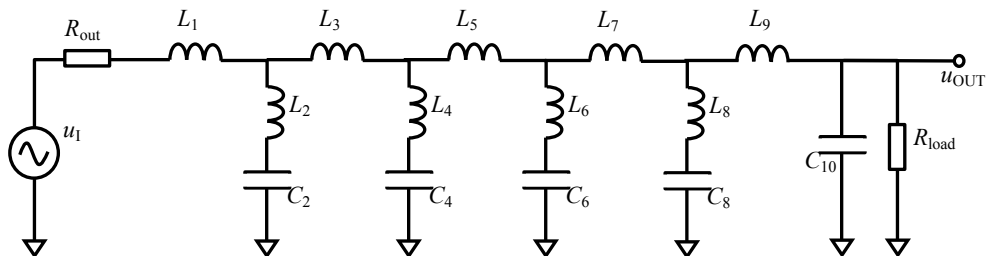


图 Section106-1h 无源 T 型 10 阶

无源椭圆滤波器 π 型单元

T 型单元电路中，电感多，电容少。 π 型单元与此刚好相反，其电路如图 Section106-2，由 8 个子图组成，分别从 3 阶到 10 阶。

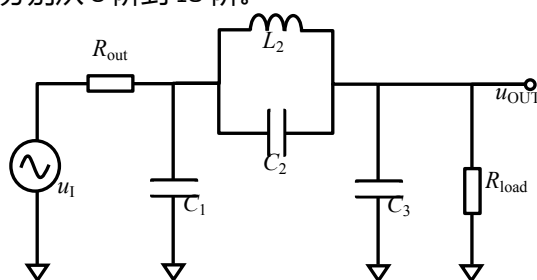


图 Section106-2a 无源 π 型 3 阶

从 3 阶到 5 阶，是在中间增加一级半边 π 型，如图 b 中的 C_3 、 C_4 、 L_4 ，依此类推到 9 阶甚至更高。

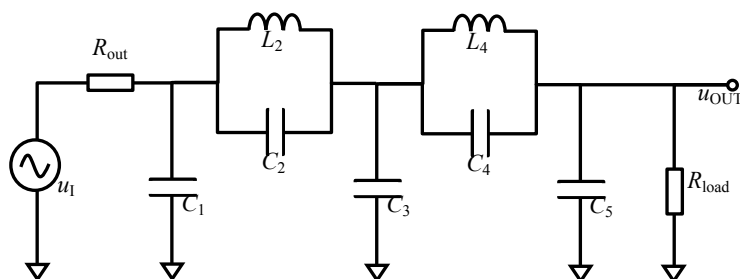


图 Section106-2b 无源 π 型 5 阶

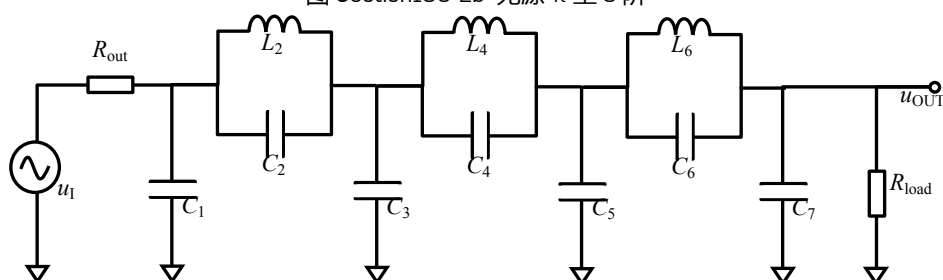


图 Section106-2c 无源 π 型 7 阶

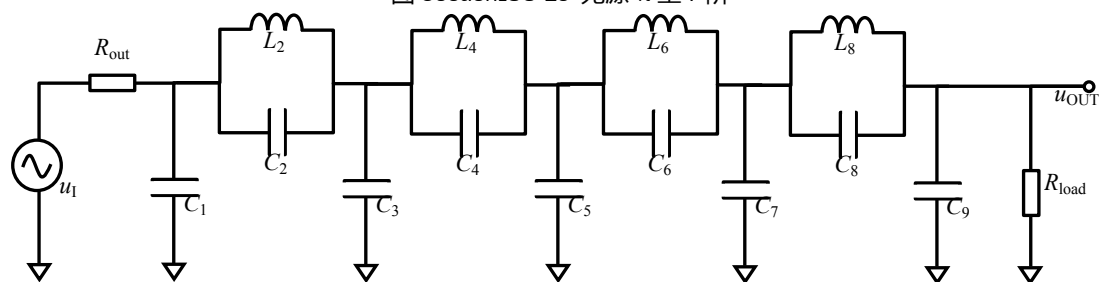


图 Section106-2d 无源 π 型 9 阶

4 阶是在 3 阶基础上，多串联一个电感 L_4 。

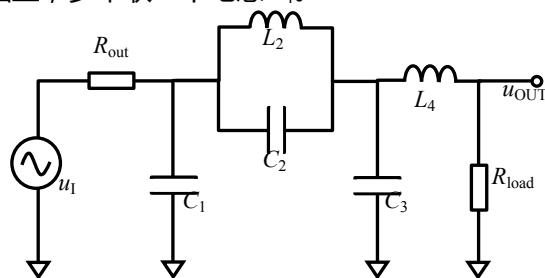


图 Section106-2e 无源 π 型 4 阶

而 6 阶，则由 4 阶增加一级半边 π 型形成。依此类推到 8 阶和 10 阶甚至更高阶。

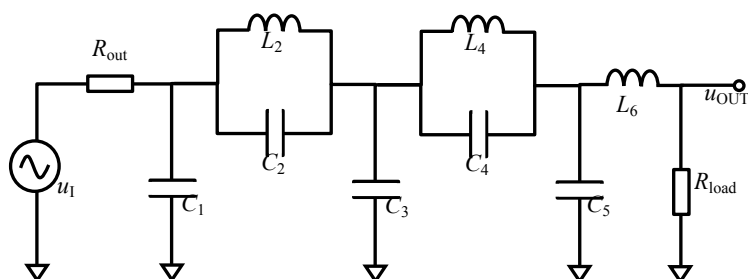


图 Section106-2f 无源 π 型 6 阶

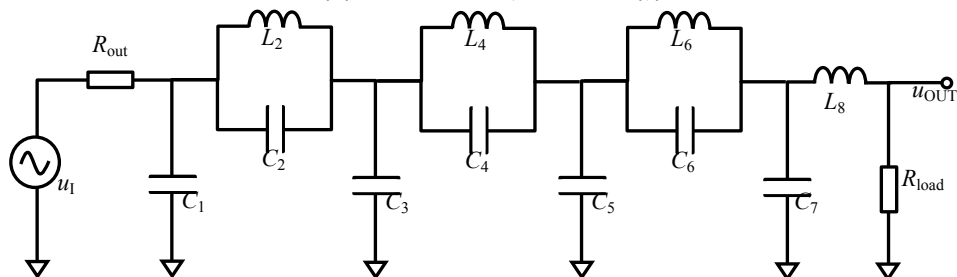


图 Section106-2g 无源 π 型 8 阶

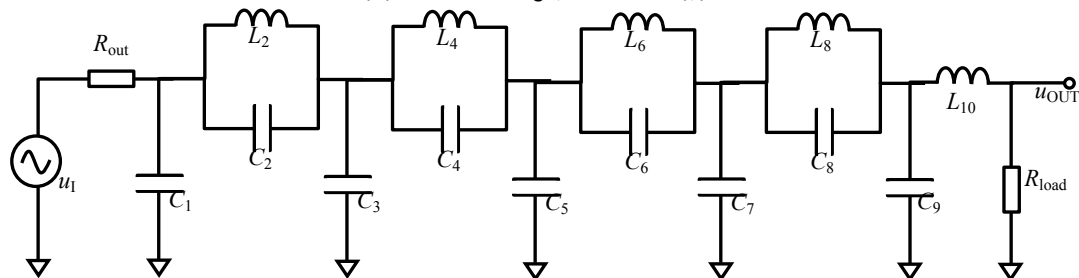


图 Section106-2h 无源 π 型 10 阶

无源椭圆滤波器的归一化系数

本节数据摘自电子工业出版社 1986 年 2 月出版的，美国 Arthur.B.Williams 著，喻春轩等译的《电子滤波器设计手册》。

所谓的归一化，是指设计目标以通带角频率 $\omega_p=1$ ，通带增益 $A_{p0}=1$ 为准。在此情况下，除以前介绍过的关键参数外，椭圆滤波器还有如下关键参数：

1) θ 角。定义为：

$$\theta = \sin^{-1} \frac{1}{\omega_s}$$

仅当 $\omega_s=1$ 时， $\theta=90^\circ$ ，此时具有极强的陡峭下降，但阻带增益会很大。而当 θ 接近 0 度，也就是 ω_s 特别大时，增益下降会很缓慢，但阻带增益有极大的衰竭。

3) 反射系数 ρ 和通带纹波 R_{dB}

反射系数 ρ 反映了通带内纹波的大小，反射系数越大，则纹波越大。

$$R_{dB} = -10 \log_{10}(1 - \rho^2)$$

本节内容，遵循《电子滤波器设计手册》规定，以表格形式呈现。表格名，以 Cxx AB 给出，其中 C 代表 Cauer，为纪念德国科学家 Cauer，他对椭圆滤波器的贡献是有目共睹的；xx 代表阶数，03 代表 3 阶，11 代表 11 阶；AB 代表 ρ ，本书给出了常见的 05 和 20 两种，分别代表 $\rho=5\%$ ， $R_{dB}=0.01087\text{dB}$ ， $\rho=20\%$ ， $R_{dB}=0.1773\text{dB}$ 。

每个系数表中，都给出了电容、电感的归一化值，这是我们查表的目的。

注意，由于我们具有两种类型的无源滤波器，而这两者是对偶的，因此我们将其放在一个表格内，统一用 Z_i 表示 C_i 或者 L_i ，比如表中为 0.1356，则它可以是 0.1356H 的电感，也可以是 0.1356F 的电容，至于到底是电感还是电容，则取决于电路结构到底是 T 型还是 π 型。

我们注意到，在全部无源滤波器中，第一位置、第三位置等奇数位置，仅有一个元件，而在第二位置、第四位置等偶数位置，一定有 2 个元件。要做到用 Z 表示电容或者电感，必须能够区分偶数位置的两个元件。

在 T 型结构中，电感多，电容少，在 π 型结构中，电容多，电感少，我们用下标 Z_{is} 表示少用的元件，这样，在 T 型结构中， Z_4 则表示 L_4 ，而 Z_{4s} 则表示 C_4 。

表 Section106-1 C03 05

C03 05			负载电阻=1 Ω				负载开路 (π) 或者短路 (T 型)			
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3
1	57.2987	103.56	0.6395	0.0002	0.9786	0.6395	0.3196	0.0003	0.7733	0.8092
2	28.6537	85.50	0.6390	0.0009	0.9776	0.6390	0.3188	0.0012	0.7721	0.8090
3	19.1073	74.93	0.6381	0.0021	0.9761	0.6381	0.3175	0.0027	0.7702	0.8087
4	14.3356	67.43	0.6370	0.0037	0.9739	0.6370	0.3156	0.0048	0.7675	0.8083
5	11.4737	61.61	0.6354	0.0059	0.9711	0.6354	0.3132	0.0075	0.7639	0.8077
6	9.5668	56.85	0.6336	0.0085	0.9676	0.6336	0.3103	0.0180	0.7596	0.8075
7	8.2055	52.82	0.6314	0.0116	0.9636	0.6314	0.3069	0.1448	0.7546	0.8063
8	7.1853	49.33	0.6289	0.0152	0.9589	0.6289	0.3029	0.0195	0.7487	0.8055
9	6.3925	46.25	0.6261	0.0193	0.9536	0.6261	0.2983	0.0248	0.7421	0.8045
10	5.7588	43.49	0.6229	0.0240	0.9477	0.6229	0.2932	0.0309	0.7346	0.8035
11	5.2408	41.00	0.6194	0.0291	0.9411	0.6194	0.2875	0.0378	0.7204	0.8024
12	4.8097	38.71	0.6155	0.0349	0.9339	0.6155	0.2813	0.0454	0.7175	0.8012
13	4.4454	36.61	0.6113	0.0412	0.9261	0.6113	0.2744	0.0540	0.7077	0.8000
14	4.1336	34.66	0.6068	0.0482	0.9177	0.6068	0.2670	0.0634	0.6972	0.7987
15	3.8637	32.85	0.6020	0.0558	0.9087	0.6020	0.2589	0.0739	0.6860	0.7974
16	3.6280	31.14	0.5968	0.0640	0.8991	0.5968	0.2502	0.0854	0.6739	0.7961
17	3.4203	29.54	0.5913	0.0729	0.8888	0.5913	0.2408	0.0980	0.6612	0.7949
18	3.2361	28.03	0.5855	0.0826	0.8780	0.5855	0.2308	0.1120	0.6477	0.7936
19	3.0716	26.60	0.5793	0.0930	0.8665	0.5793	0.2201	0.1272	0.6334	0.7925
20	2.9238	25.24	0.5728	0.1043	0.8545	0.5728	0.2087	0.1440	0.6185	0.7914
21	2.7904	23.95	0.5661	0.1164	0.8418	0.5661	0.1965	0.1625	0.6028	0.7905
22	2.6695	22.71	0.5590	0.1294	0.8286	0.5590	0.1836	0.1828	0.5865	0.7897
23	2.5593	21.53	0.5515	0.1434	0.8148	0.5515	0.1699	0.2052	0.5695	0.7891
24	2.4586	20.40	0.5438	0.1585	0.8004	0.5438	0.1553	0.2298	0.5519	0.7887
25	2.3662	19.31	0.5358	0.1747	0.7855	0.5358	0.1399	0.2571	0.5337	0.7887
26	2.2812	18.27	0.5275	0.1921	0.7700	0.5275	0.1236	0.2873	0.5149	0.7889
27	2.2027	17.26	0.5180	0.2108	0.7540	0.5180	0.1063	0.3208	0.4955	0.7896
28	2.1301	16.30	0.5100	0.2309	0.7375	0.5100	0.0800	0.3580	0.4757	0.7908
29	2.0627	15.37	0.5009	0.2526	0.7205	0.5009	0.0687	0.3997	0.4555	0.7924
30	2.0000	14.47	0.4915	0.2760	0.7031	0.4915	0.0483	0.4463	0.4348	0.7947
31	1.9416	13.61	0.4819	0.3012	0.6852	0.4819	0.0268	0.4936	0.4139	0.7977
32	1.8871	12.77	0.4720	0.3284	0.6669	0.4720	0.0040	0.5577	0.3927	0.8014
33	1.8361	11.97	0.4619	0.3578	0.6482	0.4619	-0.0201	0.6244	0.3714	0.8061
34	1.7883	11.20	0.4516	0.3896	0.6291	0.4516	-0.0456	0.7003	0.3500	0.8117
35	1.7434	10.46	0.4411	0.4241	0.6097	0.4411	-0.0725	0.7868	0.3286	0.8185

表 Section106-2 C03 20

C03 20			负载电阻=1 Ω				负载开路 (π) 或者短路 (T 型)			
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3
1	57.2987	115.77	1.1893	0.0002	1.1540	1.1893	0.5946	0.0002	1.1713	1.1717
2	28.6537	97.70	1.1889	0.0008	1.1533	1.1889	0.5940	0.0008	1.1704	1.1715
3	19.1073	87.13	1.1881	0.0018	1.1522	1.1881	0.5932	0.0018	1.1690	1.1710
4	14.3356	79.63	1.1870	0.0032	1.1507	1.1870	0.5920	0.0031	1.1670	1.1704
5	11.4737	73.81	1.1856	0.0050	1.1488	1.1856	0.5904	0.0049	1.1645	1.1696
6	9.5668	69.05	1.1839	0.0072	1.1464	1.1839	0.5885	0.0071	1.1614	1.1686
7	8.2055	65.03	1.1819	0.0098	1.1436	1.1819	0.5862	0.0096	1.1577	1.1675
8	7.1853	61.54	1.1796	0.0128	1.1404	1.1796	0.5836	0.0126	1.1535	1.1662
9	6.3925	58.46	1.1770	0.0162	1.1367	1.1770	0.5807	0.0160	1.1487	1.1647
10	5.7588	55.70	1.1740	0.0200	1.1326	1.1740	0.5773	0.0199	1.1434	1.1630
11	5.2408	53.20	1.1703	0.0243	1.1231	1.1703	0.5737	0.0241	1.1374	1.1611
12	4.8097	50.92	1.1672	0.0290	1.1231	1.1672	0.5696	0.0288	1.1310	1.1591
13	4.4454	48.82	1.1634	0.0342	1.1177	1.1634	0.5653	0.0340	1.1239	1.1570
14	4.1336	46.87	1.1592	0.0398	1.1119	1.1592	0.5605	0.0396	1.1163	1.1546
15	3.8637	45.05	1.1547	0.0458	1.1057	1.1547	0.5554	0.0457	1.1082	1.1521
16	3.6280	43.35	1.1500	0.0524	1.0990	1.1500	0.5500	0.0523	1.0994	1.1495
17	3.4203	41.75	1.1449	0.0594	1.0919	1.1449	0.5441	0.0595	1.0902	1.1467
18	3.2361	40.23	1.1395	0.0669	1.0844	1.1395	0.5379	0.0671	1.0803	1.1437
19	3.0716	38.80	1.1338	0.0749	1.0764	1.1338	0.5314	0.0753	1.0700	1.1407
20	2.9238	37.44	1.1278	0.0834	1.0681	1.1278	0.5244	0.0841	1.0590	1.1374
21	2.7904	36.14	1.1215	0.0925	1.0593	1.1215	0.5171	0.0935	1.0475	1.1340
22	2.6695	34.90	1.1149	0.1021	1.0500	1.1149	0.5094	0.1035	1.0355	1.1305
23	2.5593	33.71	1.1080	0.1123	1.0404	1.1080	0.5013	0.1142	1.0229	1.1269
24	2.4586	32.57	1.1008	0.1231	1.0303	1.1008	0.4928	0.1256	1.0098	1.1232
25	2.3662	31.47	1.0933	0.1345	1.0199	1.0933	0.4839	0.1377	0.9961	1.1193
26	2.2812	30.41	1.0855	0.1466	1.0090	1.0855	0.4746	0.1506	0.9819	1.1153
27	2.2027	29.39	1.0773	0.1593	0.9976	1.0773	0.4649	0.1643	0.9672	1.1113
28	2.1301	28.41	1.0689	0.1728	0.9859	1.0689	0.4548	0.1789	0.9519	1.1071
29	2.0627	27.45	1.0602	0.1869	0.9738	1.0602	0.4443	0.1944	0.9362	1.1029
30	2.0000	26.53	1.0512	0.2019	0.9612	1.0512	0.4333	0.2110	0.9199	1.0985
31	1.9416	25.63	1.0420	0.2176	0.9483	1.0420	0.4219	0.2285	0.9030	1.0942
32	1.8871	24.76	1.0324	0.2343	0.9349	1.0324	0.4101	0.2473	0.8857	1.0897
33	1.8361	23.92	1.0225	0.2518	0.9212	1.0225	0.3978	0.2672	0.8629	1.0853
34	1.7883	23.09	1.0123	0.2702	0.9070	1.0123	0.3851	0.2885	0.8496	1.0808
35	1.7434	22.29	1.0019	0.2897	0.8925	1.0019	0.3719	0.3112	0.8308	1.0762
36	1.7013	21.51	0.9912	0.3103	0.8776	0.9912	0.3582	0.3355	0.8116	1.0717
37	1.6616	20.74	0.9802	0.3320	0.8623	0.9802	0.3441	0.3614	0.7919	1.0672
38	1.6243	20.00	0.9689	0.3549	0.8466	0.9689	0.3294	0.3892	0.7718	1.0627

续表 Section106-2 C03 20

C03 20			负载电阻=1Ω				负载开路 (π) 或者短路 (T 型)			
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3
39	15890	19.27	0.9573	0.3791	0.8305	0.9573	0.3142	0.4191	0.7512	1.0583
40	15557	18.56	0.9455	0.4047	0.8141	0.9455	0.2985	0.4511	0.7303	1.0540
41	15243	17.86	0.9334	0.4318	0.7973	0.9334	0.2823	0.4856	0.7089	1.0497
42	14945	17.18	0.9210	0.4605	0.7801	0.9210	0.2655	0.5228	0.6872	1.0456
43	14663	16.52	0.9084	0.4909	0.7627	0.9084	0.2481	0.5629	0.6651	1.0416
44	14396	15.86	0.8955	0.5232	0.7448	0.8955	0.2301	0.6064	0.6427	1.0378
45	14142	15.22	0.8823	0.5576	0.7267	0.8823	0.2115	0.6535	0.6200	1.0341
46	13902	14.60	0.8689	0.5942	0.7082	0.8689	0.1923	0.7048	0.5971	1.0307
47	13673	13.98	0.8553	0.6331	0.6895	0.8553	0.1725	0.7607	0.5739	1.0276
48	13456	13.38	0.8415	0.6747	0.6705	0.8415	0.1519	0.8217	0.5505	1.0248
49	13250	12.79	0.8274	0.7192	0.6511	0.8274	0.1307	0.8886	0.5270	1.0223
50	13054	12.22	0.8131	0.7668	0.6316	0.8131	0.1087	0.9621	0.5034	1.0202
51	12868	11.65	0.7986	0.8179	0.6118	0.7986	0.0860	1.0431	0.4797	1.0185
52	12690	11.10	0.7839	0.8728	0.5918	0.7839	0.0625	1.1327	0.4560	1.0173
53	12521	10.56	0.7690	0.9319	0.5716	0.7690	0.0882	1.2320	0.4323	1.0166
54	12361	10.03	0.7539	0.9958	0.5512	0.7539	0.0130	1.3426	0.4088	1.0165
55	12208	9.51	0.7387	1.0648	0.5306	0.7387	-0.0131	1.4662	0.3854	1.0171
56	12062	9.01	0.7233	1.1397	0.5100	0.7233	-0.0401	1.6046	0.3622	1.0184
57	11924	8.51	0.7078	1.2210	0.4892	0.7078	-0.0681	1.7605	0.3393	1.0205
58	11792	8.03	0.6921	1.3097	0.4684	0.6921	-0.0971	1.9366	0.3168	1.0235
59	11666	7.57	0.6764	1.4065	0.4476	0.6764	-0.1272	2.1364	0.2947	1.0274
60	11547	7.11	0.6606	1.5127	0.4268	0.6606	-0.1584	2.3640	0.2731	1.0323

表 Section106-3 C04 05

C04 05			负载电阻=0.9048 Ω					负载开路 (π) 或者短路 (T 型)				
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}
C	∞	∞	0.7231	0.00000	1.207	1.334	0.6543	0.36157	0.00000	0.90444	1.16498	1.04995
6	10.350843	88.5	0.7174	0.00646	1.198	1.330	0.6549	0.35333	0.00867	0.89233	1.16304	1.05291
7	8.876727	83.1	0.7154	0.00881	1.194	1.329	0.6552	0.35034	0.01185	0.88795	1.16236	1.05398
8	7.771760	78.5	0.7130	0.01154	1.190	1.327	0.6555	0.34687	0.01556	0.88290	1.16158	1.05522
9	6.912894	74.4	0.7103	0.01464	1.186	1.325	0.6558	0.34293	0.01980	0.87717	1.16072	1.05662
10	6.226301	70.7	0.7073	0.01814	1.181	1.323	0.6561	0.33851	0.02460	0.87076	1.15976	1.05820
11	5.664999	67.3	0.7040	0.02202	1.176	1.321	0.6565	0.33360	0.02997	0.86368	1.15873	1.05993
12	5.197666	64.3	0.7003	0.02630	1.170	1.318	0.6569	0.32819	0.03594	0.85592	1.15763	1.06184
13	4.802620	61.5	0.6963	0.03100	1.163	1.316	0.6574	0.32227	0.04254	0.84748	1.15646	1.06391
14	4.464371	58.9	0.6920	0.03612	1.156	1.313	0.6579	0.31584	0.04980	0.83836	1.15523	1.06616
15	4.171563	56.5	0.6874	0.04166	1.148	1.310	0.6584	0.30888	0.05774	0.82856	1.15396	1.06857
16	3.915678	54.2	0.6824	0.04766	1.140	1.306	0.6590	0.30139	0.06642	0.81808	1.15265	1.07115
17	3.690200	52.1	0.6771	0.05411	1.132	1.303	0.6596	0.29334	0.07588	0.80692	1.15132	1.07390
18	3.490065	50.1	0.6715	0.06103	1.122	1.299	0.6603	0.28473	0.08616	0.79508	1.14998	1.07682
19	3.311272	48.1	0.6655	0.06845	1.113	1.295	0.6610	0.27554	0.09733	0.78256	1.14865	1.07991
20	3.150622	46.3	0.6592	0.07637	1.103	1.291	0.6617	0.26575	0.10945	0.76935	1.14734	1.08316
21	3.005526	44.6	0.6526	0.08482	1.092	1.286	0.6624	0.25534	0.12260	0.75547	1.14607	1.08658
22	2.873864	42.9	0.6456	0.09383	1.081	1.282	0.6632	0.24428	0.13685	0.74091	1.14486	1.09016
23	2.753885	41.3	0.6383	0.1034	1.069	1.277	0.6641	0.23257	0.15232	0.72568	1.14374	1.09391
24	2.644133	39.8	0.6306	0.1136	1.057	1.272	0.6649	0.22015	0.16911	0.70977	1.14274	1.09780
25	2.543380	38.4	0.6226	0.1244	1.044	1.267	0.6658	0.20702	0.18735	0.69320	1.14187	1.10185

续表 Section106-3 C04 05

C04 05			负载电阻=0.9048 Ω					负载开路 (π) 或者短路 (T 型)				
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}
26	2.450592	37.0	0.6143	0.1359	1.030	1.262	0.6668	0.19313	0.20719	0.67596	1.14118	1.10605
27	2.364885	35.6	0.6055	0.1481	1.017	1.256	0.6677	0.17844	0.22880	0.65807	1.14071	1.11038
28	2.285502	34.3	0.5964	0.1611	1.002	1.250	0.6687	0.16291	0.25238	0.63954	1.14049	1.11485
29	2.211792	33.0	0.5870	0.1748	0.9872	1.244	0.6698	0.14651	0.27816	0.62037	1.14057	1.11943
30	2.143189	31.8	0.5772	0.1894	0.9717	1.238	0.6708	0.12916	0.30642	0.60057	1.14101	1.12412
31	2.079202	30.6	0.5670	0.2049	0.9558	1.232	0.6719	0.11082	0.33749	0.58017	1.14186	1.12890
32	2.019399	29.4	0.5564	0.2213	0.9393	1.226	0.6730	0.09142	0.37172	0.55919	1.14320	1.13375
33	1.963403	28.3	0.5455	0.2388	0.9223	1.219	0.6742	0.07088	0.40959	0.53763	1.14511	1.13865
34	1.910879	27.2	0.5341	0.2573	0.9048	1.212	0.6753	0.04911	0.45163	0.51554	1.14767	1.14358
35	1.861534	26.1	0.5224	0.2771	0.8868	1.205	0.6765	0.02602	0.49848	0.49294	1.15100	1.14850
36	1.815103	25.1	0.5103	0.2982	0.8683	1.198	0.6777	0.00149	0.55094	0.46988	1.15520	1.15338
37	1.771354	24.0	0.4978	0.3206	0.8492	1.191	0.6789	-0.02462	0.60995	0.44638	1.16042	1.15818
38	1.730076	23.0	0.4848	0.3446	0.8297	1.184	0.6801	-0.05244	0.67668	0.42250	1.16681	1.16286
39	1.691083	22.1	0.4715	0.3702	0.8098	1.177	0.6813	-0.08216	0.75258	0.39830	1.17457	1.16735
40	1.654204	21.1	0.4577	0.3976	0.7893	1.169	0.6825	-0.11399	0.83946	0.37385	1.18392	1.17160

表 Section106-4 C04 20

C04 20			负载电阻=0.6667 Ω				负载开路 (π) 或者短路 (T 型)					
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}
T	∞	∞	1.265	0.000000	1.291	1.936	0.8434	0.63253	0.00000	1.27782	1.54262	1.28323
6	10.350843	100.71	1.260	0.006628	1.284	1.932	0.8437	0.61292	0.02076	1.24651	1.53268	1.28756
7	8.876727	95.3	1.258	0.008216	1.281	1.930	0.8439	0.60918	0.02480	1.24056	1.53081	1.28838
8	7.771760	90.7	1.255	0.01074	1.278	1.928	0.8440	0.60500	0.02921	1.23409	1.52878	1.28928
9	6.912894	86.6	1.253	0.01362	1.275	1.926	0.8442	0.60068	0.03402	1.22710	1.52660	1.29025
10	6.226301	82.9	1.250	0.01685	1.271	1.924	0.8443	0.59592	0.03923	1.21959	1.52427	1.29129
11	5.664999	79.6	1.247	0.02043	1.267	1.921	0.8445	0.59082	0.04485	1.21158	1.52179	1.29240
12	5.197666	76.5	1.243	0.02436	1.263	1.918	0.8448	0.58539	0.05090	1.20302	1.51916	1.29359
13	4.802620	73.7	1.239	0.02866	1.258	1.915	0.8450	0.57960	0.05738	1.19395	1.51639	1.29485
14	4.464371	71.1	1.235	0.03333	1.253	1.912	0.8453	0.57347	0.06431	1.18437	1.51348	1.29619
15	4.171563	68.7	1.231	0.03837	1.247	1.908	0.8456	0.56698	0.07171	1.17427	1.51043	1.29760
16	3.915678	66.4	1.226	0.04380	1.241	1.904	0.8459	0.56014	0.07959	1.16365	1.50725	1.29908
17	3.690200	64.3	1.221	0.04961	1.234	1.900	0.8462	0.55294	0.08798	1.15251	1.50394	1.30064
18	3.490065	62.3	1.216	0.05581	1.227	1.895	0.8465	0.54537	0.09689	1.14085	1.50050	1.30227
19	3.311272	60.3	1.210	0.06242	1.220	1.891	0.8469	0.53744	0.10634	1.12867	1.49694	1.30397
20	3.150622	58.5	1.204	0.06944	1.213	1.886	0.8473	0.52913	0.11637	1.11597	1.49326	1.30575
21	3.005526	56.8	1.198	0.07689	1.205	1.881	0.8477	0.52044	0.12700	1.10276	1.48947	1.30760
22	2.873864	55.1	1.191	0.08476	1.196	1.875	0.8481	0.51136	0.13826	1.08902	1.48558	1.30952
23	2.753885	53.6	1.184	0.09309	1.187	1.870	0.8485	0.50190	0.15018	1.07477	1.48159	1.31151
24	2.644133	52.0	1.177	0.1019	1.178	1.864	0.8490	0.49203	0.16279	1.06001	1.47750	1.31358
25	2.543380	50.6	1.169	0.1111	1.169	1.858	0.8494	0.48176	0.17615	1.04472	1.47333	1.31571

续表 Section106-4 C04 20

C04 20			负载电阻=0.6667 Ω					负载开路 (π) 或者短路 (T 型)				
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_{4s}
26	2.450592	49.2	1.161	0.1209	1.159	1.851	0.8499	0.47107	0.19030	1.02893	1.46908	1.31792
27	2.364885	47.8	1.153	0.1311	1.148	1.845	0.8505	0.45996	0.20527	1.01262	1.46476	1.32019
28	2.285502	46.5	1.145	0.1419	1.138	1.838	0.8510	0.44842	0.22114	0.99580	1.46039	1.32253
29	2.211792	45.2	1.136	0.1532	1.126	1.831	0.8516	0.43644	0.23796	0.97847	1.45596	1.32494
30	2.143189	44.0	1.127	0.1651	1.115	1.824	0.8521	0.42400	0.25580	0.96063	1.45150	1.32740
31	2.079202	42.8	1.117	0.1775	1.103	1.816	0.8527	0.41109	0.27473	0.94228	1.44701	1.32993
32	2.019399	41.6	1.108	0.1906	1.091	1.808	0.8533	0.39771	0.29484	0.92344	1.44251	1.33251
33	1.963403	40.5	1.097	0.2043	1.078	1.800	0.8540	0.38383	0.31623	0.90409	1.43901	1.33515
34	1.910879	39.4	1.087	0.2186	1.065	1.792	0.8546	0.36944	0.33899	0.88426	1.43352	1.33783
35	1.861534	38.3	1.076	0.2337	1.051	1.784	0.8553	0.35453	0.36326	0.86393	1.42908	1.34056
36	1.815103	37.2	1.065	0.2495	1.038	1.775	0.8560	0.33907	0.38916	0.84312	1.42468	1.34332
37	1.771354	36.2	1.054	0.2661	1.023	1.766	0.8567	0.32305	0.41686	0.82183	1.42036	1.34612
38	1.730076	35.2	1.042	0.2835	1.009	1.757	0.8574	0.30644	0.44652	0.80008	1.41614	1.34894
39	1.691083	34.2	1.030	0.3017	0.9936	1.748	0.8581	0.28921	0.47834	0.77786	1.41205	1.35177
40	1.654204	33.3	1.017	0.3208	0.9782	1.738	0.8589	0.27135	0.51256	0.75519	1.40810	1.35461

表 Section106-5 C05 05

C05 05			负载电阻=1Ω							负载开路 (π) 或者短路 (T 型)						
θ	ω _s	ΔA _s	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅
C	∞	∞	0.7664	0.0000	1.3100	1.5880	0.0000	1.3100	0.7664	0.3832	0.0000	0.9671	1.2835	0.0000	1.3983	1.2042
2	28.6537	167.86	0.7661	0.0003	1.3099	1.5877	0.0008	1.3091	0.7656	0.3828	0.0004	0.9666	1.2827	0.0008	1.3971	1.2038
3	19.1073	150.25	0.7658	0.0007	1.3095	1.5868	0.0018	1.3075	0.7646	0.3823	0.0010	0.9659	1.2818	0.0018	1.3955	1.2031
4	14.3356	137.74	0.7654	0.0012	1.3088	1.5855	0.0033	1.3054	0.7633	0.3816	0.0017	0.9649	1.2804	0.0032	1.3934	1.2023
5	11.4737	128.04	0.7048	0.0020	1.3080	1.5839	0.0052	1.3026	0.7615	0.3807	0.0027	0.9637	1.2787	0.0049	1.3907	1.2011
6	9.5668	120.11	0.7641	0.0029	1.3070	1.5820	0.0076	1.2993	0.7594	0.3796	0.0039	0.9621	1.2766	0.0071	1.3874	1.1997
7	8.2055	113.40	0.7632	0.0039	1.3058	1.5796	0.0103	1.2953	0.458	0.3783	0.0054	0.9603	1.2741	0.0097	1.3835	1.1981
8	7.1853	107.59	0.7623	0.0051	1.3044	1.5770	0.0135	1.2907	0.7540	0.3768	0.0070	0.9582	1.2713	0.0127	1.3789	1.1962
9	6.3925	102.45	0.7612	0.0065	1.3028	1.5739	0.0172	1.2855	0.7507	0.3750	0.0089	0.9558	1.2680	0.0161	1.3738	1.1941
10	5.7588	97.80	0.7606	0.0080	1.3011	1.5706	0.0213	1.2797	0.7470	0.3731	0.0110	0.9531	1.2644	0.0200	1.3681	1.1917
11	5.2408	93.69	0.7586	0.0098	1.2991	1.5669	0.0259	1.2733	0.7429	0.3710	0.0134	0.9502	1.2604	0.0242	1.3618	1.1891
12	4.8097	89.89	0.7572	0.0116	1.2970	1.5628	0.0309	1.2663	0.7384	0.3686	0.0160	0.9470	1.2561	0.0289	1.3548	1.1863
13	4.4454	86.39	0.7556	0.0137	1.2947	1.5584	0.0364	1.2586	0.7335	0.3660	0.0188	0.9435	1.2513	0.0341	1.3473	1.1831
14	4.1336	83.14	0.7538	0.0159	1.2922	1.5536	0.0424	1.2504	0.7283	0.3633	0.0219	0.9397	1.2462	0.0396	1.3392	1.1798
15	3.8637	80.11	0.7519	0.0183	1.2895	1.5485	0.0489	1.2416	0.7226	0.3603	0.0253	0.9356	1.2408	0.0457	1.3305	1.1762
16	3.6280	77.27	0.7499	0.0200	1.2865	1.5431	0.0559	1.2321	0.7165	0.3570	0.0289	0.9312	1.2349	0.0522	1.3212	1.1723
17	3.4203	74.60	0.7478	0.0236	1.2836	1.5374	0.0635	1.2221	0.7101	0.3536	0.0328	0.9265	1.2287	0.0592	1.3118	1.1682
18	3.2361	72.08	0.7455	0.0266	1.2803	1.5313	0.0716	1.2115	0.7082	0.3499	0.0370	0.9216	1.2222	0.0667	1.3009	1.1639
19	3.0716	69.69	0.7431	0.0297	1.2768	1.5249	0.0802	1.2002	0.6959	0.3460	0.0414	0.9163	1.2153	0.0747	1.3898	1.1593
20	2.9238	67.41	0.7406	0.0330	1.2732	1.5182	0.0895	1.1884	0.6883	0.3419	0.0462	0.9108	1.2080	0.0833	1.2782	1.1545
21	2.7904	65.25	0.7379	0.0365	1.2694	1.5112	0.0994	1.1760	0.6802	0.3375	0.0513	0.9050	1.2004	0.0923	1.2660	1.1495

续表 Section106-5 C05 05

C05 05			负载电阻=1Ω							负载开路 (π) 或者短路 (T 型)						
θ	ω _s	ΔA _s	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅
22	2.6695	63.18	0.7350	0.0402	1.2653	1.5038	0.1099	1.1630	0.6717	0.3329	0.0566	0.8988	1.1924	0.1020	1.2532	1.1442
23	2.5593	61.20	0.7321	0.0441	1.2611	1.4962	0.1210	1.1494	0.6628	0.3281	0.0623	0.8924	1.1841	0.1122	1.2399	1.1387
24	2.4586	59.29	0.7290	0.0482	1.2567	1.4882	0.1329	1.1353	0.6534	0.3230	0.0684	0.8857	1.1755	0.1231	1.2260	1.1329
25	2.3662	57.46	0.7257	0.0524	1.2520	1.4800	0.1454	1.1205	0.6437	0.3176	0.0748	0.8786	1.1666	0.1346	1.2115	1.1269
26	2.2812	55.70	0.7223	0.0569	1.2472	1.4715	0.1588	1.1052	0.6335	0.3120	0.0816	0.8713	1.1573	0.1467	1.1964	1.1207
27	2.2027	54.00	0.7187	0.0617	1.2421	1.4627	0.1729	1.0893	0.6229	0.3061	0.0888	0.8637	1.1477	0.1595	1.1809	1.1143
28	2.1301	52.35	0.7150	0.0666	1.2369	1.4537	0.1879	1.0729	0.6118	0.2999	0.0963	0.8557	1.1377	0.1731	1.1647	1.1076
29	2.0627	50.76	0.7112	0.0718	1.2314	1.4444	0.2038	1.0559	0.6003	0.2935	0.1043	0.8475	1.1275	0.1875	1.1480	1.1007
30	2.0000	49.22	0.7072	0.0772	1.2257	1.4348	0.2206	1.0383	0.5884	0.2867	0.1128	0.8389	1.1170	0.2026	1.1308	1.0936
31	1.9416	47.72	0.7030	0.0828	1.2198	1.4250	0.2384	1.0201	0.5760	0.2797	0.1217	0.8300	1.1061	0.2186	1.1130	1.0863
32	1.8871	46.27	0.6987	0.0887	1.2136	1.4150	0.2574	1.0015	0.5631	0.2723	0.1312	0.8208	1.0950	0.2355	1.0947	1.0788
33	1.8361	44.85	0.6942	0.0948	1.2073	1.4048	0.2774	0.9822	0.5498	0.2647	0.1411	0.8112	1.0836	0.2534	1.0758	1.0710
34	1.7883	43.47	0.6896	0.1012	1.2007	1.3943	0.2988	0.9625	0.5360	0.2567	0.1517	0.8013	1.0719	0.2722	1.0565	1.0630
35	1.7434	42.13	0.6847	0.1078	1.1938	1.3837	0.3214	0.9422	0.5217	0.2484	0.1628	0.7911	1.0600	0.2922	1.0366	1.0549
36	1.7013	40.81	0.6798	0.1148	1.1867	1.3720	0.3455	0.9214	0.5070	0.2397	0.1746	0.7806	1.0478	0.3134	1.0162	1.0465
37	1.6616	39.53	0.6746	0.1220	1.1794	1.3619	0.3712	0.9001	0.4917	0.2306	0.1870	0.7697	1.0354	0.3357	0.9953	1.0379
38	1.6243	38.28	0.6693	0.1295	1.1717	1.3508	0.3985	0.8782	0.4759	0.2212	0.2002	0.7585	1.0227	0.3595	0.9738	1.0291
39	1.5890	37.05	0.6637	0.1374	1.1638	1.3396	0.4278	0.8559	0.4595	0.2114	0.2142	0.7469	1.0098	0.3847	0.9519	1.0202
40	1.5557	35.85	0.6580	0.1456	1.1556	1.3282	0.4590	0.8331	0.4426	0.2012	0.2290	0.7350	0.9967	0.4115	0.9295	1.0111
41	1.5243	34.67	0.6521	0.1541	1.1472	1.3168	0.4924	0.8099	0.4252	0.1905	0.2447	0.7227	0.9834	0.4399	0.9067	1.0017
42	1.4945	33.52	0.6460	0.1630	1.1384	1.3053	0.5283	0.7362	0.4072	0.1794	0.2614	0.7100	0.9699	0.4703	0.8833	0.9923

续表 Section106-5 C05 05

C05 05			负载电阻=1 Ω							负载开路 (π) 或者短路 (T 型)						
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5
43	14663	32.38	0.6397	0.1722	1.1292	1.2937	0.5669	0.7620	0.3885	0.1678	0.2791	0.6970	0.9563	0.5027	0.8595	0.9826
44	14396	31.27	0.6332	0.1819	1.1198	1.2822	0.6085	0.7375	0.3693	0.1558	0.2981	0.6836	0.9425	0.5374	0.8353	0.9728
45	14142	30.17	0.6265	0.1920	1.1099	1.2706	0.6535	0.7125	0.3494	0.1432	0.3183	0.6697	0.9285	0.5745	0.8106	0.9629
46	13902	29.09	0.6195	0.2025	1.0997	1.2591	0.7022	0.6871	0.3288	0.1300	0.3398	0.6555	0.9145	0.6143	0.7855	0.9528
47	13673	28.03	0.6124	0.2135	1.0891	1.2478	0.7550	0.6614	0.3075	0.1163	0.3630	0.6409	0.9003	0.6572	0.7599	0.9426
48	13456	26.99	0.6050	0.2251	1.0780	1.2365	0.8126	0.6354	0.2855	0.1019	0.3878	0.6259	0.8861	0.7035	0.7430	0.9323
49	13250	25.95	0.5973	0.2372	1.0665	1.2254	0.8756	0.6090	0.2628	0.0869	0.4144	0.6104	0.8718	0.7536	0.7077	0.9219
50	13054	24.94	0.5894	0.2498	1.0545	1.2145	0.9446	0.5824	0.2392	0.0712	0.4432	0.5946	0.8575	0.8079	0.6810	0.9114
51	12868	23.93	0.5813	0.2632	1.0420	1.2089	1.0206	0.5556	0.2147	0.0548	0.4743	0.5783	0.8432	0.8671	0.6540	0.9008
52	12690	22.94	0.5729	0.2772	1.0289	1.1937	1.1047	0.5285	0.1894	0.0375	0.5080	0.5615	0.8290	0.9317	0.6267	0.8903
53	12521	21.96	0.5642	0.2920	1.0152	1.1838	1.1980	0.5013	0.1631	0.0194	0.5447	0.5443	0.8148	1.0027	0.5990	0.8797
54	12361	20.99	0.5552	0.3076	1.0008	1.1744	1.3020	0.4740	0.1357	0.0004	0.5847	0.5266	0.8007	1.0849	0.5711	0.8691
55	12208	20.04	0.5460	0.3242	0.9858	1.1656	1.4187	0.4467	0.1073	-0.0197	0.6285	0.5085	0.7868	1.1672	0.5430	0.8586
56	12062	19.09	0.5364	0.3417	0.9700	1.1575	1.5502	0.4194	0.0777	-0.0408	0.6768	0.4899	0.7731	1.2633	0.5147	0.8482
57	11924	18.15	0.5265	0.3605	0.9533	1.1501	1.6993	0.3921	0.0468	-0.0631	0.7301	0.4708	0.7597	1.3707	0.4862	0.8380
58	11792	17.23	0.5163	0.3805	0.9358	1.1437	1.8693	0.3651	0.0145	-0.0867	0.7893	0.4512	0.7465	1.4914	0.4576	0.8280
59	11666	16.31	0.5057	0.4020	0.9174	1.1382	1.0645	0.3382	-0.0191	-0.1117	0.8554	0.4312	0.7338	1.6279	0.4290	0.8182
60	11547	16.40	0.4948	0.4251	0.8979	1.1340	1.2902	0.3117	-0.0545	-0.1382	0.9295	0.4107	0.7215	1.7833	0.4004	0.8087

表 Section106-6 C05 20

C05 20			负载电阻=1 Ω							负载开路 (π) 或者短路 (T 型)						
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5
C	∞	∞	1 . 302	0.000	1 . 346	2.129	0.000	1 . 346	1 . 302	0.6510	0.0000	1 . 3234	1 . 6362	0.0000	1 . 6265	1 . 4246
1	57.2987	210.17	1.30183	0.00008	1.34548	2.12835	0.00020	1.34523	1.30170	0.6509	0.0001	1.3233	1.6360	0.0002	1.6263	1.4244
2	28.6537	180.07	1.30163	0.00031	1.34523	2.12770	0.00082	1.34459	1.30112	0.6507	0.0003	1.3229	1.6355	0.0007	1.6254	1.4240
3	19.1073	162.45	1.30130	0.00071	1.34483	2.12660	0.00184	1.34339	1.30016	0.6503	0.0007	1.3223	1.6345	0.0015	1.6240	1.4233
4	14.3356	149.95	1.30084	0.00125	1.34426	2.12507	0.00328	1.34170	1.29881	0.6498	0.0013	1.3215	1.6332	0.0027	1.6220	1.4224
5	11.4737	40.25	1.30024	0.00196	1.34353	2.12311	0.00513	1.33955	1.29708	0.6491	0.0020	1.3205	1.6315	0.0042	1.6195	1.4211
6	9.5668	132.32	1.29951	0.00282	1.34264	2.12070	0.00740	1.33689	1.29496	0.6483	0.0029	1.3193	1.6294	0.0061	1.6164	1.4196
7	8.2055	125.61	1.29865	0.00384	1.34159	2.11786	0.01008	1.33376	1.29246	0.6473	0.0039	1.3178	1.6270	0.0083	1.6128	1.4178
8	7.1853	119.80	1.29676	0.00502	1.34037	2.11459	0.01318	1.33015	1.28957	0.6462	0.0051	1.3161	1.6241	0.0109	1.6085	1.4158
9	6.3925	114.66	1.29653	0.00637	1.33899	2.11088	0.01671	1.32607	1.28630	0.6450	0.0065	1.3141	1.6209	0.0138	1.6038	1.4135
10	5.7588	110.06	1.29527	0.00787	1.33744	2.10675	0.02067	1.32150	1.28264	0.6436	0.0080	1.3120	1.6174	0.0171	1.5984	1.4109
11	5.2408	105.90	1.29387	0.00953	1.33573	2.10217	0.02506	1.31646	1.27859	0.6420	0.0097	1.3096	1.6134	0.0207	1.5926	1.4080
12	4.8097	102.10	1.29234	0.01136	1.33386	2.09717	0.02989	1.61094	1.27417	0.6403	0.0116	1.3069	1.6091	0.0247	1.5861	1.4048
13	4.4454	98.59	1.29067	0.01335	1.33182	2.09172	0.03516	1.30495	1.26936	0.6384	0.0136	1.3041	1.6044	0.0291	1.5791	1.4014
14	4.1336	95.34	1.28887	0.01551	1.32961	2.08588	0.04089	1.29848	1.26416	0.6364	0.0159	1.3010	1.5998	0.0338	1.5716	1.3977
15	3.8637	92.32	1.28693	0.01783	1.32724	2.07959	0.04707	1.29154	1.25868	0.6343	0.0182	1.2976	1.5939	0.0389	1.5635	1.3938
16	3.6280	80.48	1.28485	0.02033	1.32470	2.07288	0.05371	1.28413	1.25261	0.6319	0.0208	1.2941	1.5881	0.0444	1.5548	1.3895
17	3.4203	86.81	1.28263	0.02300	1.32199	2.06574	0.06048	1.27625	1.24627	0.6295	0.0236	1.2903	1.5819	0.0502	1.5456	1.3850
18	3.2361	84.29	1.28027	0.02584	1.31911	2.05819	0.06844	1.26790	1.23953	0.6268	0.0265	1.2862	1.5754	0.0565	1.5359	1.3803
19	3.0716	81.89	1.27778	0.02885	1.31607	2.05021	0.07655	1.25909	1.23241	0.6240	0.0296	1.2820	1.5685	0.0632	1.5256	1.3753

续表 Section106-6 C05 20

C05 20			负载电阻=1Ω							负载开路 (π) 或者短路 (T 型)						
θ	ω _s	ΔA _s	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅
20	2.9238	79.62	127514	0.03205	131285	2.04182	0.08515	124981	122491	0.6211	0.0329	12774	15612	0.0703	15148	1.3700
21	2.7904	77.46	127236	0.03542	130945	2.03301	0.09428	124007	121703	0.6180	0.0364	12727	15536	0.0778	15035	1.3644
22	2.6695	75.39	126043	0.03898	130589	2.02379	0.10393	122987	120876	0.6147	0.0402	12677	15456	0.0857	14916	1.3586
23	2.5593	73.40	126636	0.04272	130215	2.01416	0.11414	121921	120010	0.6112	0.0441	12624	15373	0.0941	14791	1.3525
24	2.4586	71.50	126314	0.04666	129825	2.00412	0.12490	120809	119107	0.6076	0.0482	12569	15286	0.1029	14662	1.3461
25	2.3662	69.67	125978	0.05079	129413	1.99368	0.13625	119652	118164	0.6038	0.0525	12512	15195	0.1122	14527	1.3395
26	2.2812	67.91	125262	0.05511	128985	1.98283	0.14819	118450	117183	0.5998	0.0571	12452	15101	0.1220	14387	1.3327
27	2.2027	66.21	125259	0.05963	128540	1.97159	0.16075	117203	116164	0.5957	0.0619	12389	15004	0.1323	14242	1.3256
28	2.1301	64.56	124877	0.06436	128075	1.95995	0.17396	115911	115106	0.5914	0.0669	12324	14903	0.1431	14092	1.3182
29	2.0627	62.97	122480	0.06930	127592	1.94792	0.18783	114576	114010	0.5869	0.0721	12256	14798	0.1544	13936	1.3015
30	2.0000	61.43	124067	0.07446	127091	1.93550	0.20239	113196	112874	0.5822	0.0777	12186	14690	0.1663	13776	1.3027
31	1.9416	59.93	123638	0.07988	126570	1.92270	0.21768	111772	111700	0.5773	0.0834	12413	14579	0.1788	13610	1.2945
32	1.8871	58.47	123192	0.08543	126030	1.90952	0.23371	110305	110487	0.5723	0.0894	12037	14464	0.1918	13439	1.2861
33	1.8361	57.06	122731	0.09126	125470	1.89595	0.25054	108795	109235	0.5670	0.0957	11959	14346	0.2055	13264	1.2775
34	1.7883	55.68	122252	0.09732	124890	1.88203	0.26819	107242	107944	0.5616	0.1023	11878	14225	0.2198	13083	1.2686
35	1.7434	54.33	121757	0.10363	124290	1.86773	0.28671	105648	106614	0.5559	0.1092	11794	14100	0.2348	12898	1.2595
36	1.7013	53.02	121244	0.11019	123669	1.85307	0.30614	104101	105244	0.5500	0.1164	11707	13972	0.2506	12707	1.2501
37	1.6616	51.74	120714	0.11701	123028	1.83806	0.32654	102332	103835	0.5439	0.1239	11618	13841	0.2671	12512	1.2405
38	1.6243	50.49	120166	0.12410	122364	1.82269	0.34795	100613	102386	0.5376	0.1318	11525	13707	0.2843	12313	1.2306
39	1.5890	49.26	119600	0.13146	121679	1.80698	0.37044	98853	100897	0.5341	0.1400	11429	13570	0.3024	12408	1.2205

续表 Section106-6 C05 20

C05 20			负载电阻=1Ω							负载开路 (π) 或者短路 (T 型)						
θ	ω _s	ΔA _s	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅	Z ₁	Z ₂	Z _{2s}	Z ₃	Z ₄	Z _{4s}	Z ₅
40	15557	48.06	1.19015	0.13911	1.20971	1.79093	0.39408	0.97053	0.99368	0.5244	0.1485	1.1331	1.3429	0.3214	1.1899	1.2102
41	15243	46.88	1.18411	0.14706	1.20241	1.77455	0.41894	0.95213	0.97798	0.5174	0.1575	1.1229	1.3286	0.3413	1.1686	1.1994
42	14945	45.72	1.17787	0.15532	1.19486	1.75784	0.44510	0.93335	0.96187	0.5102	0.1668	1.1124	1.3139	0.3623	1.1467	1.1888
43	14663	44.59	1.17144	0.16389	1.18708	1.74081	0.47265	0.91417	0.94535	0.5027	0.1766	1.1016	1.2989	0.3843	1.1245	1.1778
44	14396	43.47	1.16480	0.17280	1.17904	1.72347	0.50170	0.89462	0.92841	0.4949	0.1868	1.0905	1.2837	0.4074	1.1018	1.1665
45	14142	42.38	1.15794	0.18206	1.17075	1.70583	0.53236	0.87470	0.91165	0.4869	0.1975	1.0790	1.2681	0.4317	1.0787	1.1551
46	13902	41.30	1.15088	0.19169	1.16219	1.68789	0.56476	0.85441	0.89326	0.4787	0.2078	1.0672	1.2523	0.4573	1.0551	1.1433
47	13673	40.23	1.14359	0.20169	1.15336	1.66967	0.59903	0.83376	0.87504	0.4701	0.2205	1.0550	1.2362	0.4844	1.0311	1.1314
48	13456	39.19	1.13607	0.21210	1.14425	1.65117	0.63534	0.81276	0.85638	0.4612	0.2328	1.0425	1.2498	0.5129	1.0068	1.1193
49	13250	38.15	1.12831	0.22293	1.13484	1.63241	0.67386	0.79141	0.83727	0.4520	0.2457	1.0296	1.2032	0.5481	0.9820	1.1069
50	13054	37.13	1.12031	0.23421	1.12513	1.61339	0.71418	0.76973	0.81771	0.4425	0.2598	1.0163	1.1863	0.5750	0.9568	1.0943
51	12868	36.12	1.11206	0.24596	1.11509	1.59413	0.75841	0.74773	0.79768	0.4327	0.2736	1.0026	1.1691	0.6089	0.9313	1.0815
52	12690	35.13	1.10354	0.25824	1.10473	1.57465	0.80492	0.72541	0.77717	0.4225	0.2885	0.9884	1.1517	0.6449	0.9053	1.0685
53	12521	34.14	1.09476	0.27099	1.09401	1.55464	0.85465	0.70278	0.75619	0.4120	0.3044	0.9739	1.1341	0.6833	0.8790	1.0553
54	12361	33.17	1.08569	0.28433	1.08293	1.53504	0.90794	0.67986	0.73470	0.4010	0.3211	0.9589	1.1162	0.7242	0.8524	1.0419
55	12208	32.20	1.07633	0.29828	1.07147	1.51496	0.96581	0.65667	0.71270	0.3897	0.3388	0.9435	1.0951	0.7679	0.8254	1.0283
56	12062	31.25	1.06666	0.31288	1.05960	1.49471	1.02684	0.63320	0.69016	0.3779	0.3574	0.9275	1.0798	0.8147	0.7981	1.0144
57	11924	30.30	1.05668	0.32817	1.04731	1.47431	1.09344	0.60949	0.66709	0.3657	0.3772	0.9111	1.0613	0.8550	0.7705	1.0004
58	11792	29.36	1.04636	0.34422	1.03456	1.45379	1.16561	0.58554	0.64344	0.3330	0.3983	0.8942	1.0426	0.9192	0.7425	0.9863
59	11666	28.42	1.03570	0.36109	1.02134	1.43317	1.24407	0.56138	0.61920	0.3398	0.4207	0.8767	1.0237	0.9777	0.7143	0.9719
60	11547	27.49	1.02467	0.37885	1.00760	1.41247	1.32969	0.53702	0.59435	0.3261	0.4446	0.8587	1.0046	1.0412	0.6858	0.9574

表 Section106-7 C06 20b

C06 20b			负载电阻=0.6667 Ω							
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_{6s}
T	∞	∞	1.322	0.0000	1.373	2.203	0.0000	1.469	2.059	0.8816
16	3.751039	112.5	1.299	0.0250	1.344	2.142	0.0468	1.412	2.017	0.8828
17	3.535748	109.3	1.296	0.0283	1.341	2.135	0.0530	1.405	2.012	0.8830
18	3.344698	106.3	1.293	0.0318	1.337	2.126	0.0596	1.397	2.006	0.8831
19	3.174064	103.4	1.290	0.0355	1.333	2.118	0.0666	1.389	2.000	0.8833
20	3.020785	100.7	1.286	0.0395	1.328	2.108	0.0740	1.380	1.993	0.8835
21	2.882384	98.1	1.283	0.0436	1.324	2.099	0.0818	1.371	1.987	0.8837
22	2.756834	95.6	1.279	0.0480	1.319	2.089	0.0901	1.362	1.979	0.8839
23	2.642462	93.3	1.275	0.0527	1.314	2.078	0.0989	1.352	1.972	0.8841
24	2.537873	91.0	1.270	0.0576	1.309	2.067	0.1081	1.341	1.964	0.8843
25	2.441895	88.8	1.266	0.0627	1.303	2.055	0.1177	1.331	1.956	0.8845
26	2.353536	86.7	1.261	0.0680	1.297	2.043	0.1279	1.320	1.948	0.8848
27	2.271953	84.6	1.256	0.0736	1.291	2.031	0.1385	1.308	1.939	0.8850
28	2.196422	82.6	1.251	0.0795	1.285	2.018	0.1497	1.296	1.93	0.8853
29	2.126320	80.7	1.246	0.0857	1.279	2.005	0.1613	1.284	1.921	0.8855
30	2.061105	78.9	1.240	0.0921	1.272	1.991	0.1735	1.271	1.911	0.8858
31	2.000308	77.1	1.235	0.0988	1.265	1.977	0.1863	1.257	1.901	0.8861
32	1.943517	75.3	1.229	0.1057	1.258	1.962	0.1996	1.244	1.891	0.8864
33	1.890370	73.6	1.223	0.1130	1.250	1.947	0.2136	1.230	1.881	0.8867
34	1.840548	72.0	1.216	0.1206	1.243	1.931	0.2281	1.215	1.870	0.8870
35	1.793769	70.4	1.210	0.1285	1.235	1.915	0.2433	1.200	1.859	0.8873
36	1.749781	68.8	1.203	0.1367	1.226	1.899	0.2592	1.185	1.847	0.8877
37	1.708362	67.3	1.196	0.1452	1.218	1.882	0.2758	1.169	1.835	0.8880
38	1.669312	65.8	1.189	0.1541	1.209	1.864	0.2931	1.153	1.823	0.8884
39	1.632449	64.3	1.181	0.1634	1.200	1.847	0.3112	1.137	1.811	0.8887
40	1.597615	62.8	1.174	0.1730	1.191	1.828	0.3301	1.120	1.798	0.8891
41	1.564662	61.4	1.166	0.1830	1.181	1.810	0.3498	1.103	1.785	0.8895
42	1.533460	60.0	1.158	0.1934	1.172	1.791	0.3704	1.085	1.771	0.8898
43	1.503888	58.7	1.149	0.2043	1.161	1.771	0.3920	1.067	1.753	0.8902
44	1.475840	57.3	1.141	0.2155	1.151	1.751	0.4145	1.049	1.744	0.8906
45	1.449216	56.0	1.132	0.2272	1.140	1.731	0.4381	1.030	1.729	0.8910
46	1.423927	54.7	1.123	0.2394	1.130	1.710	0.4628	1.011	1.715	0.8915
47	1.399891	53.4	1.113	0.2521	1.118	1.689	0.4888	0.9910	1.700	0.8919
48	1.377032	52.2	1.103	0.2653	1.107	1.668	0.5160	0.9711	1.684	0.8923
49	1.355282	50.9	1.093	0.2791	1.095	1.646	0.5446	0.9508	1.669	0.8928
50	1.334577	49.7	1.083	0.2935	1.083	1.623	0.5747	0.9802	1.653	0.8932
51	1.314859	48.5	1.073	0.3084	1.070	1.600	0.6063	0.9092	1.637	0.8937

续表 Section106-7 C06 20b

C06 20b			负载电阻=0.6667 Ω							
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_{6s}
52	1.296076	47.3	1.062	0.3241	1.057	1.577	0.6397	0.8878	1.620	0.8942
53	1.278176	46.1	1.050	0.3404	1.044	1.554	0.6749	0.8661	1.603	0.8946
54	1.261116	45.0	1.039	0.3574	1.031	1.530	0.7122	0.8440	1.586	0.8951
55	1.244853	43.8	1.027	0.3752	1.017	1.506	0.7157	0.8216	1.568	0.8956
56	1.229348	42.7	1.015	0.3939	1.003	1.481	0.7936	0.7989	1.551	0.8961
57	1.214564	41.5	1.002	0.4135	0.9881	1.456	0.8382	0.7758	1.532	0.8966
58	1.200469	40.4	0.9894	0.4340	0.9732	1.431	0.8857	0.7523	1.514	0.8971
59	1.187032	39.3	0.9760	0.4556	0.9578	1.405	0.9335	0.7286	1.495	0.8976
60	1.174224	38.1	0.9623	0.4783	0.9420	1.379	0.9900	0.7045	1.476	0.8981
61	1.162017	37.0	0.9481	0.5022	0.9258	1.353	1.049	0.6801	1.456	0.8987
62	1.150388	35.9	0.9335	0.5274	0.9091	1.326	1.112	0.6554	1.436	0.8992
63	1.139313	34.8	0.9184	0.5541	0.8920	1.299	1.181	0.6304	1.416	0.8976
64	1.128771	33.7	0.9028	0.5824	0.8743	1.272	1.255	0.6051	1.395	0.9002
65	1.118742	32.6	0.8867	0.6125	0.8562	1.244	1.335	0.5795	1.374	0.9008
66	1.109208	31.5	0.8700	0.6445	0.8374	1.216	1.424	0.5536	1.352	0.9013
67	1.100151	30.4	0.8528	0.6787	0.8182	1.188	1.521	0.5274	1.330	0.9018
68	1.091555	29.3	0.8349	0.7153	0.7982	1.160	1.629	0.5010	1.308	0.9023
69	1.083407	28.2	0.8163	0.7547	0.7777	1.131	1.748	0.4744	1.285	0.9028
70	1.075391	27.1	0.7970	0.7972	0.7564	1.102	1.883	0.4475	1.261	0.9032
71	1.068397	26.0	0.7769	0.8433	0.7344	1.073	2.034	0.4304	1.237	0.9037
72	1.061511	24.9	0.7560	0.8936	0.7110	1.044	2.206	0.3931	1.213	0.9040
73	1.055024	23.7	0.7341	0.9487	0.6878	1.015	2.405	0.3657	1.188	0.9044
74	1.048925	22.6	0.7112	1.010	0.6631	1.9860	2.634	0.3381	1.162	0.9047
75	1.043207	21.5	0.6872	1.077	0.6374	1.9568	2.935	0.3105	1.135	0.9049
76	1.037860	20.3	0.6620	1.153	0.6104	0.9278	3.226	0.2828	1.107	0.9050
77	1.032878	19.1	0.6353	1.239	0.5822	0.8991	3.615	0.2552	1.079	0.9049
78	1.028255	17.9	0.6071	1.338	0.5525	0.8706	4.093	0.2277	1.050	0.9047
79	1.023985	16.6	0.5770	1.453	0.5211	0.8427	4.695	0.2008	1.019	0.9042
80	1.020064	15.4	0.5450	1.590	0.4879	0.8156	5.471	0.1736	0.9868	0.9033
81	1.016487	14.1	0.5105	1.755	0.4526	0.7895	6.502	0.1473	0.9529	0.9020
82	1.013253	12.7	0.4732	1.960	0.4149	0.7650	7.925	0.1218	0.9170	0.9001
83	1.010360	11.4	0.4325	2.223	0.3745	0.7426	9.982	0.0974	0.8784	0.8972
84	1.007808	9.9	0.3876	2.576	0.3309	0.7234	13.14	0.0744	0.8365	0.8930
85	1.005599	8.5	0.3377	3.075	0.2838	0.7089	18.40	0.0535	0.7898	0.8870

表 Section106-8 C06 20c

C06 20c			负载电阻=1Ω							
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_{6s}
T	∞	∞	1.159	0.0000	1.529	1.838	0.0000	1.838	1.529	1.159
16	3.878298	112.5	1.138	0.0209	1.500	1.790	0.0350	1.796	1.500	1.158
17	3.655090	109.3	1.135	0.0237	1.496	1.784	0.0396	1.761	1.496	1.158
18	3.456975	106.3	1.132	0.0266	1.492	1.777	0.0445	1.751	1.492	1.158
19	3.279996	103.4	1.129	0.0297	1.488	1.770	0.0497	1.742	1.488	1.158
20	3.120982	100.7	1.125	0.0330	1.483	1.763	0.0552	1.731	1.483	1.158
21	2.977369	98.1	1.122	0.0365	1.478	1.756	0.0611	1.720	1.479	1.158
22	2.847060	95.6	1.118	0.0401	1.473	1.748	0.0673	1.709	1.474	1.157
23	2.728322	93.3	1.114	0.0440	1.468	1.739	0.0738	1.797	1.469	1.157
24	2.619709	91.0	1.110	0.0480	1.463	1.731	0.0807	1.685	1.464	1.157
25	2.520009	88.8	1.106	0.0523	1.457	1.722	0.0879	1.672	1.458	1.157
26	2.428196	86.7	1.102	0.0568	1.451	1.712	0.0955	1.658	1.452	1.157
27	2.343395	84.6	1.097	0.0614	1.445	1.702	0.1035	1.644	1.446	1.156
28	2.264858	82.6	1.092	0.0663	1.439	1.692	0.1118	1.630	1.440	1.156
29	2.191939	80.7	1.087	0.0714	1.432	1.682	0.1205	1.615	1.433	1.156
30	2.124078	78.9	1.082	0.0767	1.425	1.671	0.1297	1.599	1.427	1.156
31	2.060787	77.1	1.077	0.0822	1.418	1.660	0.1392	1.583	1.420	1.155
32	2.001642	75.3	1.071	0.0880	1.410	1.648	0.1492	1.567	1.413	1.155
33	1.946266	73.6	1.065	0.0940	1.403	1.636	0.1597	1.550	1.405	1.155
34	1.894331	72.0	1.059	0.1003	1.395	1.624	0.1706	1.532	1.398	1.154
35	1.845543	70.4	1.053	0.1068	1.386	1.611	0.1820	1.514	1.390	1.154
36	1.799643	68.8	1.047	0.1135	1.378	1.598	0.1939	1.496	1.382	1.154
37	1.756398	67.3	1.040	0.1206	1.369	1.585	0.2063	1.477	1.374	1.153
38	1.715603	65.8	1.033	0.1279	1.360	1.571	0.2192	1.459	1.365	1.153
39	1.677070	64.3	1.026	0.1355	1.351	1.557	0.2328	1.437	1.356	1.152
40	1.640634	62.8	1.019	0.1434	1.341	1.543	0.2469	1.417	1.348	1.152
41	1.608142	61.4	1.012	0.1516	1.332	1.528	0.2617	1.396	1.338	1.151
42	1.573460	60.0	1.004	0.1601	1.321	1.513	0.2772	1.374	1.329	1.151
43	1.542462	58.7	0.9963	0.1689	1.311	1.498	0.2933	1.352	1.319	1.150
44	1.513038	57.3	0.9882	0.1781	1.300	1.482	0.3103	1.330	1.309	1.150
45	1.485086	56.0	0.9798	0.1877	1.289	1.466	0.3280	1.307	1.299	1.149
46	1.458511	54.7	0.9712	0.1976	1.278	1.450	0.3465	1.284	1.289	1.148
47	1.433230	53.4	0.9624	0.2079	1.266	1.433	0.3659	1.260	1.278	1.148
48	1.409164	52.2	0.9533	0.2187	1.255	1.416	0.3863	1.235	1.267	1.147
49	1.386241	50.9	0.9439	0.2298	1.242	1.399	0.4078	1.211	1.256	1.146
50	1.364398	49.7	0.9343	0.2414	1.230	1.381	0.4303	1.185	1.245	1.146
51	1.343572	48.5	0.9244	0.2535	1.217	1.363	0.4540	1.160	1.234	1.145
52	1.323710	47.3	0.9142	0.2661	1.204	1.345	0.4790	1.133	1.222	1.144

续表 Section106-8 C06 20c

C06 20c			负载电阻=1 Ω							
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_{6s}
53	1.704759	46.1	0.9037	0.2792	1.190	1.327	0.5054	1.107	1.210	1.143
54	1.286672	45.0	0.8929	0.2929	1.176	1.308	0.5333	1.080	1.197	1.142
55	1.269406	43.8	0.8819	0.3072	1.162	1.289	0.5628	1.052	1.185	1.141
56	1.252921	42.7	0.8705	0.3221	1.147	1.269	0.5941	1.024	1.172	1.140
57	1.237179	41.5	0.8587	0.3377	1.132	1.249	0.6274	0.9957	1.159	1.139
58	1.222145	40.4	0.8466	0.3541	1.116	1.229	0.6629	0.9668	1.145	1.138
59	1.207787	39.3	0.8342	0.3712	1.100	1.209	0.7008	0.9375	1.131	1.137
60	1.194077	38.1	0.8214	0.3892	1.084	1.188	0.7413	0.9077	1.117	1.136
61	1.180985	37.0	0.8081	0.4081	1.067	1.167	0.7848	0.8775	1.103	1.134
62	1.168486	35.9	0.7945	0.4280	1.049	1.146	0.8317	0.8468	1.088	1.133
63	1.156557	34.8	0.7804	0.4490	1.032	1.125	0.8823	0.8157	1.074	1.131
64	1.145175	33.7	0.7659	0.4712	1.013	1.103	0.9372	0.7843	1.058	1.130
65	1.134320	32.6	0.7509	0.4947	0.994	1.081	0.9970	0.7524	1.043	1.128
66	1.123973	31.5	0.7354	0.5196	0.9744	1.059	1.062	0.7201	1.026	1.126
67	1.114116	30.4	0.7193	0.5462	0.9542	1.037	1.134	0.6874	1.010	1.125
68	1.104733	29.3	0.7027	0.5746	0.9332	1.014	1.213	0.6543	0.9932	1.123
69	1.095809	28.2	0.6854	0.6050	0.9115	0.9995	1.301	0.6208	0.9759	1.120
70	1.087329	27.1	0.6674	0.6377	0.8891	0.9686	1.400	0.5870	0.9582	1.118
71	1.079282	26.0	0.6488	0.6730	0.8657	0.9456	1.511	0.5528	0.9399	1.116
72	1.071656	24.9	0.6293	0.7114	0.8415	0.9225	1.636	0.5184	0.9211	1.113
73	1.064439	23.7	0.6089	0.7533	0.8162	0.8994	1.780	0.4836	0.9017	1.110
74	1.057623	22.6	0.5876	0.7994	0.7898	0.8762	1.947	0.4486	0.8816	1.107
75	1.051198	21.5	0.5652	0.8503	0.7621	0.8580	2.141	0.4134	0.8608	1.104
76	1.045158	20.3	0.5417	0.9073	0.7331	0.8299	2.372	0.3781	0.8393	1.110
77	1.039495	19.1	0.5168	0.9716	0.7025	0.8071	2.650	0.3426	0.8168	1.096
78	1.034204	17.9	0.4905	1.045	0.6701	0.7845	2.990	0.3072	0.7932	1.091
79	1.029281	16.6	0.4624	1.130	0.6358	0.7625	3.415	0.2722	0.7685	1.086
80	1.024722	15.4	0.4323	1.230	0.5991	0.7411	3.961	0.2370	0.7423	1.080
81	1.020525	14.1	0.3999	1.350	0.5598	0.7206	4.677	0.2026	0.7144	1.073
82	1.016691	12.7	0.3648	1.499	0.5174	0.5016	5.659	0.1690	0.6845	1.064
83	1.013219	11.4	0.3263	1.687	0.4715	0.6845	7.062	0.1366	0.6518	1.055
84	1.010114	9.9	0.2837	1.938	0.4214	0.6702	9.190	0.1058	0.6158	1.043
85	1.007381	8.5	0.2358	2.288	0.3664	0.6603	12.67	0.0772	0.5750	1.027

表 Section106-9 C07 20

C07 20			负载电阻=1Ω									
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7
T	∞	∞	1335	0.0000	1389	2.240	0.0000	1515	2.240	0.0000	1389	1335
26	2.281172	105.4	1310	0.0290	1358	2.100	0.1353	1357	2.049	0.0955	1281	1247
27	2.202689	103.0	1308	0.0314	1355	2.089	0.1465	1345	2.034	0.1034	1272	1240
28	2.130054	100.7	1306	0.0339	1353	2.078	0.1582	1332	2.019	0.1117	1263	1233
29	2.062665	98.5	1304	0.0364	1350	2.066	0.1704	1319	2.003	0.1204	1254	1226
30	2.000000	96.3	1302	0.0391	1347	2.054	0.1833	1305	1.987	0.1295	1245	1218
31	1.941604	94.2	1299	0.0420	1344	2.042	0.1966	1292	1.970	0.1390	1235	1210
32	1.887080	92.2	1297	0.0449	1341	2.029	0.2106	1277	1.952	0.1490	1225	1202
33	1.836078	90.2	1294	0.0479	1338	2.016	0.2252	1262	1.934	0.1593	1214	1193
34	1.788292	88.3	1292	0.0511	1335	2.002	0.2404	1247	1.916	0.1702	1204	1184
35	1.743447	86.4	1289	0.0544	1332	1.988	0.2562	1232	1.897	0.1815	1193	1175
36	1.701302	84.6	1286	0.0578	1328	1.973	0.2727	1216	1.878	0.1932	1181	1165
37	1.661640	82.8	1283	0.0614	1324	1.959	0.2900	1199	1.858	0.2055	1169	1155
38	1.624269	81.0	1280	0.0650	1321	1.943	0.3079	1183	1.837	0.2183	1157	1145
39	1.589016	79.3	1277	0.0689	1317	1.928	0.3267	1165	1.817	0.2317	1145	1135
40	1.555724	77.6	1274	0.0728	1313	1.912	0.3462	1148	1.795	0.2456	1132	1124
41	1.524253	76.0	1270	0.0770	1308	1.895	0.3666	1130	1.773	0.2601	1117	1112
42	1.494477	74.3	1267	0.0812	1304	1.879	0.3879	1112	1.751	0.2753	1105	1102
43	1.466279	72.8	1263	0.0857	1300	1.862	0.4101	1093	1.728	0.2911	1092	1090
44	1.439557	71.2	1259	0.0903	1295	1.844	0.4332	1074	1.705	0.3076	1077	1078
45	1.414214	69.7	1255	0.0950	1290	1.826	0.4575	1055	1.682	0.3248	1063	1066
46	1.390164	68.2	1251	0.1000	1285	1.808	0.4828	1035	1.657	0.3428	1048	1053
47	1.367327	66.7	1247	0.1051	1280	1.789	0.5093	1015	1.633	0.3617	1033	1040
48	1.345633	65.2	1243	0.1105	1275	1.770	0.5370	0.9944	1608	0.3814	1017	1027
49	1.325013	63.7	1238	0.1160	1269	1.751	0.5661	0.9736	1583	0.4020	1001	1013
50	1.305407	62.3	1234	0.1217	1264	1.731	0.5965	0.9525	1557	0.4235	0.9850	0.9992
51	1.286760	60.9	1229	0.1277	1258	1.711	0.6286	0.9310	1531	0.4462	0.9684	0.9848
52	1.236018	59.5	1224	0.1339	1252	1.690	0.6622	0.9093	1504	0.4699	0.9514	0.9699
53	1.252138	58.1	1219	0.1404	1246	1.669	0.6977	0.8872	177	0.4948	0.9340	0.9547
54	1.236068	56.8	1213	0.1471	1239	1.648	0.7351	0.8648	1450	0.5211	0.9163	0.9391
55	1.220775	55.4	1208	0.1541	1232	1.626	0.7745	0.8420	1422	0.5487	0.8981	0.9230
56	1.206218	54.1	1202	0.1614	1225	1.604	0.8163	0.8190	1394	0.5778	0.8796	0.9065
57	1.192363	52.7	1196	0.1690	1218	1.581	0.8605	0.7957	1365	0.6085	0.8607	0.8896
58	1.179178	51.4	1190	0.1770	1211	1.558	0.9075	0.7721	1336	0.6411	0.8414	0.8722
59	1.166633	50.1	1183	0.1853	1203	1.535	0.9576	0.7482	1307	0.6755	0.8217	0.8543
60	1.154701	48.8	1177	0.1939	1195	1.511	1.011	0.7240	1279	0.7121	0.8016	0.8360
61	1.143354	47.5	1170	0.2030	1186	1.487	1.068	0.6995	1248	0.7510	0.7811	0.8171
62	1.132570	46.2	1163	0.2125	1177	1.463	1.129	0.6748	1218	0.7925	0.7602	0.7976

续表 Section106-9 C07 20

C07 20			负载电阻=1Ω									
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7
63	1122326	44.9	1.155	0.2225	1.168	1.438	1.195	0.6498	1.188	0.8369	0.7389	0.7776
64	1112602	43.7	1.147	0.2331	1.159	1.412	1.267	0.6245	1.157	0.8845	0.7171	0.7570
65	1103378	42.4	1.139	0.2441	1.149	1.386	1.344	0.5990	1.126	0.9357	0.6949	0.7357
66	1094636	41.1	1.130	0.2559	1.138	1.360	1.428	0.5732	1.095	0.9909	0.6722	0.7138
67	1086360	39.8	1.121	0.2682	1.127	1.333	1.620	0.5472	1.064	1.051	0.6490	0.6911
68	1078535	38.5	1.112	0.2814	1.116	1.306	1.622	0.5209	1.032	1.116	0.6254	0.6676
69	1071145	37.2	1.101	0.2956	1.104	1.278	1.734	0.4945	1.001	1.187	0.6013	0.6433
70	1064178	35.9	1.091	0.3102	1.091	1.260	1.859	0.4678	0.9689	1.265	0.5767	0.6181
71	1057621	34.6	1.080	0.3262	1.077	1.221	1.998	0.4409	0.9371	1.351	0.5516	0.5920
72	1051462	33.3	1.068	0.3433	1.063	1.192	2.156	0.4138	0.9051	1.446	0.5259	0.5647
73	1045692	32.0	1.055	0.3618	1.048	1.162	2.336	0.3865	0.8731	1.553	0.4997	0.5363
74	1040299	30.7	1.042	0.3818	1.032	1.131	2.543	0.3591	0.8412	1.673	0.4729	0.5066
75	1035276	29.3	1.028	0.4037	1.014	1.100	2.784	0.3315	0.8093	1.810	0.4455	0.4754
76	1030614	27.9	1.013	0.4278	0.9953	1.069	3.068	0.3038	0.7776	1.968	0.4175	0.4426
77	1026304	26.5	0.9960	0.4544	0.9749	1.036	3.408	0.2760	0.7460	2.151	0.3888	0.4079
78	1022341	25.1	0.9782	0.4841	0.9527	1.004	3.822	0.2483	0.7148	2.368	0.3595	0.3710
79	1018717	23.6	0.9588	0.5177	0.9282	0.9699	4.337	0.2205	0.6841	2.628	0.3295	0.3336
80	1015427	22.1	0.9376	0.5562	0.9011	0.9356	4.994	0.1929	0.6540	2.946	0.2987	0.2892
81	1012465	20.6	0.9142	0.6011	0.8707	0.9006	5.858	0.1656	0.6248	3.346	0.2672	0.2431
82	1009828	18.9	0.8881	0.6545	0.8363	0.8648	7.036	0.1387	0.5968	3.863	0.2350	0.1926
83	1007510	17.3	0.8587	0.7197	0.7967	0.8283	8.223	0.1125	0.5706	4.559	0.2021	0.1363
84	1005508	15.5	0.8252	0.8023	0.7504	0.7911	11.29	0.0873	0.5470	5.545	0.1685	0.0725
85	1003820	13.6	0.7863	0.9121	0.6953	0.7533	15.55	0.0636	0.5275	7.042	0.1345	0.0016

表 Section106-10 C08 20b

C08 20b			负载电阻=0.6667 Ω										
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_{8s}
T	∞	∞	1.343	0.0000	1.398	2.261	0.0000	1.538	2.307	0.0000	1.507	2.097	0.8954
31	1.974165	111.4	1.289	0.0611	1.331	2.051	0.1878	1.319	2.028	0.1353	1.348	1.977	0.8980
32	1.918381	109.1	1.285	0.0644	1.326	2.037	0.2011	1.305	2.010	0.1448	1.337	1.969	0.8982
33	1.866186	106.8	1.281	0.0687	1.321	2.023	0.2150	1.291	1.992	0.1548	1.327	1.961	0.8984
34	1.817268	104.6	1.277	0.0733	1.317	2.008	0.2294	1.276	1.973	0.1651	1.315	1.952	0.8986
35	1.771347	102.4	1.273	0.0781	1.311	1.993	0.2445	1.261	1.953	0.1759	1.304	1.943	0.8987
36	1.728178	100.3	1.268	0.0830	1.306	1.978	0.2602	1.245	1.933	0.1871	1.292	1.934	0.8989
37	1.687539	98.3	1.264	0.0881	1.301	1.962	0.2765	1.229	1.912	0.1988	1.280	1.925	0.8991
38	1.649233	96.3	1.259	0.0934	1.295	1.946	0.2936	1.213	1.891	0.2110	1.267	1.916	0.8993
39	1.613085	94.3	1.255	0.0990	1.289	1.929	0.3113	1.196	1.869	0.2236	1.254	1.906	0.8995
40	1.578935	92.4	1.250	0.1047	1.283	1.912	0.3298	1.179	1.847	0.2368	1.241	1.896	0.8997
41	1.546640	90.5	1.245	0.1107	1.277	1.895	0.3491	1.161	1.824	0.2505	1.228	1.885	0.9000
42	1.516070	88.7	1.239	0.1169	1.271	1.877	0.3692	1.143	1.801	0.2647	1.214	1.875	0.9002
43	1.487108	86.8	1.234	0.1233	1.264	1.859	0.3902	1.125	1.777	0.2796	1.200	1.864	0.9004
44	1.459648	85.1	1.228	0.1300	1.257	1.840	0.4120	1.106	1.753	0.2950	1.185	1.852	0.9006
45	1.433592	83.3	1.222	0.1369	1.250	1.821	0.4348	1.087	1.728	0.3110	1.170	1.841	0.9009
46	1.408853	81.6	1.217	0.1441	1.243	1.801	0.4586	1.068	1.703	0.3278	1.155	1.829	0.9011
47	1.385348	79.9	1.210	0.1516	1.235	1.781	0.4835	1.048	1.677	0.3452	1.139	1.817	0.9014
48	1.363006	78.2	1.204	0.1594	1.228	1.761	0.5095	1.028	1.651	0.3634	1.123	1.805	0.9016
49	1.341757	76.5	1.197	0.1674	1.220	1.740	0.5368	1.008	1.624	0.3823	1.107	1.792	0.9019
50	1.321539	74.9	1.191	0.1758	1.221	1.719	0.5653	0.9869	1.597	0.4021	1.090	1.779	0.9021

续表 Section106-10 C08 20b

C08 20b			负载电阻=0.6667 Ω										
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_{8s}
51	1302296	73.3	1.184	0.1845	1.203	1.698	0.5951	0.9658	1.569	0.4227	1.073	1.766	0.9024
52	1283974	71.7	1.177	0.1936	1.194	1.676	0.6265	0.9444	1.541	0.4443	1.055	1.752	0.9028
53	1266526	70.1	1.169	0.2030	1.185	1.653	0.6594	0.9226	1.512	0.4668	1.037	1.738	0.9029
54	1249906	68.6	1.161	0.2129	1.176	1.630	0.6941	0.9006	1.483	0.4904	1.019	1.724	0.9032
55	1234073	67.0	1.153	0.2231	1.167	1.607	0.7306	0.8782	1.453	0.5152	1.001	1.710	0.9035
56	1218988	65.5	1.145	0.2338	1.157	1.583	0.7691	0.8555	1.423	0.5412	0.9816	1.695	0.9038
57	1204616	64.0	1.136	0.2450	1.146	1.559	0.8098	0.8326	1.393	0.5684	0.9622	1.680	0.9041
58	1190925	62.5	1.128	0.2566	1.136	1.535	0.8529	0.8093	1.362	0.5971	0.9425	1.664	0.9044
59	1177883	61.0	1.119	0.2688	1.125	1.509	0.8986	0.7857	1.331	0.6273	0.9223	1.648	0.9046
60	1165463	59.5	1.109	0.2816	1.114	1.484	0.9472	0.7619	1.299	0.6592	0.9017	1.632	0.9049
61	1153638	58.0	1.099	0.2950	1.102	1.458	0.9990	0.7378	1.267	0.6929	0.8808	1.615	0.9053
62	1142384	56.5	1.089	0.3090	1.090	1.432	1.054	0.7134	1.234	0.7286	0.8593	1.598	0.9056
63	1131677	55.0	1.079	0.3238	1.078	1.405	1.114	0.6887	1.201	0.7665	0.8375	1.581	0.9059
64	1121498	53.6	1.068	0.3393	1.065	1.377	1.177	0.6638	1.168	0.8069	0.8152	1.563	0.9062
65	1111827	52.1	1.056	0.3557	1.052	1.350	1.246	0.6387	1.134	0.8499	0.7925	1.544	0.9065
66	1102644	50.6	1.044	0.3730	1.038	1.321	1.320	0.6132	1.100	0.8959	0.7693	1.526	0.9068
67	1093934	49.2	1.032	0.3913	1.023	1.292	1.401	0.5876	1.065	0.9452	0.7457	1.506	0.9071
68	1085681	47.7	1.019	0.4108	1.008	1.263	1.489	0.5617	1.030	0.9984	0.7215	1.487	0.9075
69	1077870	46.2	1.006	0.4315	0.9929	1.233	1.585	0.5356	0.9947	1.056	0.6969	1.466	0.9078
70	1070487	44.8	0.9917	0.4536	0.9766	1.202	1.692	0.5092	0.9590	1.118	0.6717	1.445	0.9081
71	1063520	43.3	0.9769	0.4772	0.9597	1.171	1.809	0.4826	0.9230	1.186	0.6460	1.424	0.9084

续表 Section106-10 C08 20b

C08 20b			负载电阻=0.6667 Ω										
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_{8s}
72	1.056959	41.8	0.9614	0.5026	0.9419	1.140	1.941	0.4559	0.8867	1.261	0.6197	1.402	0.9087
73	1.050791	40.3	0.9450	0.5300	0.9232	1.107	2.069	0.4289	0.6501	1.343	0.5928	1.379	0.9091
74	1.045007	38.7	0.9277	0.5598	0.9036	1.074	2.357	0.4017	0.8131	1.434	0.5653	1.355	0.9094
75	1.039599	37.2	0.9094	0.5922	0.8829	1.040	2.449	0.3743	0.7759	1.537	0.5371	1.331	0.9097
76	1.034558	35.6	0.8899	0.6278	0.8611	1.006	2.671	0.3468	0.7384	1.652	0.5082	1.305	0.9100
77	1.029877	34.0	0.8691	0.6670	0.8379	0.9701	2.931	0.3191	0.7007	1.784	0.4785	1.279	0.9103
78	1.025550	32.4	0.8469	0.7108	0.8131	0.9337	3.241	0.2913	0.6628	1.936	0.4480	1.251	0.9105
79	1.021570	30.7	0.8228	0.7601	0.7866	0.8964	3.616	0.2633	0.6247	2.114	0.4166	1.222	0.9108
80	1.017932	29.0	0.7968	0.8162	0.7581	0.8579	4.079	0.2352	0.5864	2.326	0.3843	1.192	0.9110
81	1.014633	27.2	0.7683	0.8812	0.7271	0.8183	4.667	0.2071	0.5482	2.584	0.3509	1.159	0.9111
82	1.011669	25.3	0.7368	0.9577	0.6931	0.7774	5.436	0.1790	0.5100	2.907	0.3162	1.125	0.9111
83	1.009036	23.3	0.7017	1.050	0.6555	0.7351	6.484	0.1509	0.4719	3.323	0.2803	1.088	0.9110
84	1.006735	21.3	0.6619	1.165	0.6133	0.6911	7.989	0.1231	0.4342	3.884	0.2428	1.047	0.9106
85	1.004764	19.0	0.6159	1.315	0.5649	0.6453	10.12	0.0958	0.3973	4.688	0.2036	1.003	0.9098

表 Section106-11 C08 20c

C08 20c			负载电阻=1 Ω										
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_{8s}
T	∞	∞	1.215	0.0000	1.523	1.963	0.0000	1.840	1.840	0.0000	1.963	1.523	1.215
31	2.007273	111.4	1.159	0.0527	1.457	1.782	0.1508	1.589	1.628	0.1002	1.755	1.442	1.210
32	1.950201	109.1	1.155	0.0564	1.452	1.770	0.1614	1.573	1.614	0.1073	1.741	1.437	1.210
33	1.896788	106.8	1.151	0.0602	1.448	1.758	0.1725	1.556	1.600	0.1147	1.727	1.431	1.210
34	1.846713	104.6	1.148	0.0642	1.443	1.746	0.1841	1.539	1.585	0.1223	1.713	1.425	1.210
35	1.799694	102.4	1.143	0.0683	1.438	1.733	0.1962	1.521	1.570	0.1304	1.697	1.420	1.209
36	1.755478	100.3	1.138	0.0726	1.432	1.720	0.2088	1.508	1.555	0.1387	1.682	1.413	1.208
37	1.713841	98.3	1.134	0.0770	1.427	1.706	0.2219	1.485	1.539	0.1474	1.666	1.407	1.208
38	1.674581	96.3	1.129	0.0816	1.421	1.692	0.2355	1.466	1.522	0.1565	1.650	1.401	1.207
39	1.637519	94.3	1.124	0.0864	1.416	1.678	0.2497	1.446	1.506	0.1659	1.633	1.394	1.207
40	1.602492	92.4	1.119	0.0914	1.410	1.663	0.2645	1.426	1.489	0.1757	1.616	1.387	1.206
41	1.569355	90.5	1.114	0.0965	1.404	1.648	0.2799	1.406	1.471	0.1859	1.598	1.380	1.206
42	1.537975	88.7	1.109	0.1018	1.397	1.633	0.2959	1.385	1.453	0.1965	1.580	1.373	1.205
43	1.508233	86.8	1.103	0.1073	1.391	1.617	0.3127	1.364	1.435	0.2075	1.562	1.365	1.205
44	1.480020	85.1	1.097	0.1131	1.384	1.601	0.3301	1.342	1.416	0.2190	1.543	1.358	1.204
45	1.453236	83.3	1.092	0.1190	1.377	1.585	0.3483	1.320	1.397	0.2310	1.523	1.350	1.203
46	1.427793	81.6	1.085	0.1251	1.370	1.568	0.3673	1.297	1.378	0.2435	1.503	1.342	1.203
47	1.403607	79.9	1.079	0.1315	1.362	1.551	0.3871	1.274	1.358	0.2565	1.492	1.334	1.202
48	1.380603	78.2	1.073	0.1381	1.355	1.534	0.4078	1.251	1.338	0.2701	1.462	1.325	1.201
49	1.358712	76.5	1.066	0.1450	1.352	1.516	0.4295	1.227	1.317	0.2842	1.441	1.317	1.200
50	1.337870	74.9	1.059	0.1521	1.349	1.498	0.4521	1.203	1.296	0.2990	1.419	1.308	1.200

续表 Section106-11 C08 20c

C08 20c			负载电阻=1 Ω										
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_{8s}
51	1318020	73.3	1.052	0.1595	1.330	1.479	0.4759	1.178	1.275	0.3144	1.397	1.299	1.199
52	1.299107	71.7	1.045	0.1672	1.322	1.460	0.5008	1.153	1.253	0.3305	1.374	1.290	1.198
53	1.289210	70.1	1.037	0.1751	1.313	1.441	0.5269	1.128	1.231	0.3474	1.351	1.280	1.197
54	1.263899	68.6	1.029	0.1834	1.304	1.421	0.5543	1.102	1.208	0.3651	1.328	1.270	1.196
55	1.247516	67.0	1.021	0.1920	1.294	1.401	0.5832	1.076	1.186	0.3830	1.304	1.260	1.195
56	1.231893	65.5	1.013	0.2010	1.285	1.381	0.6137	1.049	1.162	0.4030	1.279	1.250	1.194
57	1.216995	64.0	1.004	0.2103	1.274	1.360	0.6458	1.022	1.139	0.4234	1.254	1.240	1.193
58	1.202788	62.5	0.9956	0.2201	1.264	1.339	0.6798	0.9944	1.115	0.4449	1.228	1.229	1.192
59	1.189241	61.0	0.9864	0.2302	1.253	1.318	0.7159	0.9666	1.090	0.4776	1.202	1.218	1.190
60	1.176326	59.5	0.9770	0.2408	1.242	1.296	0.7541	0.9384	1.066	0.4914	1.176	1.207	1.189
61	1.164014	58.0	0.9672	0.2519	1.231	1.274	0.7948	0.9099	1.041	0.5167	1.149	1.195	1.188
62	1.152282	56.5	0.9570	0.2635	1.219	1.251	0.8383	0.8810	1.015	0.5434	1.121	1.183	1.186
63	1.141107	55.0	0.9465	0.2756	1.206	1.228	0.8848	0.8517	0.9897	0.5718	1.093	1.171	1.185
64	1.130466	53.6	0.9356	0.2884	1.193	1.205	0.9346	0.8220	0.9636	0.6020	1.064	1.159	1.183
65	1.120340	52.1	0.9243	0.3018	1.180	1.181	0.9883	0.7921	0.9373	0.6342	1.035	1.146	1.182
66	1.110711	50.6	0.9125	0.3159	1.166	1.157	1.046	0.7617	0.9106	0.6687	1.005	1.133	1.180
67	1.101561	49.2	0.9003	0.3308	1.152	1.132	1.109	0.7311	0.8835	0.7056	0.9744	1.120	1.178
68	1.092874	47.7	0.8876	0.3465	1.137	1.107	1.178	0.7000	0.8561	0.7454	0.9433	1.106	1.176
69	1.084636	46.2	0.8743	0.3632	1.121	1.082	1.253	0.6687	0.8285	0.7884	0.9115	1.091	1.176
70	1.076833	44.8	0.8605	0.3810	1.105	1.056	1.335	0.6370	0.8005	0.8350	0.8791	1.077	1.172
71	1.069453	43.3	0.8460	0.4000	1.088	1.029	1.426	0.6049	0.7722	0.8858	0.8460	1.061	1.170

续表 Section106-11 C08 20c

C08 20c			负载电阻=1 Ω										
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_{8s}
72	1.062484	41.8	0.9308	0.4202	1.070	1.002	1.528	0.5726	0.7435	0.9414	0.8121	1.046	1.167
73	1.055915	40.3	0.8148	0.4420	1.051	0.9745	1.642	0.5390	0.7146	1.003	0.7775	1.029	1.165
74	1.049736	38.7	0.7979	0.4655	1.032	0.9464	1.771	0.5069	0.6855	1.071	0.7421	1.013	1.162
75	1.043940	37.2	0.7801	0.4911	1.011	0.9177	1.918	0.4735	0.6560	1.147	0.7059	0.9950	1.159
76	1.038518	35.6	0.7613	0.5189	0.9886	0.8884	2.088	0.4399	0.6262	1.233	0.6684	0.9767	1.155
77	1.033463	34.0	0.7412	0.5496	0.9650	0.8584	2.286	0.4059	0.5963	1.330	0.6306	0.9579	1.152
78	1.028769	32.4	0.7197	0.5836	0.9398	0.8276	2.522	0.3717	0.5661	1.442	0.5914	0.9374	1.148
79	1.024431	30.7	0.6967	0.6216	0.9427	0.7961	2.806	0.3371	0.5357	1.573	0.5510	0.9162	1.144
80	1.020444	29.0	0.6717	0.6647	0.8833	0.7638	3.156	0.3023	0.5051	1.729	0.5094	0.8937	1.139
81	1.016805	27.2	0.6445	0.7142	0.8513	0.7305	3.598	0.2673	0.4741	1.918	0.4664	0.8697	1.134
82	1.013513	25.3	0.6146	0.7722	0.8160	0.6961	4.174	0.2321	0.4436	2.152	0.4217	0.8438	1.128
83	1.010565	23.3	0.5813	0.8417	0.7767	0.6606	4.954	0.1968	0.4129	2.453	0.3753	0.8156	1.122
84	1.007963	21.3	0.5436	0.9276	0.7321	0.6238	6.070	0.1616	0.3824	2.856	0.3268	0.7845	1.114
85	1.005708	19.0	0.5001	1.039	0.6805	0.5856	7.781	0.1267	0.3525	3.428	0.2758	0.7494	1.105

表 Section106-12 C09 20

C09 20			负载电阻=1Ω												
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9
T	∞	∞	∞	0.0000	1.405	2.274	0.0000	1.551	2.339	0.0000	1.551	2.274	0.0000	1.405	1.349
36	1.701302	116.1	1.318	0.0354	1.367	2.067	0.2078	1.310	1.934	0.2703	1.247	1.949	0.1273	1.263	1.233
37	1.661640	113.8	1.316	0.0376	1.365	2.055	0.2207	1.297	1.912	0.2873	1.230	1.931	0.1352	1.254	1.226
38	1.624269	111.5	1.315	0.0399	1.362	2.043	0.2341	1.283	1.889	0.3050	1.213	1.912	0.1435	1.246	1.219
39	1.589016	109.3	1.313	0.0422	1.360	2.030	0.2481	1.269	1.866	0.3234	1.196	1.893	0.1521	1.237	1.212
40	1.555724	107.2	1.310	0.0446	1.357	2.017	0.2626	1.254	1.842	0.3426	1.178	1.874	0.1610	1.228	1.204
41	1.524253	105.1	1.308	0.0471	1.355	2.004	0.2777	1.240	1.817	0.3626	1.160	1.854	0.1703	1.219	1.197
42	1.494477	103.0	1.306	0.0498	1.352	1.991	0.2934	1.224	1.792	0.3834	1.142	1.834	0.1800	1.209	1.189
43	1.466279	100.9	1.304	0.0525	1.349	1.977	0.3097	1.209	1.767	0.4052	1.123	1.813	0.1901	1.199	1.180
44	1.439557	98.0	1.301	0.0553	1.346	1.963	0.3267	1.193	1.741	0.4278	1.104	1.792	0.2005	1.189	1.172
45	1.414214	97.0	1.299	0.0582	1.343	1.984	0.3444	1.177	1.714	0.4515	1.084	1.770	0.2114	1.178	1.163
46	1.390164	95.1	1.296	0.0612	1.340	1.934	0.3628	1.160	1.687	0.4762	1.064	1.748	0.2228	1.168	1.154
47	1.367327	93.2	1.294	0.0643	1.336	1.918	0.3820	1.143	1.659	0.5020	1.044	1.725	0.2346	1.157	1.145
48	1.345633	91.3	1.291	0.0676	1.333	1.903	0.4019	1.126	1.631	0.5289	1.023	1.702	0.2468	1.145	1.135
49	1.325013	89.5	1.288	0.0710	1.329	1.887	0.4227	1.108	1.603	0.5571	1.002	1.679	0.2596	1.134	1.126
50	1.305407	87.7	1.285	0.0745	1.326	1.871	0.4444	1.00	1.574	0.5867	0.9811	1.655	0.2730	1.121	1.116
51	1.286760	85.9	1.282	0.0781	1.322	1.854	0.4671	1.071	1.544	0.6176	0.9595	1.631	0.2869	1.109	1.105
52	1.269018	83.1	1.279	0.0819	1.318	1.837	0.4908	1.052	1.514	0.6501	0.9377	1.606	0.3014	1.096	1.094
53	1.252136	82.4	1.275	0.0858	1.314	1.820	0.5155	1.033	1.484	0.6843	0.9155	1.581	0.3166	1.083	1.083
54	1.236068	80.6	1.272	0.0899	1.310	1.802	0.5414	1.014	1.453	0.7202	0.8930	1.555	0.3324	1.070	1.072
55	1.220775	78.6	1.268	0.0942	1.305	1.784	0.5685	0.9939	1.421	0.7580	0.8703	1.529	0.3490	1.056	1.060

续表 Section106-12 C09 20

C09 20			负载电阻=1Ω												
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9
56	1.206218	76.9	1.265	0.0984	1.301	1.765	0.5969	0.9737	1.389	0.7979	0.8472	1.502	0.3664	1.042	1.048
57	1.192363	75.2	1.261	0.1032	1.296	1.746	0.6268	0.9521	1.357	0.8401	0.8239	1.476	0.3846	1.028	1.036
58	1.179178	73.5	1.257	0.1080	1.291	1.726	0.6582	0.9321	1.324	0.8847	0.8003	1.448	0.4037	1.013	1.023
59	1.166633	71.8	1.253	0.1131	1.286	1.707	0.6912	0.9108	1.291	0.9321	0.7764	1.420	0.4238	0.9974	1.010
60	1.154701	70.1	1.248	0.1183	1.281	1.686	0.7261	0.8891	1.257	0.9825	0.7523	1.392	0.4449	0.9816	0.9959
61	1.143354	68.5	1.244	0.1238	1.275	1.666	0.7629	0.8670	1.223	1.036	0.7279	1.363	0.4671	0.9654	0.9817
62	1.132570	66.8	1.239	0.1296	1.269	1.644	0.8019	0.8446	1.189	1.093	0.7033	1.334	0.4906	0.9487	0.9671
63	1.122326	65.2	1.234	0.1356	1.263	1.623	0.8433	0.8217	1.154	1.155	0.6785	1.305	0.5155	0.9315	0.9520
64	1.112602	63.5	1.229	0.1420	1.257	1.600	0.8873	0.7985	1.119	1.221	0.6534	1.275	0.5418	0.9138	0.9364
65	1.10338	61.9	1.223	0.1487	1.250	1.578	0.9342	0.7749	1.083	1.292	0.6281	1.244	0.5698	0.8956	0.9202
66	1.094636	60.2	1.217	0.1557	1.243	1.554	0.9844	0.7509	1.047	1.369	0.6026	1.213	0.5995	0.8768	0.9034
67	1.086360	58.6	1.211	0.1631	1.236	1.531	1.038	0.7265	1.011	1.453	0.5769	1.182	0.6313	0.8574	0.8860
68	1.078535	56.9	1.205	0.1710	1.228	1.506	1.096	0.7017	0.9738	1.544	0.5510	1.150	0.6653	0.8374	0.8679
69	1.071145	55.2	1.198	0.1793	1.220	1.481	1.159	0.6764	0.9367	1.644	0.5250	1.118	0.7019	0.8167	0.8491
70	1.064178	53.6	1.191	0.1882	1.211	1.455	1.227	0.6507	0.8992	1.754	0.4987	1.085	0.7413	0.7953	0.8294
71	1.057621	51.9	1.184	0.1977	1.202	1.429	1.301	0.6245	0.8614	1.876	0.4723	1.052	0.7840	0.7732	0.8089
72	1.051462	50.2	1.176	0.2078	1.192	1.401	1.382	0.5979	0.8233	2.013	0.4457	1.018	0.8304	0.7503	0.7875
73	1.045692	48.5	1.167	0.2187	1.182	1.373	1.471	0.5708	0.7849	2.166	0.4190	0.9841	0.8812	0.7265	0.7650
74	1.040299	46.8	1.158	0.2305	1.171	1.344	1.571	0.5432	0.7463	2.339	0.3922	0.9494	0.9370	0.7017	0.7414
75	1.035276	45.1	1.148	0.2433	1.159	1.314	1.682	0.5150	0.7073	2.538	0.3652	0.9141	0.9988	0.6760	0.7165
76	1.030614	43.3	1.137	0.2572	1.146	1.283	1.807	0.4862	0.6681	2.768	0.3381	0.8782	1.068	0.6491	0.6902

续表 Section106-12 C09 20

C09 20			负载电阻=1Ω												
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9
77	1.026304	41.5	1.126	0.2724	1.132	1.251	1.950	0.4569	0.6287	3.036	0.3110	0.8418	1.146	0.6211	0.6622
78	1.022341	39.6	1.113	0.2893	1.117	1.218	2.115	0.4268	0.5891	3.355	0.2838	0.8048	1.234	0.5917	0.6323
79	1.018717	37.7	1.099	0.3081	1.100	1.183	2.308	0.3961	0.5493	3.741	0.2564	0.7669	1.336	0.5607	0.6004
80	1.015427	35.8	1.084	0.3292	1.082	1.146	2.538	0.3645	0.5094	4.216	0.2291	0.7286	1.455	0.5281	0.5658
81	1.012465	33.8	1.067	0.3534	1.061	1.108	2.817	0.3321	0.4693	4.817	0.2019	0.6895	1.597	0.4935	0.5281
82	1.009828	31.7	1.047	0.3814	1.038	1.067	3.166	0.2986	0.4293	5.599	0.1746	0.6497	1.770	0.4567	0.4868
83	1.007510	29.5	1.025	0.4145	1.011	1.024	3.616	0.2642	0.3894	6.660	0.1476	0.6090	1.986	0.4172	0.4407
84	1.005508	27.1	0.9995	0.4548	0.9794	0.9782	4.223	0.2282	0.3496	8.175	0.1208	0.5676	2.268	1.3747	0.3886
85	1.003820	24.6	0.9688	0.5054	0.9411	0.9284	5.093	0.1909	0.3103	10.50	0.0944	0.5253	2.655	1.3283	0.3281

表 Section106-13 C10 20b

C10 20b			负载电阻=0.6667 Ω													
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9	Z_{10s}
T	∞	∞	1353	0.0000	1410	2283	0.0000	1559	2.357	0.0000	1571	2.338	0.0000	1522	2.114	0.9019
46	1.402036	108.4	1.267	0.0953	1.304	1.908	0.3703	1.158	1.702	0.4577	1.092	1.787	0.2327	1.258	1.913	0.9056
47	1.378775	106.3	1.263	0.1002	1.298	1.891	0.3898	1.141	1.674	0.4823	1.072	1.763	0.2448	1.246	1.904	0.9058
48	1.356667	104.2	1.258	0.1053	1.293	1.874	0.4102	1.123	1.646	0.5079	1.052	1.738	0.2574	1.233	1.894	0.9059
49	1.385647	102.1	1.254	0.1106	1.287	1.857	0.4315	1.105	1.617	0.5347	1.031	1.714	0.2705	1.221	1.885	0.9061
50	1.315651	100.1	1.249	0.1161	1.282	1.839	0.4536	1.087	1.588	0.5628	1.010	1.688	0.2841	1.208	1.874	0.9063
51	1.296624	98.1	1.244	0.1218	1.276	1.821	0.4767	1.068	1.558	0.5921	0.9887	1.663	0.2983	1.194	1.864	0.9064
52	1.278514	96.1	1.239	0.1277	1.270	1.802	0.5009	1.049	1.528	0.6229	0.9670	1.636	0.3130	1.180	1.853	0.9066
53	1.261271	94.1	1.234	0.1339	1.263	1.783	0.5262	1.029	1.497	0.6552	0.9450	1.610	0.3284	1.166	1.842	0.9068
54	1.244851	92.2	1.229	0.1403	1.257	1.763	0.5526	1.010	1.466	0.6891	0.9227	1.582	0.3444	1.151	1.831	0.9069
55	1.229414	90.2	1.223	0.1470	1.250	1.743	0.5803	0.9895	1.484	0.7247	0.9002	1.555	0.3611	1.136	1.820	0.9071
56	1.214321	88.3	1.217	0.1539	1.243	1.723	0.6093	0.9689	1.402	0.7623	0.8773	1.527	0.3786	1.121	1.808	0.9073
57	1.200137	86.4	1.211	0.1612	1.236	1.702	0.9398	0.9481	1.369	0.8019	0.8541	1.498	0.3969	1.105	1.795	0.9075
58	1.186629	84.5	1.205	0.1687	1.228	1.681	0.6719	0.9268	1.386	0.8437	0.8307	1.469	0.4160	1.089	1.783	0.9077
59	1.173768	82.7	1.198	0.1767	1.220	1.659	0.7056	0.9052	1.308	0.8880	0.8070	1.439	0.4360	1.073	1.770	0.9079
60	1.161525	80.8	1.192	0.1849	1.212	1.637	0.7212	0.8833	1.269	0.9350	0.7830	1.409	0.4570	1.056	1.757	0.9081
61	1.149873	79.0	1.185	0.1936	1.204	1.614	0.7789	0.8610	1.284	0.9850	0.7587	1.378	0.4790	1.038	1.743	0.9083
62	1.138790	77.1	1.177	0.2026	1.195	1.591	0.8187	0.8383	1.199	1.038	0.7342	1.347	0.5022	1.020	1.729	0.9085
63	1.128252	75.3	1.170	0.2121	1.186	1.567	0.8610	0.8153	1.164	1.095	0.7095	1.316	0.5267	1.002	1.715	0.9087
64	1.118238	73.4	1.162	0.2221	1.176	1.543	0.9059	0.7919	1.129	1.156	0.6845	1.284	0.5525	0.9831	1.700	0.9089
65	1.108729	71.6	1.154	0.2327	1.166	1.518	0.9538	0.7682	1.098	1.221	0.6593	1.251	0.5797	0.9636	1.684	0.9091

续表 Section106-13 C10 20b

C10 20b			负载电阻=0.6667 Ω													
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9	Z_{10s}
66	1.099707	69.8	1.145	0.2438	1.156	1.493	1.005	0.7440	1.056	1.292	0.6338	1.218	0.6087	0.9437	1.669	0.9093
67	1.091154	67.9	1.136	0.2555	1.145	1.467	1.060	0.7195	1.019	1.368	0.6082	1.184	0.6394	0.9231	1.652	0.9095
68	1.083056	66.1	1.127	0.2679	1.134	1.440	1.119	0.6946	0.982	1.451	0.5823	1.150	0.6721	0.9020	1.635	0.9097
69	1.075399	64.3	1.117	0.2810	1.122	1.413	1.183	0.6694	0.944	1.542	0.5562	1.115	0.7071	0.8802	1.618	0.9099
70	1.068167	62.4	1.106	0.2951	1.110	1.385	1.252	0.6437	0.906	1.641	0.5299	1.079	0.7446	0.8578	1.600	0.9101
71	1.061350	60.5	1.095	0.3100	1.097	1.356	1.327	0.6176	0.8680	1.750	0.5034	1.043	0.7850	0.8346	1.581	0.9103
72	1.054935	58.7	1.084	0.3260	1.083	1.327	1.410	0.5911	0.8292	1.871	0.4768	1.007	0.8287	0.8106	1.562	0.9105
73	1.048912	56.8	1.071	0.3432	1.069	1.297	1.501	0.5642	0.7901	2.007	0.4500	0.9696	0.8760	0.7859	1.542	0.9107
74	1.043271	54.9	1.058	0.3618	1.054	1.265	1.601	0.5368	0.7506	2.159	0.4229	0.9317	0.9277	0.7602	1.521	0.9109
75	1.038003	52.9	1.078	0.3870	1.031	1.245	1.716	0.5086	0.7126	2.324	0.3972	0.8909	0.9766	0.7408	1.494	0.9111

表 Section106-14 C10 20c

C10 20c			负载电阻=1Ω													
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9	Z_{10s}
T	∞	∞	1.248	0.0000	1.513	2.033	0.0000	1.809	1.957	0.0000	1.957	1.809	0.0000	2.033	1.513	1.248
46	1.414011	108.4	1.154	0.1035	1.413	1.692	0.3083	1.364	1.421	0.3593	1.367	1.401	0.1712	1.669	1.382	1.236
47	1.390318	106.3	1.149	0.1137	1.408	1.677	0.3244	1.344	1.398	0.3787	1.342	1.383	0.1802	1.652	1.375	1.235
48	1.367792	104.2	1.144	0.1191	1.403	1.661	0.3412	1.325	1.375	0.3988	1.317	1.365	0.1895	1.635	1.369	1.234
49	1.346366	102.1	1.139	0.1247	1.398	1.645	0.3587	1.304	1.352	0.4199	1.292	1.346	0.1992	1.618	1.363	1.233
50	1.325976	100.1	1.134	0.1305	1.392	1.629	0.3769	1.284	1.328	0.4419	1.266	1.327	0.2093	1.600	1.356	1.233
51	1.306565	98.1	1.129	0.1035	1.387	1.613	0.3959	1.263	1.303	0.4650	1.240	1.308	0.2198	1.582	1.349	1.232
52	1.288080	96.1	1.125	0.1137	1.381	1.596	0.4157	1.241	1.279	0.4891	1.213	1.289	0.2307	1.563	1.342	1.232
53	1.270472	94.1	1.118	0.1191	1.375	1.579	0.4364	1.219	1.253	0.5145	1.186	1.269	0.2422	1.544	1.335	1.230
54	1.253696	92.2	1.112	0.1247	1.369	1.531	0.4580	1.197	1.228	0.5411	1.158	1.248	0.2541	1.524	1.328	1.229
55	1.237711	90.2	1.106	0.1305	1.362	1.543	0.4806	1.174	1.202	0.5691	1.130	1.228	0.2665	1.503	1.320	1.228
56	1.222478	88.3	1.100	0.1365	1.356	1.525	0.5043	1.151	1.175	0.5996	1.102	1.206	0.2795	1.483	1.312	1.227
57	1.207961	86.4	1.093	0.1428	1.349	1.506	0.5292	1.127	1.149	0.6297	1.073	1.185	0.2931	1.461	1.304	1.226
58	1.194127	84.5	1.087	0.1493	1.342	1.487	0.5553	1.103	1.121	0.6626	1.044	1.163	0.3074	1.440	1.296	1.225
59	1.180946	82.7	1.080	0.1561	1.334	1.467	0.5827	1.079	1.094	0.6973	1.015	1.141	0.3223	1.417	1.287	1.224
60	1.168389	80.8	1.073	0.1632	1.326	1.447	0.6116	1.054	1.066	0.7342	0.9851	1.118	0.3380	1.394	1.278	1.223
61	1.156430	79.0	1.065	0.1706	1.318	1.427	0.6420	1.029	1.038	0.7733	0.9551	1.095	0.3544	1.371	1.269	1.221
62	1.145044	77.1	1.057	0.1783	1.310	1.406	0.6743	1.003	1.009	0.8150	0.9247	1.072	0.3717	1.347	1.260	1.220
63	1.134209	75.3	1.049	0.1864	1.301	1.385	0.7084	0.9766	0.9801	0.8595	0.8940	1.048	0.3900	1.322	1.251	1.219
64	1.123902	73.4	1.041	0.1949	1.292	1.363	0.7446	0.9499	0.9508	0.9073	0.8630	1.024	0.4093	1.297	1.241	1.217
65	1.114106	71.6	1.032	0.2038	1.283	1.341	0.7831	0.9227	0.9211	0.9585	0.8317	0.9991	0.4297	1.271	1.230	1.216

续表 Section106-14 C10 20c

C10 20c			负载电阻=1Ω													
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9	Z_{10s}
66	1104800	69.8	1.023	0.2131	1.273	1.318	0.8242	0.8951	0.8911	1.014	0.8001	0.9740	0.4514	1.244	1.220	1.214
67	1.095969	67.9	1.014	0.2230	1.263	1.295	0.8682	0.8670	0.8607	1.073	0.7682	0.9485	0.4744	1.217	1.209	1.212
68	1.087597	66.1	1.004	0.2334	1.252	1.272	0.9155	0.8384	0.8300	1.138	0.7361	0.9226	0.4989	1.189	1.198	1.211
69	1.079669	64.3	0.9932	0.2444	1.241	1.247	0.9664	0.8094	0.7989	1.207	0.7036	0.8965	0.5252	1.159	1.186	1.209
70	1.072171	62.4	0.9823	0.2560	1.229	1.223	1.021	0.7798	0.7676	1.286	0.6709	0.8693	0.5533	1.130	1.174	1.207
71	1.065092	60.5	0.9709	0.2684	1.216	1.197	1.081	0.7496	0.7358	1.371	0.6378	0.8419	0.5836	1.099	1.162	1.205
72	1.058418	58.7	0.9588	0.2817	1.203	1.171	1.147	0.7189	0.7038	1.465	0.6046	0.8141	0.6163	1.067	1.149	1.202
73	1.052141	56.8	0.9461	0.2958	1.189	1.144	1.219	0.6877	0.6715	1.570	0.5714	0.7857	0.6518	1.034	1.135	1.200
74	1.046250	54.9	0.9328	0.3110	1.174	1.117	1.298	0.6558	0.6387	1.692	0.5365	0.7567	0.6906	1.000	1.121	1.197
75	1.040737	52.9	0.9215	0.3329	1.154	1.087	1.396	0.6196	0.6033	1.848	0.4968	0.7232	0.7369	0.9633	1.101	1.194

表 Section106-15 C11 20

C11 20			负载电阻=1 Ω															
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9	Z_{10}	Z_{10s}	Z_{11}
T	∞	∞	1.356	0.0000	1.413	2.290	0.0000	1.564	2.368	0.0000	1.583	2.368	1.564	1.564	2.290	0.0000	1.413	1.356
51	1.286760	110.5	1.310	0.0526	1.356	1.962	0.3468	1.84	1.640	0.6038	0.9877	1.536	1.045	1.045	1.752	0.1984	1.198	1.180
52	1.269018	108.3	1.308	0.0552	1.353	1.949	0.3639	1.166	1.612	0.6351	0.9657	1.505	1.025	1.025	1.730	0.2083	1.188	1.172
53	1.252136	106.1	1.306	0.0578	1.350	1.935	0.3817	1.153	1.583	0.6680	0.9434	1.474	1.004	1.004	1.708	0.2185	1.179	1.164
54	1.236063	104.0	1.303	0.0606	1.347	1.920	0.4003	1.136	1.554	0.7025	0.9209	1.441	0.9837	0.9837	1.686	0.2292	1.168	1.155
55	1.220775	101.9	1.301	0.0634	1.344	1.905	0.4197	1.119	1.525	0.7388	0.8980	1.409	0.9628	0.9628	1.663	0.2403	1.158	1.147
56	1.206218	99.7	1.298	0.0664	1.341	1.890	0.4399	1.102	1.495	0.7770	0.8748	1.376	0.9415	0.9415	1.640	0.2520	1.147	1.137
57	1.192363	97.7	1.296	0.0695	1.338	1.874	0.4611	1.085	1.464	0.8173	0.8514	1.342	0.9198	0.9198	1.616	0.2641	1.136	1.128
58	1.179178	95.6	1.293	0.0727	1.384	1.858	0.4832	1.067	1.433	0.8598	0.8277	1.308	0.8979	0.8979	1.592	0.2769	1.125	1.118
59	1.166633	93.5	1.290	0.0761	1.331	1.842	0.5064	1.049	1.402	0.9050	0.8037	1.274	0.8756	0.8756	1.567	0.2902	1.113	1.108
60	1.154701	91.5	1.287	0.0796	1.327	1.825	0.5308	1.030	1.370	0.9528	0.7795	1.239	0.8530	0.8530	1.542	0.3042	1.100	1.098
61	1.143354	89.4	1.284	0.0833	1.323	1.807	0.5563	1.011	1.337	1.004	0.7551	1.204	0.8300	0.8300	1.516	0.3188	1.088	1.087
62	1.132570	87.4	1.280	0.0872	1.319	1.790	0.5832	0.9909	1.304	1.058	0.7304	1.169	0.8067	0.8067	1.490	0.3342	1.075	1.076
63	1.122326	85.4	1.277	0.0913	1.315	1.771	0.6116	0.9708	1.271	1.116	0.7055	1.133	0.7831	0.7831	1.463	0.3505	1.061	1.065
64	1.112602	83.4	1.273	0.0955	1.310	1.752	0.6415	0.9503	1.237	1.178	0.6803	1.096	0.7592	0.7592	1.436	0.3676	1.047	1.053
65	1.103378	81.3	1.269	0.1000	1.305	1.733	0.6732	0.9291	1.202	1.244	0.6549	1.059	0.7349	0.7349	1.408	0.3857	1.032	1.040
66	1.094636	79.3	1.265	0.1047	1.301	1.713	0.7068	0.9075	1.167	1.316	0.6294	1.022	0.7103	0.7103	1.380	0.4049	1.017	1.027
67	1.086360	77.3	1.261	0.1097	1.295	1.692	0.7425	0.8854	1.132	1.394	0.6036	0.9349	0.6854	0.6854	1.351	0.4252	1.002	1.014
68	1.078535	75.3	1.256	0.1150	1.290	1.671	0.7806	0.8627	1.096	1.478	0.5777	0.9470	0.6602	0.6602	1.321	0.4468	0.9854	0.9994
69	1.071145	73.3	1.252	0.1306	1.284	1.649	0.8213	0.8394	1.059	1.570	0.5515	0.9089	0.6346	0.6346	1.291	0.4699	0.9685	0.9846
70	1.064178	71.2	1.247	0.1265	1.278	1.627	0.8650	0.8155	1.022	1.671	0.5252	0.8704	0.6087	0.6087	1.260	0.4946	0.9508	0.9692

续表 Section106-15 C11 20

C11 20			负载电阻=1Ω															
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7	Z_8	Z_{8s}	Z_9	Z_{10}	Z_{10s}	Z_{11}
71	1057621	69.2	1.241	0.1339	1.271	1.603	0.9120	0.7910	0.9842	1.782	0.4988	0.8316	0.5824	0.5824	1.228	0.5212	0.9323	0.9530
72	1051462	67.1	1.235	0.1396	1.264	1.579	0.9629	0.7658	0.9458	1.905	0.4721	0.7924	0.5558	0.5558	1.196	0.5498	0.9131	0.9359
73	1045692	65.0	1.229	0.1469	1.257	1.554	1.018	0.7399	0.9069	2.043	0.4454	0.7530	0.5289	0.5289	1.162	0.5508	0.8929	0.9179
74	1040299	62.9	1.223	0.1548	1.249	1.528	1.079	0.7132	0.8674	2.198	0.4185	0.7133	0.5016	0.5016	1.128	0.6145	0.8717	0.8986
75	1035276	60.8	1.216	0.1633	1.240	1.500	1.145	0.6856	0.8272	2.333	0.3914	0.6733	0.4739	0.4739	1.093	0.6915	0.8493	0.8788

无源椭圆滤波器的归一化设计方法

以上表格中，均假设前级输出电阻为 1Ω ，而负载电阻则分为 1Ω （对称型），以及开路或者短路（非对称型）。以表 Section106-1 为例。假设我们根据已知条件，选择了表格中“ $\theta=4$ ”行，则可以得到以下数据：

C03 20			负载电阻= 1Ω				负载开路（ π 型）或者短路（T型）			
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3
4	14.3	79.63	1.1870	0.0032	1.1507	1.1870	0.5920	0.0031	1.1670	1.1704

从表中可以看出，有两种带负载情况，也就有两组电容、电感数值。

我们先看负载等于 1Ω ，它有 4 个数据，分别是 1.1870、0.0032、1.1507、1.1870，这就是实现“无源 3 阶、 $\rho=20\%$ ， $R_{dB}=0.1773\text{dB}$ ，负载电阻为 1Ω ”滤波器对应的电感、电容值。据此参数设计出的无源滤波器，无论是 T 型还是 π 型，一定满足设计要求。

T 型电路，见图 Section106-3 左侧电路。第一位置的 Z_1 对应于电感，即 $L_1=1.1870\text{H}$ ，第三位置也对应于电感，则 $L_3=Z_3=1.1870\text{H}$ ，第二位置有两个元件，少用的是电容，所有 $C_2=Z_{2s}=1.1507\text{F}$ ，而 $L_2=Z_2=0.0032\text{H}$ 。至此设计完毕，画出电路如图 Section106-3 左侧电路。

π 型电路，见右侧电路。第一位置是电容，即 $C_1=1.1870\text{F}$ ，第三位置也对应于电容，则 $C_3=Z_3=1.1870\text{F}$ ，第二位置有两个元件，少用的是电感，所有 $L_2=Z_{2s}=1.1507\text{F}$ ，而 $C_2=Z_2=0.0032\text{F}$ 。至此设计完毕，画出电路如图 Section106-3 右侧电路。

仿真结果表明，这两个电路的输出幅频、相频特性完全重合，且都符合设计要求。

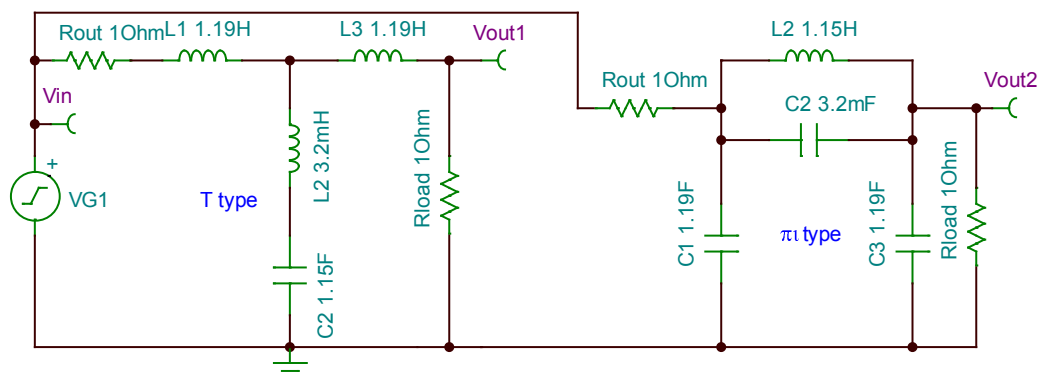


图 Section106-3 无源 3 阶含 1Ω 负载电阻

再看负载不是 1Ω 的情况。

一般情况下，要求前级输出阻抗为 1Ω ，甚至更大的 50Ω ，都是合情合理的。但是，要求后级负载电阻为 1Ω ，则是多余的，且是浪费能源的。因此，椭圆滤波器参数表中，提供了非对称情况，即可以将负载设定为开路，这也是多数情况下的实际。

对 π 型电路来说，负载开路仅仅影响电容、电感值的选择，因此表格中的数值发生了变化，且可以看出， Z_3 不再等于 Z_1 ，即电路不再对称。

对 T 型电路来说，负载开路，则导致 L_3 不再参与滤波——对储能元件来说，没有充放电过程，就不可能发挥作用。换句话说，对 π 型电路的开路，实际上相当于对 T 型电路的短路。因此，对 T 型电路来说，这个表格内的数据，应该将负载视为短路。在实际仿真电

路中，可以将负载电阻设为极小的阻值，比如 $1\text{m}\Omega$ 以下。这在实用电路中是不可能的。因此，我们可以试试这个表格，但不要在实际电路中采用这种结构。

或者说，对于负载电阻不为 1Ω 的表格，不要使用 T 型结构电路。

举例 1：

使用 C03 20 表格中的 $\theta=4$ ，设计负载电阻不为 1（开路或者短路）的电路，满足前述要求。

解：从表格中得到负载开路或者短路的数据，分别是 0.5920、0.0031、1.1670、1.1704，这就是实现“无源 3 阶、 $\rho=20\%$ ， $R_{dB}=0.1773\text{dB}$ ，负载电阻为开路或者短路”滤波器对应的电感、电容值。

T 型电路，见图 Section106-4 左侧电路。第一位置的 Z_1 对应于电感，即 $L_1=0.5920\text{H}$ ，第三位置也对应于电感，则 $L_3=Z_3=1.1704\text{H}$ ，第二位置有两个元件，少用的是电容，所以 $C_2=Z_{2s}=1.1670\text{F}$ ，而 $L_2=Z_2=0.0031\text{H}$ 。此时，将负载电阻设为极小的 $1\mu\Omega$ 。

按照同样的方法设计 π 型电路，将负载电阻去掉（即开路），画出电路如图 Section106-4 右侧电路。

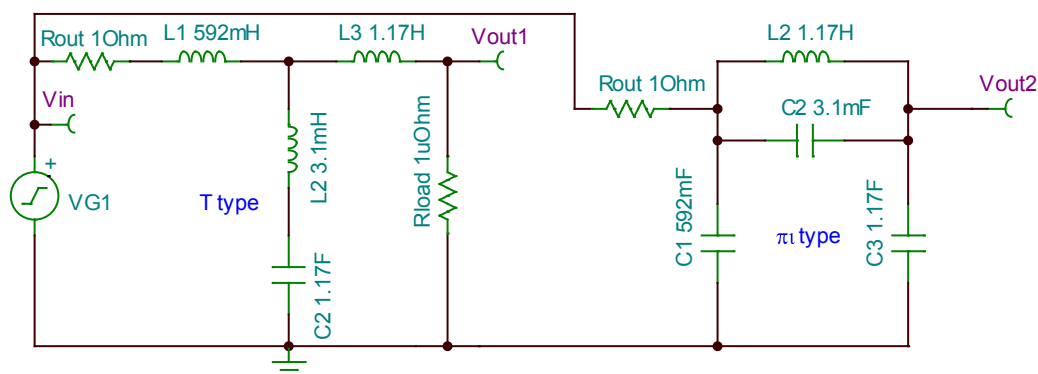


图 Section106-4 举例 1 电路，无源 3 阶负载电阻开路或者短路

仿真结果如图 Section106-5 所示。测试表明，这两个滤波器除整体增益差异 120dB 外，其余特性几乎完全相同。其通带频率约为 159.2mHz，即通带角频率约为 1。 R_{dB} 约为 0.177dB。之所以不敢说完全相同，是因为电路中 $1\mu\Omega$ 并不是真正的 0。从图中也可看出， V_{OUT1} 几乎不能使用，其通带增益太小了。

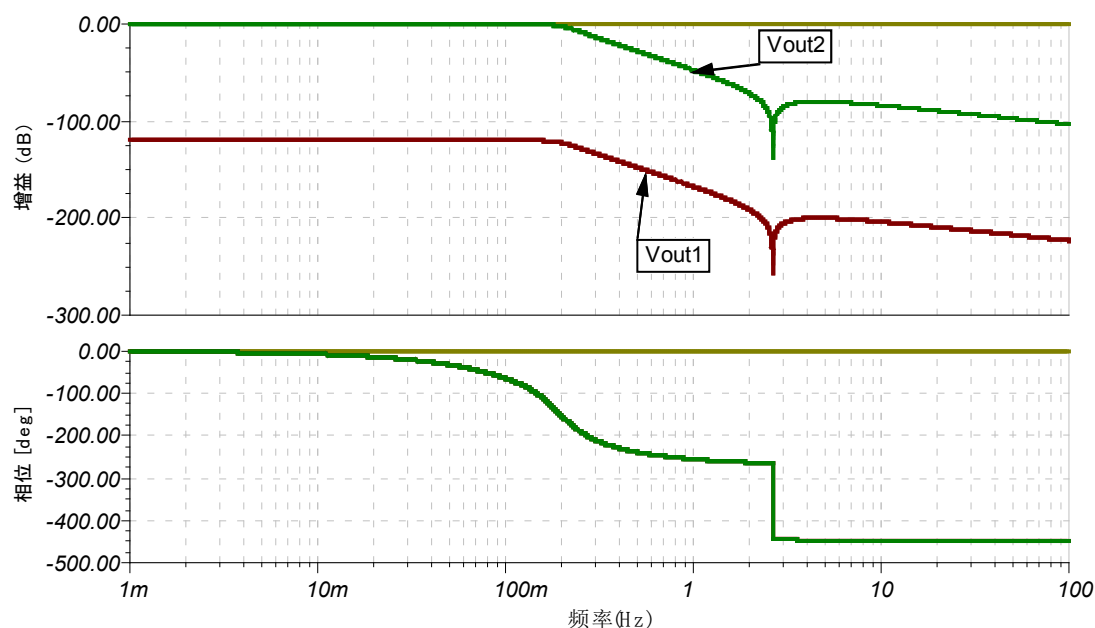


图 Section106-5 举例 1 的仿真频率特性

无源椭圆滤波器的电阻去归一化设计方法

实际滤波器设计时，绝不可能都是归一化设计。有两点需要修正，也就是“去归一化”，将原本归一化条件改为任何需要的条件。其一，是电阻不再是 1Ω 。其二，是通带角频率不再是 1。我们先介绍电阻不再是 1Ω 的情况。

对于对称型电路，也就是前级电阻、负载电阻均为 1Ω 的电路，当要求前级电阻为 $N\Omega$ ，负载电阻也为 $N\Omega$ ，则可将原电路参数中的电感乘以 N ，将电容除以 N ，获得新值，则滤波器效果不变。

对应非对称型电路，也就是 π 型负载开路，T 型负载短路，当前级电阻为 $N\Omega$ ，则可将原电路参数中的电感乘以 N ，将电容除以 N ，获得新值，则滤波器效果不变。

举例 2：

使用 C03 20 表格中的 $\theta=4$ ，设计 3 种前级电阻为 50Ω 的滤波器，满足前述要求。

解：理论上，前级电阻为 50Ω ，可以有 4 种电路：T 型负载 0Ω ， π 型负载无穷大，T 型负载 50Ω ， π 型负载 50Ω 。因 T 型负载 0Ω 几乎不能使用，我们设计另外的 3 种电路。

1) π 型负载无穷大。将举例 1 电路右侧部分， R_{out} 设为 50Ω ，并将电路中的电感 L_2 乘以 50 倍，为 $1167 \times 50 = 58.35H$ ，将电路中的电容全部除以 50，得 $C_1 = 592mF/50 = 11.84mF$ ， $C_2 = 3.1mF/50 = 62\mu F$ ， $C_3 = 11704F/50 = 23.41mF$ 。得到图 Section106-6。其中右侧为所求电路。左侧电路是 T 型电路 0Ω 负载，我也画出来了，但这个电路以输出衰竭太严重，不能使用。

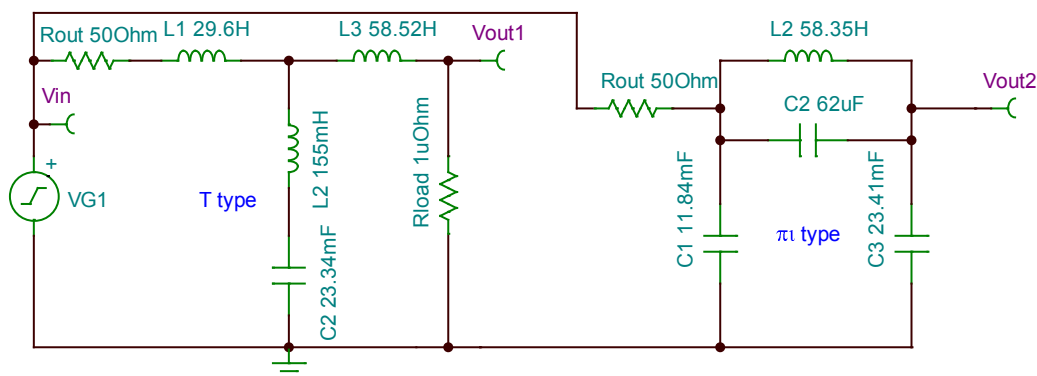


图 Section106-6 举例 2 电路一

2) T 型 50Ω 负载和 π 型 50Ω 负载。

这两个电路都是对称电路，以图 Section106-3 电路为基础，将 R_{out} 设为 50Ω，负载电阻也变为 50Ω，然后将电路中的所有电感都乘以 50，所有电容都除以 50，即可得到如图 Section106-7 电路。

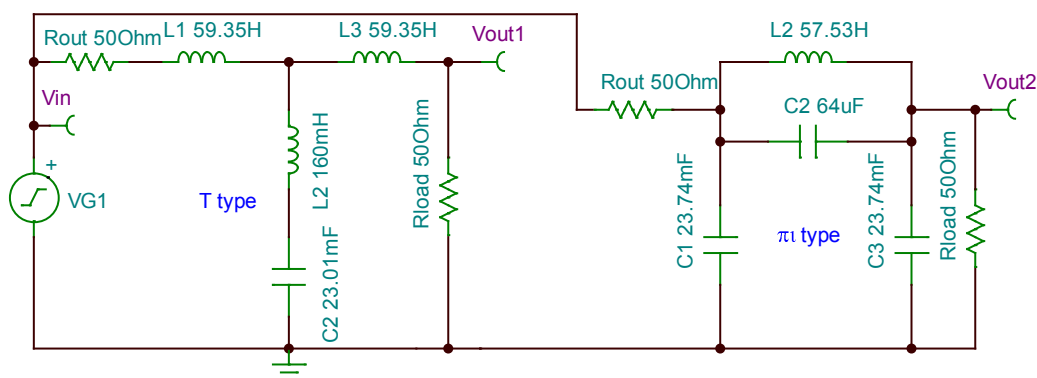


图 Section106-7 举例 2 电路二

无源椭圆滤波器的频率去归一化设计方法

在完成了电阻的去归一化后，通带角频率仍为 1。此时，如果要求实现通带频率为 f_p 的滤波器，只要将所有电感、电容，都除以 $2\pi f_p$ ，就行了。

举例 3：

使用 C03 20 表格中的 $\theta=4$ ，设计一个滤波器，前级输出电阻为 50Ω，后级负载电阻为无穷大，要求通带频率为 $f_p=10\text{MHz}$ 。用 TINA-TI 仿真实现，并验证关键参数。

解：能够实现负载电阻无穷大的，实用型仅有 π 型电路。故选取 π 型无穷大负载电路，其结构如图 Section106-6 右侧电路，此电路已经完成 50Ω 去归一化，仅需电容、电感除以 $2\pi f_p$ 即可，得到如图 Section106-8 电路。

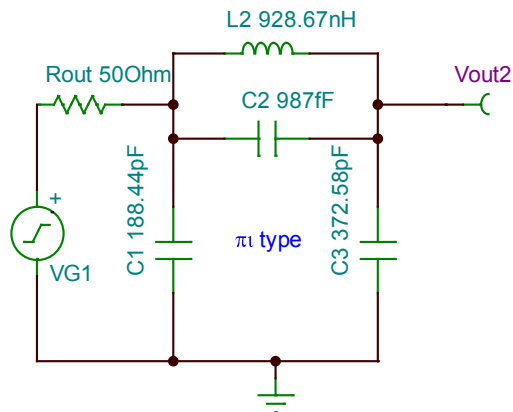


图 Section106-8 举例 3 电路

仿真结果如图 Section106-9。可以大致看出，在 10MHz 附近，增益开始急剧下降，大约在 140M 左右为阻带开始，阻带增益大约为-70dB。这个结果差不多，心里会踏实一些。但要得到准备的验证，必须将幅频特性图实施局部放大。

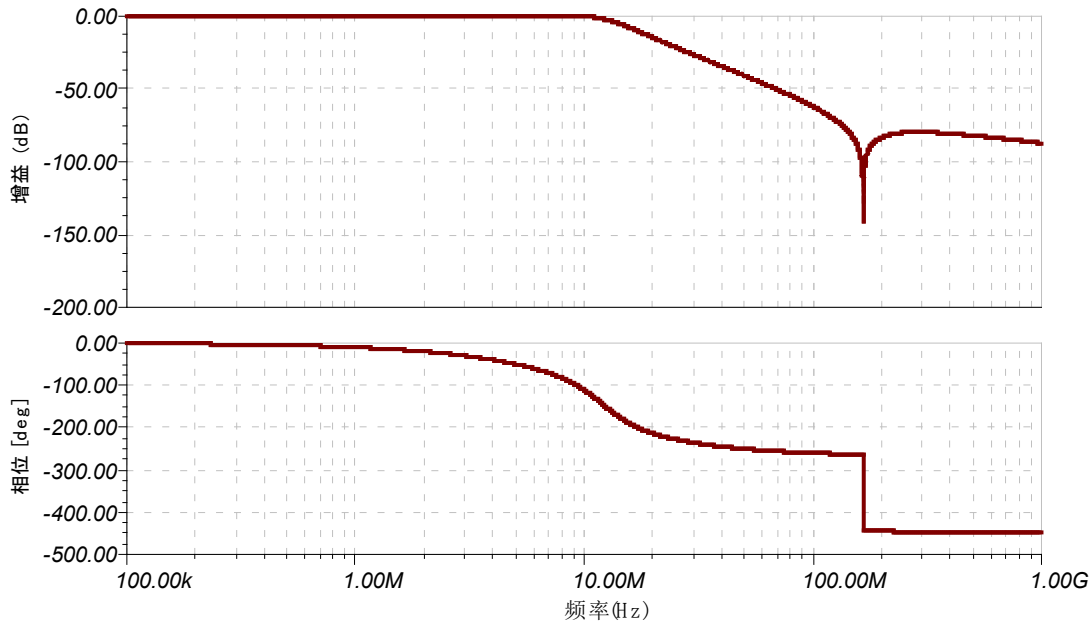


图 Section106-9 举例 10 电路幅频特性全图

从以下表格可以得到，有待验证的结果如下 4 项：

C03 20			负载电阻=1Ω				负载开路 (π 型) 或者短路 (T 型)			
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3
4	14.3	79.63	11870	0.0032	11507	11870	0.5920	0.0031	1.1670	1.1704

1) 通带频率为 10MHz ; 2) 通带纹波为 $R_{dB}=0.1773\text{dB}$; 3) 阻带增益为-79.63dB ; 4) 阻带频率为 143MHz。

先看通带局部放大图，如图 Section106-10，可以测得谷值点发生在(5MHz，-177.6mdB)处，这就是通带纹波，0.1776dB，与设计要求 0.1773dB 基本吻合。从谷值点向右找，增益同样为-0.1776dB 的点，其频率为 10MHz，这就是通带频率，与设计要求吻合。

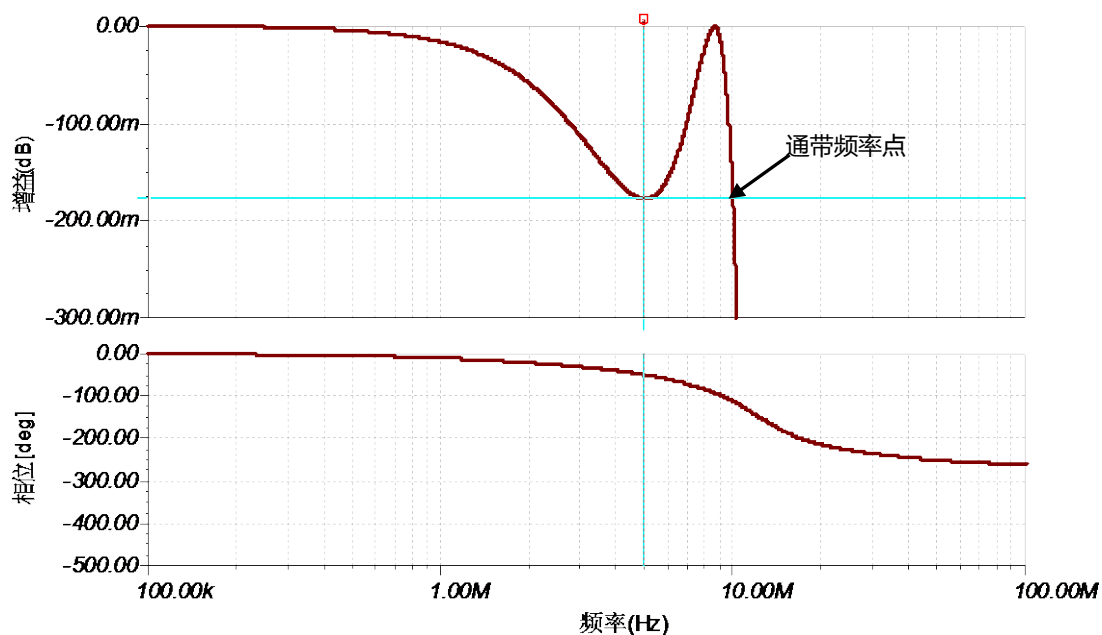


图 Section106-10 举例 3 电路幅频特性之通带放大图

阻带放大图如图 Section106-11 所示。可得阻带最大增益为-79.75dB，即图中的峰值位置，与设计要求基本吻合。以此为准，向左找，可以找到图中阻带频率，为 144.01MHz，与设计要求 143MHz 基本吻合。至此，本题结束。

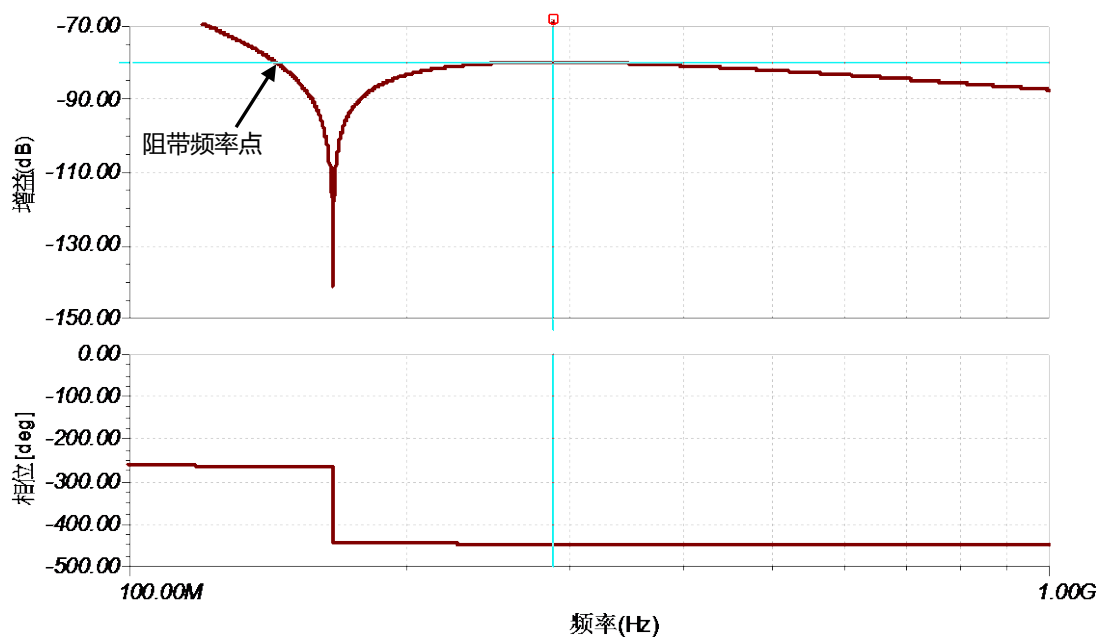


图 Section106-11 举例 3 电路幅频特性之阻带放大图

举例 4：

设计一个无源低通椭圆滤波器，前级输出电阻为 50Ω ，后级负载电阻可自行选择，要求通带增益为 $f_p=100\text{MHz}$ ，通带纹波小于 2.5%，阻带频率 f_s 小于 160MHz，阻带增益衰减大于 75dB。用 TINA-TI 仿真实现，并验证关键参数。

解：首先要确定阶数。一种方法是使用 Matlab 的 `elliporde` 函数，输入已知条件，会自动给出最小阶数 n 。另一种方法就是直接查表。本书采用查表方法。

首先看通带纹波，要求小于 2.5%，以 1 为基准，则增益范围在 0.975~1.025 之间，换算成 dB，则在 -0.2199dB~0.2145dB，则可知通带纹波 R_{dB} 不得超过 0.2199dB（取其绝对值最大者）。而我们手中的表格，有两类， $\rho=5\%$ ， $R_{dB}=0.01087\text{dB}$ ， $\rho=20\%$ ， $R_{dB}=0.1773\text{dB}$ 。即便后者，也能满足要求。因此我们选择 $\rho=20\%$ 的表格。

然后进行归一化。通带频率 100MHz，阻带频率 160MHz，则有：

$$\omega_s = \frac{f_s}{f_p} = 1.6$$

对 $\rho=20\%$ 的每一张表格，先找到 ω_s 刚小于 1.6 的那一行，然后看其 ΔA_s 项是否大于 75dB，一旦不符合，立即换下一张表格，因为再不换表格，下面的行一定是 ω_s 越来越小，而衰减量也是越来越小。直到找到为止。结果，我们找到了 C07 20，其中的 $\theta=39$ 那一行，能够满足要求，获得数据如下：

C07 20			负载电阻=1Ω									
θ	ω_s	ΔA_s	Z_1	Z_2	Z_{2s}	Z_3	Z_4	Z_{4s}	Z_5	Z_6	Z_{6s}	Z_7
39	1.56	77.6	1.277	0.0689	1.317	1.928	0.3267	1.165	1.817	0.2317	1.145	1.135

它的负载电阻为 1Ω，因此选择 T 型还是 π 型电路都可以。但是考虑到电感稍贵一些，我们选择电容较多的 π 型电路，按照上表设计电路如图 Section106-12a 所示。

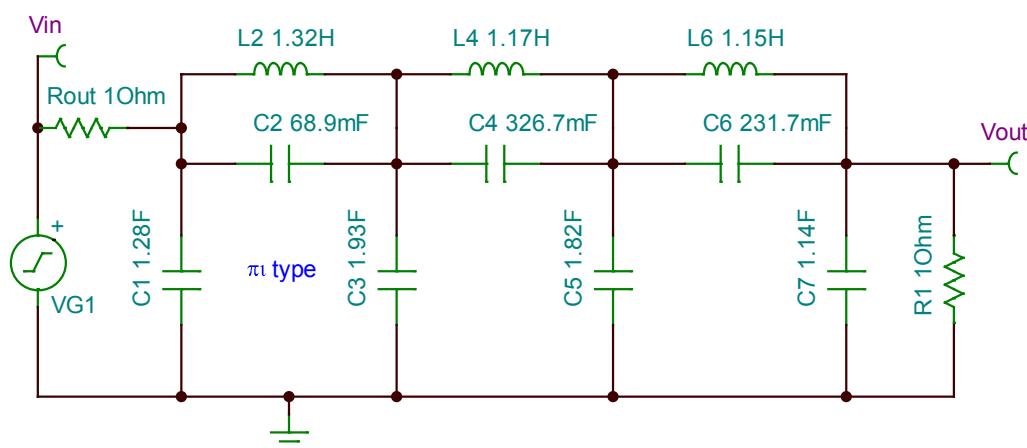


图 Section106-12a 举例 4 去归一化之前的原始电路

最后，进行去归一化，分为两步：

第一步，实施 50Ω 电阻的去归一化。将电感乘以 50，电容除以 50，得下表第二行数据。

阻值	通带频率	C1	C2	L2	C3	C4	L4	C5	C6	L6	C7
1	1	1.277	0.0689	1.317	1.928	0.3267	1.165	1.817	0.2317	1.145	1.135
50	1	0.02554	0.001378	65.85	0.03856	0.006534	58.25	0.03634	0.004634	57.25	0.0227
50	100000000	4.06E-11	2.19E-12	1.05E-07	6.14E-11	1.04E-11	9.27E-08	5.78E-11	7.38E-12	9.11E-08	3.61E-11

第二步，实施 100MHz 去归一化。将所有电感、电容，均除以 $2\pi \times 100\text{M}$ ，得上表第三行数据。用此数据，修改电路，得到如图 Section106-12b 所示的最终电路。仿真分析，得到如图 Section106-12c 所示的幅频、相频特性全图，以及通带放大 d、阻带放大 e 图。

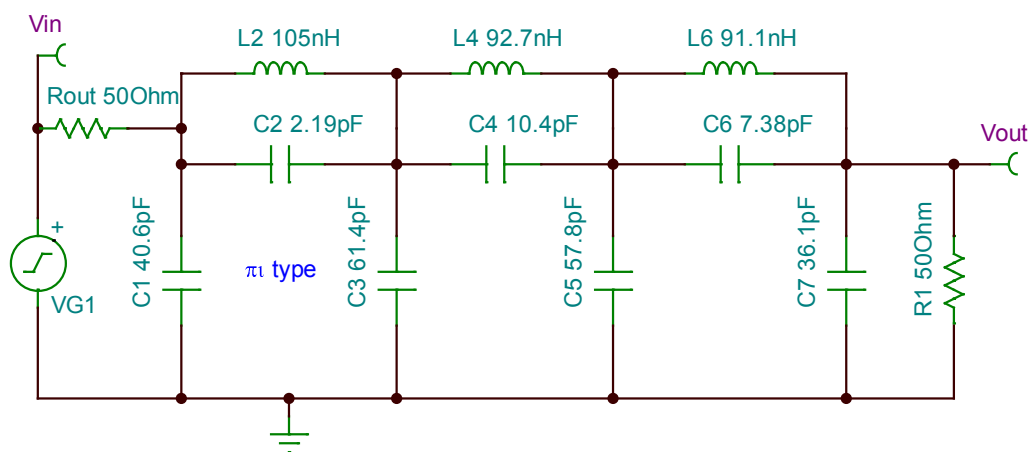


图 Section106-12b 举例 4 最终电路

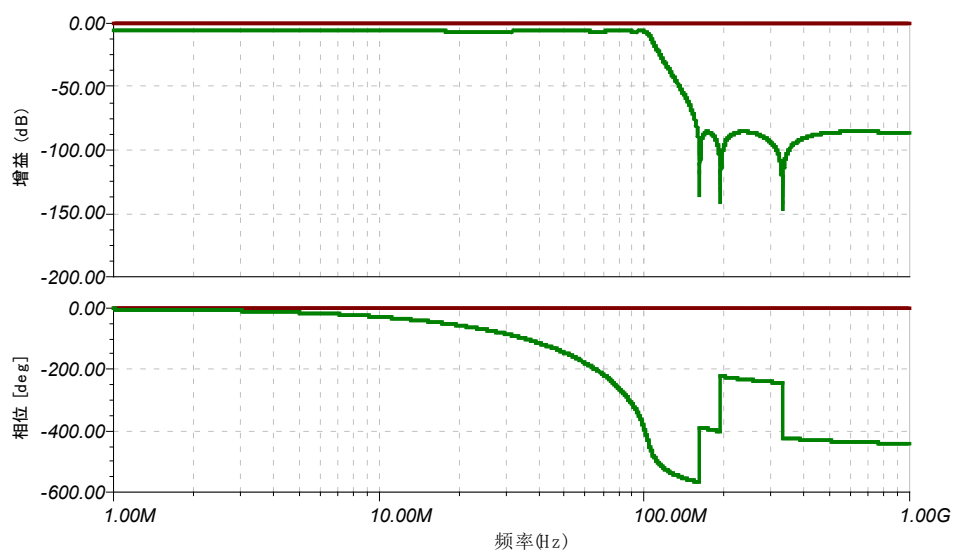


图 Section106-12c 举例 4 幅频特性全图

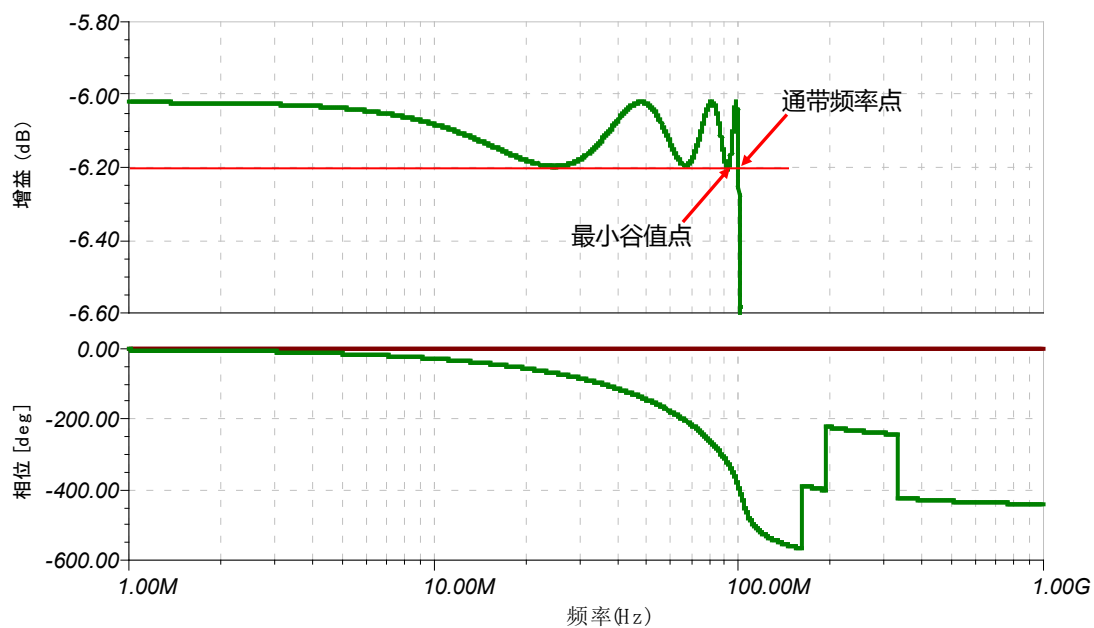


图 Section106-12d 举例 4 幅频特性之通带区域放大

从通带放大图可以得到如下信息：

1) 找到 91.39M, -6.2dB 为最小谷值 A_{pm} , 向右找寻-6.2dB 点为 100MHz, 此即通带频率 f_p 。与设计要求完全吻合。

2) 通带增益 A_{p0} 为-6.02dB, 这是平坦区的增益, 也是理论计算的频率(极低频率下, 电感短路, 电容开路, 前级输出电阻 50Ω , 后级负载电阻也是 50Ω , 其增益必然是 0.5 倍, 也就是-6.02dB)。在此情况下, 可以得到：

$$R_{dB} = |A_{pm}(dB) - A_{p0}(dB)| = |-6.2 + 6.02| = 0.18dB$$

即通带纹波小于设计要求的 0.2199dB, 满足设计要求。

从阻带放大图可以得到以下信息：

1) 阻带增益 A_s 为-85.39dB, 据此得到：

$$\Delta A_s = |A_{p0}(dB) - A_s(dB)| = |-6.02 + 85.39| = 79.37dB$$

即阻带衰减为 79.37dB, 大于设计要求 75dB。

2) 根据阻带最大增益, 向左可以找到阻带频率 f_s 为 158.94M。小于 160MHz, 满足设计要求。从前述查表可以看出, 表格中的 ω_s 为 1.56, 即阻带频率应为 156MHz。实际仿真效果与此有点差异, 是因为最终设计时, 我仅取了 3 位有效数字。在实际电路设计时, 能取到如此精确, 已经很不容易。

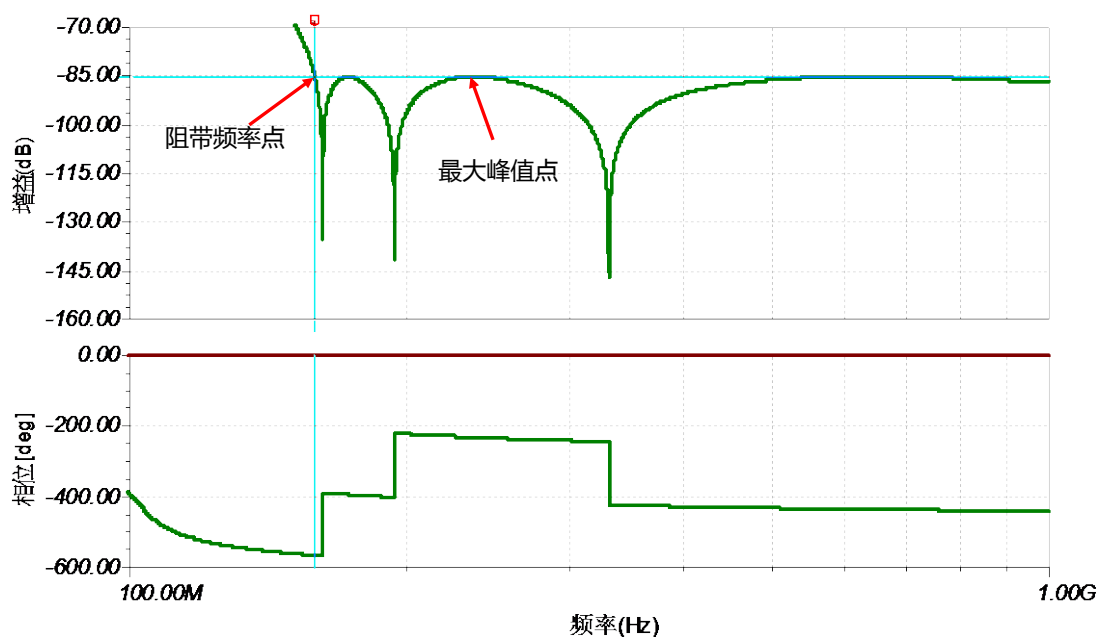


图 Section106-12e 举例 4 幅频特性之阻带区域放大

至此, 本题设计完毕。

4.9. 开关电容滤波器

前面 8 节讲述的滤波器，绝大多数都有两个特点，第一，它们的工作过程是时间连续的 time continue——即滤波器在工作中，任何时刻，都具有完全相同的部件连接状态，我们称之为“时间连续型”。第二，它们都是靠事先设计好的电阻、电容、电感，决定它们的频率特性，是无法用“程控”方法修改的。我称之为“元件设定型”。

本节讲述的开关电容型滤波器，它通过外部提供的可变频率的时钟信号，将滤波器工作状态分为高电平阶段 phase1、低电平阶段 phase2，在两个阶段，滤波器内部连接是不相同的。它呈现出一种奇妙的效果：滤波器截止频率，与外部时钟频率相关。

Section107. 开关电容滤波器- Switched Capacitor Filter

1972 年，美国的 DAVID L. FRIED (弗雷德) 在 IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS, AUGUST 1972 上发表 Analog Sample-Data Filters 一文，开启了开关电容滤波器的序幕。1978 年，美国加州大学洛杉矶分校的 BEDRICH J. HOSTICKA, ROBERT W. BRODERSEN, AND PAUL R. GRAY 在相同期刊上发表 MOS Sampled Data Recursive Filters Using Switched Capacitor Integrators，使其进入了实用阶段。经过几十年的发展，目前开关电容滤波器已经成熟，并在合适的场合发挥重要的作用。Maxim 公司、Linear Technology 公司等，生产了多种开关电容滤波器。

开关电容形成可变电阻的基本原理

开关电容滤波器的核心，是一个用开关、电容实现的可变电阻。

图 Section107-1 是一个以“水”类比的“水积分器”模型。其中的球阀高低，像一个水阻 R ，它和水库水位（类比为输入电位）一并决定着单位时间内的水流量（类比为电流），此水流注入到水容 1（类比为电容）中，使得水容 1 的水位（类比为电位）上升。这就是一个积分器，水容 1 的水位，就是水积分器的输出，而水库水位则是水积分器的输入。

在输入水位不变、水容 1 大小不变的情况下，要改变积分器输出（水容 1 的水位）速率，可以通过调节球阀高低实现。这类似于一个电位器调节电阻的积分器。客观上，它可以改变积分器的时间常数。

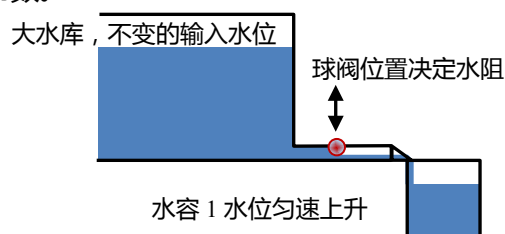


图 Section107-1 积分器的水模型，水阻大小决定水容 1 水位上升速度

水积分器中，改变积分器时间常数还有一个方法，“开关水容法”，如图 Section107-2 所示。它不再使用连续调节的球阀，改用两个开关 SW1 和 SW2（靠球阀拨开和球阀堵塞实现），并且在输入和输出之间，增加了一个水容 2，在 ϕ_1 阶段，SW1 导通，SW2 闭塞，水

容 2 立即被注水到与水库水位相同——注意，由于 SW1 导通时，水道是完全打开的，我们假设其水阻为 0，因此这个注水过程将是非常短暂的，无需考虑注水过程。在 ϕ_2 阶段，SW2 导通，SW1 闭塞，水容 2 的水立即流入水容 1。如此往复，水容 1 的水位也是在上升的。

此时，改变水积分器的时间常数，就可以通过改变 ϕ_1 和 ϕ_2 的往复频率 f_{CLK} 实现。这看起来，像是用 f_{CLK} 和水容 2 联合模拟了一个水阻。 f_{CLK} 越大，水阻越小，像搬运工来回搬水的频率提高了；水容 2 越大，水阻也越小，像搬运工每次搬水的水桶更大一些。

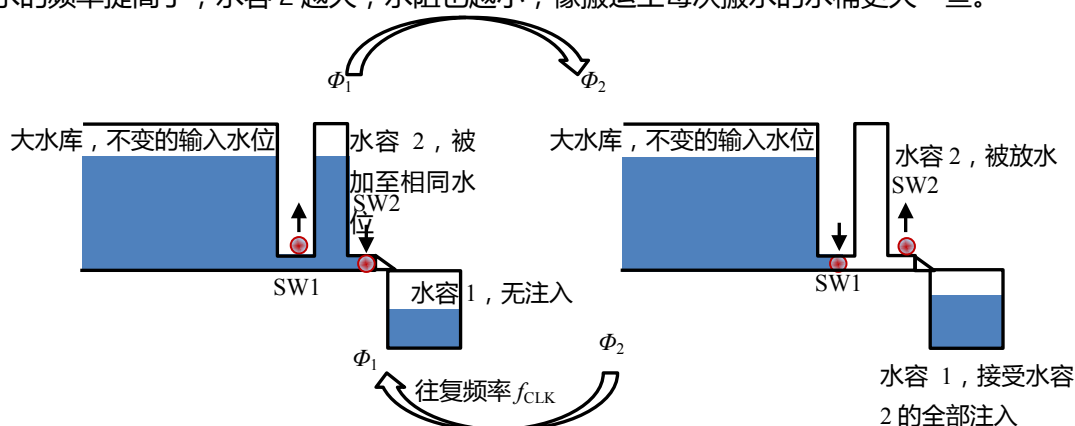


图 Section107-2 积分器的开关水容模型，往复频率越快，水容 1 水位上升越快，相当于水阻越小

完全类似的，电路中的积分器，如图 Section107-3 右侧图，它的电阻 R_{SC} ，也可以通过上述方法实现程控的改变，即用左侧电路代替右侧标准积分器。

图左侧是开关电容模块取代可变电阻的积分器电路。开关电容模块为绿色虚框内电路，由两个开关 SW1 和 SW2，一个电容 C_1 组成。在外部时钟 f_{CLK} 作用下，形成两个开关控制信号——高电平对应开关闭合，低电平对应开关断开。往复之下，开关电容模块则可以视为一个电阻 R_{SC} ，其阻值与外部时钟频率 f_{CLK} ，电容 C_2 相关：

$$R_{SC} = \frac{1}{f_{CLK} \times C_2}$$

[Section107-1]

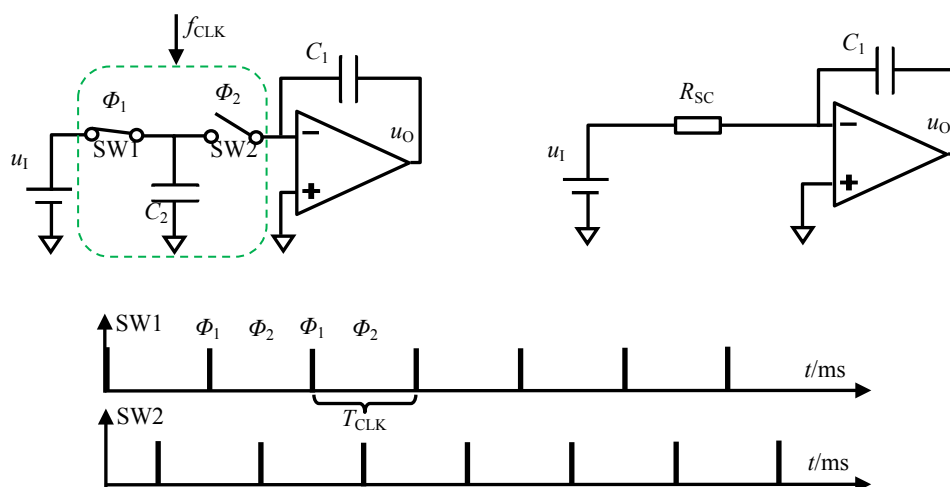


图 Section107-3 开关电容模块取代电阻用于积分器

很容易证明式[Section107-1]：

在 ϕ_1 阶段，存在一个 u_I 给电容 C_2 充电的过程， C_2 得到电荷为：

$$Q = u_I C_2$$

在 ϕ_2 阶段，电容 C_2 通过 SW2 的闭合，接入到积分器运放的负输入端，电容 C_2 中的电荷，将迅速、全部转移给电容 C_1 ，使得 C_2 电压为 0——运放负输入电位变为 0V，这样才会虚短，当然 C_2 的电荷也变为 0。

这样，在一个完整的周期内，电容 C_2 从 u_I 转移走的电荷总量为 $u_I C_2$ ，如果频率为 f_{CLK} ，则 1 秒内，电容 C_2 从 u_I 转移走的电荷总量为：

$$Q_{1s} = u_I C_2 f_{CLK} \quad (1)$$

而一个标准积分器如图右侧，流过电阻 R_{SC} 的电流为：

$$i_R = \frac{u_I}{R_{SC}}$$

在 1 秒内，转移给后续电路的电荷总量为：

$$Q_{1s} = \int_0^{1s} i_R dt = \frac{u_I}{R_{SC}} \times 1s \quad (2)$$

开关电容模块要模拟标准积分器，则两个电荷应相同：

$$\frac{u_I}{R_{SC}} \times 1s = u_I C_2 f_{CLK}$$

即：

$$R_{SC} = \frac{1}{C_2 f_{CLK}}$$

将开关电容积分器用于滤波器，形成开关电容滤波器

至此，我们能够用一个开关电容模块，形成一个可变时间常数的积分器，可以称之为开关电容积分器，其时间常数可以用外部提供的 f_{CLK} 控制。我们将其用于取代传统滤波器中的积分器，就可以用 f_{CLK} 控制滤波器的关键参数了。

这就是开关电容滤波器的核心原理。只要传统滤波器中存在积分器，且积分时间常数会影响滤波器的关键参数，那么，用开关电容积分器代替它，就一定能够做出一个“用外部 f_{CLK} 控制截止频率”的程控滤波器，即开关电容滤波器。

比如图 Section102-1 所示的状态可变量滤波器，其中含有 A2 和 A3 两个积分器，而且从传函可以看出，积分器的时间常数对特征频率是直接影响的，其中的低通输出为：

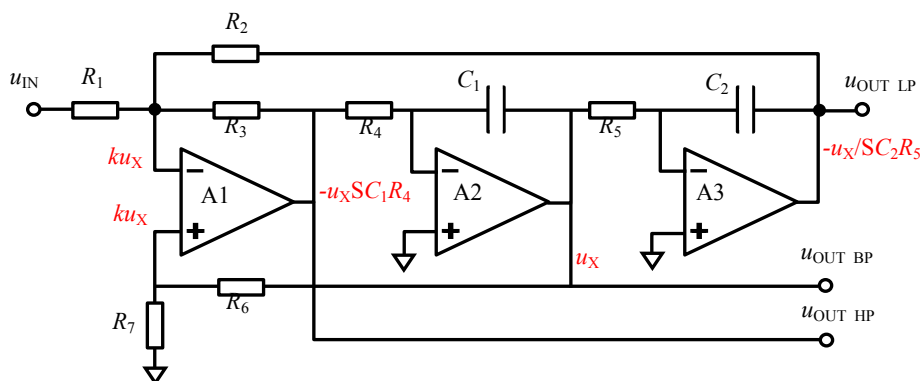


图 Section102-1 状态可变量滤波器

$$A_{LP} = \frac{U_{OUT_LP}}{U_{IN}} = \frac{-U_X}{\frac{SC_2R_5}{U_{IN}}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{(kR_1R_2 + kR_2R_3 + kR_1R_3)}{R_1R_3}SC_2R_5 + S^2C_1C_2\frac{R_5R_4R_2}{R_3}}$$

如果仅将 C_1 和 R_4 组成的积分器，用开关电容积分器代替，那么当外部输入时钟 f_{CLK} 改变时，其特征频率将随着改变。

Section103 所述的 Biquad 滤波器，内部也具有积分器，如图 Section103-1 所示。它本身具有低通和带通输出，经过合适的加法运算，可以实现更为丰富多彩的滤波效果。

绝大多数开关电容滤波器内部，都采用 Biquad 滤波器——用开关电容积分器，取代图中的积分器，其实就是用开关电容形成的电阻，取代图中的 R_4 。低通增益为：

$$A_{LP1} = \frac{U_X}{U_{IN}} = \frac{R_2R_3}{S^2C_1C_2R_1R_2R_3R_4 + SC_1R_1R_2R_4 + R_1R_3}$$

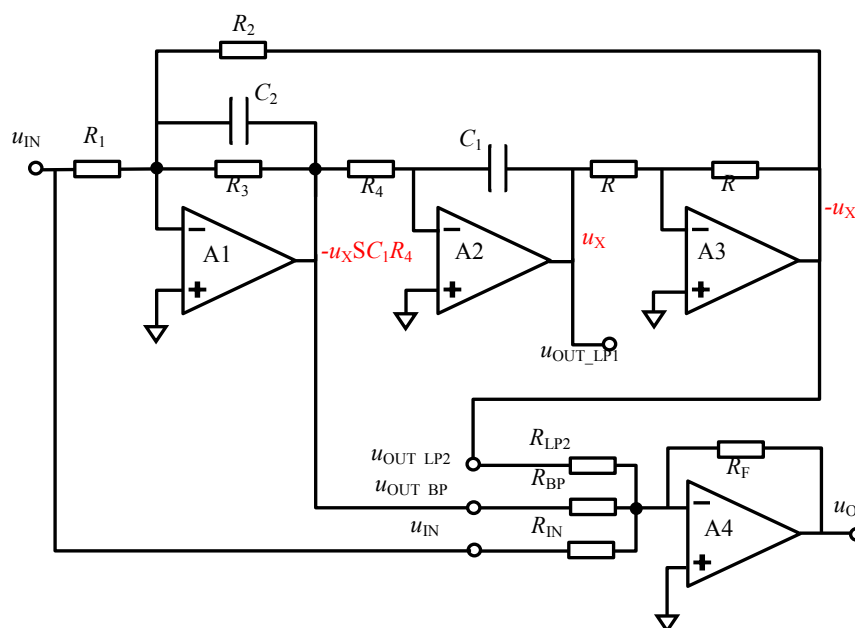


图 Section103-1 Biquad 滤波器

从其低通表达式可看出，改变电阻 R_4 ，确实可以改变滤波器特征频率。

低通型开关电容滤波器

常见的开关电容滤波器，分为低通型和通用型。

低通型是最为常见的，在不同的场合，可以选择巴特沃斯型、贝塞尔型，以及椭圆型。用户仅需要通过输入 f_{CLK} 以确定通带频率（椭圆）、截止频率（巴特沃斯和贝塞尔），即可完成设计。因此，多数低通开关电容滤波器，无需任何外部器件；用户也无需知道其内部结构，按照数据手册正确使用即可。图 Section107-4 是两个实例。

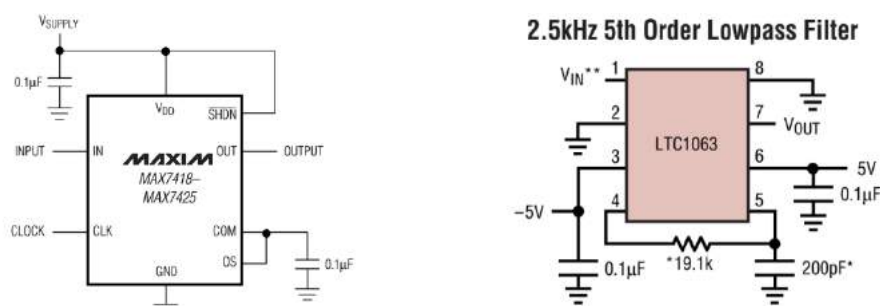


图 Section107-4 两种常见的低通型开关电容滤波器

左边的是 MAXIM 公司的 MAX7418-MAX7425 共 8 种型号的通用电路，它们都是 5 阶低通开关电容滤波器，不同的型号具有不同的供电电压、不同的滤波器数学形态。比如 MAX7418 是椭圆型，具有 1.6 倍的过渡带比，5V 供电；而 MAX7423 则为贝塞尔型，3V 供电。用户需要做的是，根据自己的需要，选择合适的芯片型号，然后给 CLK 端施加设计好的方波，即可。

右边是 Linear Technology 公司的 LTC1063，一款 5 阶巴特沃斯低通滤波器，该电路采用外接电阻、电容实现固定频率 250kHz 的 CLK 输入，最终实现截止频率为 2.5kHz 的巴特沃斯 5 阶低通滤波。

开关电容滤波器常用截止频率 f_{cutoff} 代表其关键的滤波效果。

开关电容滤波器的截止频率，与输入 CLK 频率一般成固定比例，比如：

$$\eta = \frac{f_{\text{CLK}}}{f_{\text{cutoff}}} = 100$$

此值一般为 100，也可以是 50，甚至其他数值，完全取决于芯片的规定。

这类滤波器的时钟输入，一般都可以选择外部时钟，或者采用阻容配合，实现固定频率。

通用型开关电容滤波器

通用型开关电容滤波器，一般可以实现低通、高通、带通、带阻（限波）、全通等多种滤波器形态，因此较为复杂一些，多数需要用户设计外部的电阻。

以 LTC1060 为例，这是一款 2 阶开关电容滤波器模块，内含两个完全相同的模块，可以级联形成 4 阶滤波器电路。它有多种工作模式，取决于芯片第 6 脚 $S_{A/B}$ 的电平和外部电路的连接，当 $S_{A/B}$ 接 V^+ 时，内部开关置于右侧，如图 Section107-5。此时，芯片的 15、4、3、5、2、1 脚连接相应的电阻，就形成了 MODE1 电路。图中虚框内为 LTC1060。

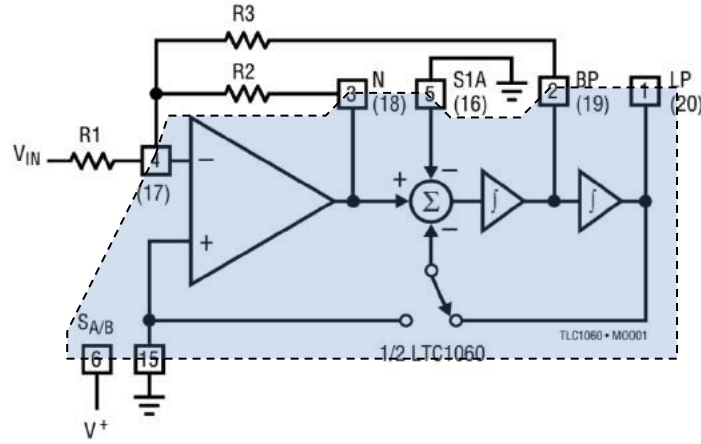


图 Section107-5 通用开关电容滤波器模块 LTC1060 的一种工作模式

根据此时的电路连接，可以列出传递函数：

对图中的积分器（为同相积分器）来说，有下面两个式子成立：

$$V_{LP} = \frac{1}{SRC} V_{BP}; \rightarrow V_{BP} = SRC V_{LP} \quad (3)$$

$$V_{BP} = \frac{1}{SRC} V_{SUM} \rightarrow V_{SUM} = SRC V_{BP} = S^2 R^2 C^2 V_{LP} \quad (4)$$

对图中的加法器来说，有下式成立：

$$V_{SUM} = V_N - V_{LP} \rightarrow V_N = V_{SUM} + V_{LP} \quad (5)$$

对图中的运放，有下式成立：

$$V_N = -\frac{R_2}{R_1} V_{IN} - \frac{R_2}{R_3} V_{BP} \quad (6)$$

将式(3)、(4)、(5)代入式(6)，得：

$$S^2 R^2 C^2 V_{LP} + V_{LP} = -\frac{R_2}{R_1} V_{IN} - \frac{R_2}{R_3} SRC V_{LP}$$

可以解得：

$$V_{LP} (S^2 R^2 C^2 + \frac{R_2}{R_3} SRC + 1) = -\frac{R_2}{R_1} V_{IN}$$

$$A_{LP} = \frac{V_{LP}}{V_{IN}} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{S^2 R^2 C^2 + \frac{R_2}{R_3} SRC + 1} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \times \frac{S}{\omega_0} + (\frac{S}{\omega_0})^2} \quad (7)$$

其中：

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{R_3}{R_2}$$

这是一个标准的低通滤波器。注意，其特征角频率为 $1/RC$ ，即图中积分器的时间常数的倒数，它是由开关电容积分器实现的，即用外部 CLK 控制 RC 。而低通滤波器的品质因数 Q ，则由外部电阻 R_3 和 R_2 控制。

相应的，带通传函和陷波器传函列出如下：

$$A_{BP} = \frac{V_{BP}}{V_{IN}} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{SRC}{S^2 R^2 C^2 + \frac{R_2}{R_3} SRC + 1} \quad (8)$$

$$A_N = \frac{V_N}{V_{IN}} = \frac{V_{SUM} + V_{LP}}{V_{IN}} = \frac{S^2 R^2 C^2 V_{LP} + V_{LP}}{V_{IN}} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1 + S^2 R^2 C^2}{S^2 R^2 C^2 + \frac{R_2}{R_3} SRC + 1} \quad (9)$$

显然，无论哪种输出结果，电阻 R_1 负责控制增益。

集成开关电容滤波器列表

我从上述两家公司官网上整理了如下表格，供读者参考。

表 Section107-1 Maxim 公司开关电容滤波器总汇 46 种

型号	滤波器类型	数学形态	阶数	频率下限	频率上限	频率控制方法	备注
MAX7400/03/04/07	低通	椭圆	8	1	10k	CLK	100:1
MAX7401/05	低通	贝塞尔	8	1	5k	CLK	100:1
MAX7408/11/12/15	低通	椭圆	5	1	15k	CLK	100:1
MAX7409/13	低通	贝塞尔	5	1	15k	CLK	100:1
MAX7410/14	低通	巴特沃斯	5	1	15k	CLK	100:1
MAX7418/21/22/25	低通	椭圆	5	1	45k	CLK	100:1
MAX7419/23	低通	贝塞尔	5	1	45k	CLK	100:1
MAX7420/24	低通	巴特沃斯	5	1	45k	CLK	100:1
MAX7426/27	低通	椭圆	5	1	12k	CLK	100:1
MAX7480	低通	巴特沃斯	8	1	2k	CLK	100:1
MAX280/MXL1062	低通	巴特沃斯	5	DC	20k	CLK/内	100:1 直流优
MAX281	低通	贝塞尔	5	DC	20k	CLK/内	100:1 直流优
MAX291/295	低通	巴特沃斯	8	0.1	25k/50k	CLK/内	100/50:1
MAX292/296	低通	贝塞尔	8	0.1	25k/50k	CLK/内	100/50:1
MAX293/294/297	低通	椭圆	8	0.1	25k/50k	CLK/内	100/50:1
MAX7490/91	通用	Q 可变	2	1	40k	CLK/内	100:1
MAX260/261/262	通用	Q 可变	2	取决于模式 75k		CLK 和编程确定	
MAX263/4/7/8	通用	Q 可变	2	取决于模式 75k		CLK 和编程确定	
MAX265/266	通用	Q 可变	2	取决于模式 140k		CLK 和编程、电阻确定	

表 Section107-2 Linear Technolgy 公司开关电容滤波器总汇 29 种

型号	滤波器类型	数学形态	阶数	频率下限	频率上限	频率控制方法	备注
LTC1062	低通	巴特沃斯	5	DC	20k	CLK/内	100:1 直流优
LTC1063	低通	巴特沃斯	5	DC	50k	CLK/内	100:1 直流优
LTC1064-1	低通	椭圆	8	DC	50k	CLK	100:1
LTC1064-2	低通	巴特沃斯	8	DC	140k	CLK	100/50:1
LTC1064-3	低通	贝塞尔	8	DC	95k	CLK	150/120/75:1
LTC1064-4	低通	椭圆	8	DC	100k	CLK	100/50:1
LTC1064-7	低通	线性相位	8	DC	100k	CLK	100/50:1

LTC1065	低通	贝塞尔	5	0.3	50k	CLK/内	100:1
LTC1066-1	低通	椭/线	8	0.3	50k	CLK/内	100:1
LTC1069-1	低通	椭圆	8	DC	12k	CLK	100:1
LTC1069-6	低通	椭圆	8	DC	20k	CLK	50:1
LTC1069-7	低通	线性相位	8	DC	200k	CLK	25:1
LTC1164-5	低通	巴/贝	8	DC	20k	CLK	100/50:1
LTC1164-6	低通	椭/线	8	DC	30k	CLK	100/50/160:1
LTC1164-7	低通	线性相位	8	DC	20k	CLK	100/50:1
LTC1264-7	低通	线性相位	8	DC	200k	CLK	25/50:1
LTC1059	通用	Q 可变	2	0.1	40k	CLK	100/50:1
LTC1060	通用	Q 可变	2	0.1	30k	CLK	100/50:1
LTC1061	通用	Q 可变	2	0.1	35k	CLK	100/50:1
LTC1064	通用	Q 可变	2	0.1	140k	CLK	100/50:1
LTC1067/-50	通用	Q 可变	2	0.1	40k	CLK	100/50:1
LTC1068/-25/-50/-200	通用	Q 可变	2	0.5	140k	CLK	200/100/50/25:1
LTC1164	通用	Q 可变	2	0.1	20k	CLK	100/50:1
LTC1264	通用	Q 可变	2	0.1	250k	CLK	20:1

举例 1：

使用集成开关电容滤波器，设计一个椭圆低通滤波器，要求通带为 1kHz，通带纹波小于 0.2dB，阻带小于 2kHz，阻带增益小于-65dB。

解：1) 选择集成开关电容滤波器的型号范围。首先，所有的通用型模块都无法实现椭圆型低通滤波，只能选择低通型中的集成椭圆滤波器。其次，椭圆滤波器分为 5 阶和 8 阶两种，其中的 5 阶椭圆，要实现-65dB 的阻带增益非常困难，因此选择 8 阶椭圆滤波器。查阅表 Section107-1 和-2，筛选出 8 阶椭圆型种类如下：

型号	滤波器类型	数学形态	阶数	频率下限	频率上限	频率控制方法	备注
MAX7400/03/04/07	低通	椭圆	8	1	10k	CLK	100:1
MAX293/294/297	低通	椭圆	8	0.1	25k/50k	CLK/内	100/50:1
LTC1064-1	低通	椭圆	8	DC	50k	CLK	100:1
LTC1064-4	低通	椭圆	8	DC	100k	CLK	100/50:1
LTC1066-1	低通	椭/线	8	0.3	50k	CLK/内	100:1
LTC1069-1	低通	椭圆	8	DC	12k	CLK	100:1
LTC1069-6	低通	椭圆	8	DC	20k	CLK	50:1
LTC1164-6	低通	椭/线	8	DC	30k	CLK	100/50/160:1

2) 认真阅读数据手册，挑选合适的集成开关电容滤波器型号。

以典型值为准，我对上述椭圆滤波器的数据手册进行对比，得到下表。

型号	纹波典型值/dB	过渡带比	阻带增益/dB	供电电压/V
MAX7400	0.19	1.5	-82	+5
MAX7403	0.23	1.2	-58	+5
MAX7404	0.19	1.5	-82	+3
MAX7407	0.23	1.2	-58	+3
MAX293	0.15	1.5	-78	±5

MAX294	0.27	1.2	-54	±5
MAX297	0.23	1.5	-79	±5
LTC1064-1	0.15	1.5	-68	±8
LTC1064-4	-0.15-0.6	2	-80	±8
LTC1066-1	0.3	2	-58	±8
LTC1069-1	0.3	1.375	-55	±5
LTC1069-6	0.2	1.375	-45	+10
LTC1164-6	0.4	1.44	-64	±8

其中绿色为合格，选择其中的 MAX293。它有几个优点，第一双电源供电，第二，具有内部独立运放，第三，使用极为简单。但它也有缺点，失真度较差，大致为-70dB，且有大约为 5mV 的 CLK feedthrough，因题目对此未做要求，故选择之。

3) 针对选择好的芯片，完成设计。

完整设计电路如图 Section107-6 所示。理论上，此电路可以实现如下性能：

1) 当开关频率为 100kHz 时，通带频率为 1kHz，阻带频率为 15kHz（从过渡带比 1.5 获得），这满足小于 2kHz 的设计要求。

2) 通带纹波 0.15dB，小于设计要求 0.2dB。

3) 阻带增益-78dB，小于设计要求的-65dB。

具体设计步骤如下：

4) 电源设计

MAX293 供电电压为±5V，因此外部提供 3 根电源线，+5V、-5V、GND，分别连接到对应的芯片管脚，并在正电源、负电源对地分别接 0.1μF 的旁路电容，以保证供电可靠——MAX293 数据手册建议的旁路电容为 0.1μF。此时，输入信号、输出信号均以图中 GND 为基准。

5) 时钟输入

为实现 1kHz 的通带频率，MAX293 需要 100 倍通带频率的时钟输入，也就是 100kHz 的 f_{CLK} 。MAX293 可以采用外部时钟，由时钟电路或者 FPGA 产生 f_{CLK} 后，接入 CLK 脚，也可以采用外接电容实现内部时钟，即在 CLK 对地之间接入一个电容 C_{OSC} ，MAX293 将利用此电容与内部的振荡电路，完成 f_{CLK} 的产生，并自己使用。MAX293 数据手册中规定了振

$$f_{OSC}(kHz) = \frac{10^5}{3C_{OSC}(pF)}$$

荡频率与外部电容的关系为（影印如下）：

换算成统一量纲，则有：

$$f_{CLK}(Hz) = \frac{10^8}{3 \times C_{OSC}(pF)} = \frac{10^8}{3 \times C_{OSC}(pF)} = \frac{10^{-4}}{3 \times C_{OSC}(F)}$$

解得：

$$C_{OSC} = \frac{10^{-4}}{3 \times 10^5} = 0.33 \times 10^{-9}F = 330pF$$

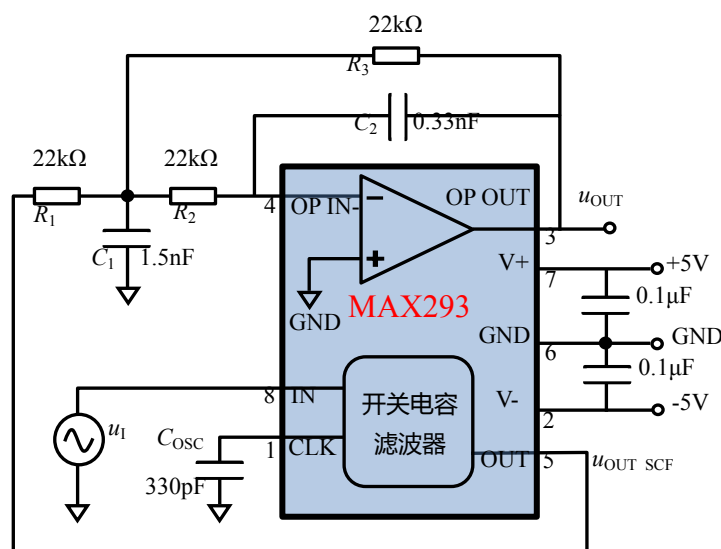


图 Section107-6 举例 1 完成电路

6) 后级滤波器设计

开关电容滤波器的输出中，或多或少都含有 f_{CLK} 的影子，这就是参数中的 Clock FeedThrough，即时钟会串扰到输出中，对 MAX293 来说，这个 100kHz 的串扰会有 5mV 左右。这是集成电路结构决定的，厂家做出了努力试图减少它，并且也将其减少了很多，但它仍然存在。因此，一般来说，开关电容滤波器的后级，再增加一级模拟低通滤波器，是合适的。怪不得 MAX293 内部，买一送一，集成了一个运放。

利用这个运放设计一个二阶低通滤波器，可以有效抑制开关频率的串扰。低通滤波器的截止频率既不能太小，也不能太大。二阶低通的截止频率太小，会靠近椭圆滤波器的通带频率，对椭圆滤波器性能会影响很大，特别是带内波动。二阶低通的截止频率太大，则会靠近 100kHz 的时钟，对 100kHz 的抑制能力将下降，起不到应有的作用。

一般来说，选择二阶低通的截止频率为椭圆滤波器通带频率的 2.5~20 倍，是合适的。本例中选择为 10 倍，即截止频率为 10kHz。

这个二阶低通，一般设计成巴特沃斯型，即 Q 约为 0.707。

这个二阶低通，一般选择为 MFB 型，是为了避免 SK 型容易出现的高频馈通——见本书 Section90。

由于开关电容滤波器的输出带载能力非常有限，要求后级滤波器必须具有足够大的输入阻抗，对 MAX293 来说，它要求后级输入电阻大于 20kΩ。这直接决定了滤波器中电阻 R_1 的选择。MAX293 数据手册中给出了设计电路，本例照搬了此设计，如图 Section107-6 所示，其中选择 R_1 为 22kΩ。

按照本书 Section87 中给出的公式，可以算出此滤波器的截止频率为 10.28kHz， $Q=0.71$ 。

至此，设计完毕。

集成开关电容滤波器的好处和局限性

好处有：

- 1) 易于使用。特别是低通型，实在是方便至极。
- 2) 中心频率（特征频率）易于修改，改变外部时钟频率即可。

3) 外部不需要电阻、电容, 或者使用很少的电阻, 稳定性、一致性、故障率等易于保证。

局限性有:

1) 低通只能实现指定若干常见参数, 无法实现任意参数。

2) 失真度还是比不过用运放构建的滤波器。

3) 噪声虽然已经很小, 但还是一个需要注意的问题。

4) CLK feedthrough (时钟馈通), 是指输出信号中或多或少仍存在时钟的影子, 即时钟频率馈通到了输出信号中。虽然现代开关电容滤波器, 已经将此降至很低, 但最好在其后面串联一级普通低通滤波器。

5) 失调电压, 仍然比不过用运放构建的滤波器。虽然有 DC ACCURATE 型, 比如 MAX280 和 [LTC1062](#), 但失调仍是开关电容滤波器的弱项。