Universität Bayreuth: Philosophy & Economics, SoSe 2009

Klausur: Grundlagen des Entscheidens I

Datum: 28. Juli 2009
Dozent: Eckhart Arnold

1 Aufgabe: Bayes und Entscheidungsbäume

Eine Ölfirma möchte in der Nordsee eine Bohrinsel (Kosten: 10 Mio Euro) errichten, um Öl zu fördern. Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieses Gebiets auf Öl zu stoßen, beträgt 60%. Im Erfolgsfall rechnet die Firma mit Einnahmen von 50 Mio Euro.

Ein Geologe bietet der Firma für 1 Mio Euro für die Durchführung einer Expertise an. Ist tatsächlich Öl vorhanden, so wird dies durch die Expertise mit 95%-iger Sicherheit festgestellt werden. Ist kein Öl vorhanden, so wird dies durch die Expertise mit 85%-iger Sicherheit festgestellt.

1. Angenommen, die Expertise wird durchgeführt und fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich Öl vorhanden ist?

2. Angenommen, die Expertise fällt negativ aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem Öl vorhanden ist?

3. Stellen Sie den Entscheidungsbaum auf und beantworten Sie die Frage, ob die Firma die Expertise durchführen sollte oder nicht.

2 Aufgabe: Wahlverfahren

Bei der Abstimmung über drei Kandidaten A, B, C für ein bestimmtes Amt stehen folgende drei Abstimmungsverfahren zur Auswahl: a) *Stimme für Einen*: Jeder Wähler schreibt seinen bevorzugten Kandidaten auf einen Zettel; der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt. b) *Stimme für Zwei*: Jeder Wähler schreibt seine zwei bevorzugten Kandidaten auf einen Zettel; der mit den meisten Stimmen bzw. Nennungen gewinnt. c) *Borda-Zählung*: Jeder vergibt Punkte für die Kandidaten, und zwar 2 Punkte für den am meisten bevorzugten Kandidaten, 1 Punkt für den mittleren und 0 Punkte für den am wenigsten geschätzten Kandidaten; der Kandidat mit den meisten Punkten gewinnt.

1. Finden Sie ein Präferenzprofil, bei dem nach dem Abstimmungsverfahren a) *Stimme für Einen* ein anderer Kandidat gewinnt als nach dem Abstimmungsverfahren b) *Stimme für Zwei*.

2. Finden Sie ein Präferenzprofil, bei dem nach jedem der drei Abstimmungsverfahren ein anderer Kandidat gewinnt.

Es sollen immer genau drei Kandidaten vorkommen. Die Anzahl der Wähler kann frei gewählt werden.

3 Aufgabe Lotterien

Sei $\mathcal{G}$ eine Menge von Grundgütern auf der eine Menge $\mathcal{L}$ von Lotterien der Form $L(a, x, y)$ definiert ist, wobei $0 \leq a \leq 1$ und x und y jeweils entweder Gründgüter oder wiederum Lotterien sind. Sei weiterhin $B \in \mathcal{G}$ ein bestes Gut aus der Menge der Grundgüter, d.h. es gelte für jedes Grundgut $x \in \mathcal{G}$, dass $B \succeq x$. Gezeigt werden soll nun, dass auch für jede Lotterie $L \in \mathcal{L}$ gilt, dass $B \succeq L$.

Es darf nicht das Erwartungsnutzentheorem vorausgesetzt werden. sondern nur die grundlegenden Bedingungen und Korrolarian für Lotterien (Ordnung und Kontinuität von Lotterien, Bedingung der höheren Gewinne und besseren Chancen, Reduzierbarkeit und Subsitutionsgesetz).

Zur Erinnerung: Die *Bedingung der höheren Gewinne* besagt: Für beliebige Lotterien oder Grundgüter x, y, z und beliebige Wahrscheinlichkeiten a gilt sowohl: $x \succ y$ *genau* dann wenn $L(a, x, z) \succ L(a, y, z)$, als auch: $x \succ y$ *genau* dann wenn $L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$

1. Zeige: Es existiert kein Grundgut x, für das $L(a, x, B) \succ L(a, B, B)$ oder $L(a, B, x) \succ L(a, B, B)$ gilt.

2. Zeige: Es existieren keine zwei Grundgüter x, y, für die gilt $L(a, x, y) \succ L(a, B, B)$

   Im Folgenden sei der *Grad einer Lotterie* so definiert: Alle Grundgüter haben den Grad 0. Der Grad der Lotterie $L(a, L_1, L_2)$ ist $n + 1$, wenn n der Grad derjenigen Lotterie ist, die von L_1 und L_2 den höheren Grad hat. Umgangssprachlich gibt der Grad also die Verschachtelungstiefe einer Lotterie an. (Es gibt keine unendlich tief verschachtelten Lotterien.)

3. Zeige: Angenommen, es gäbe keine Lotterie L^* mit einem Grad kleiner n, die gegenüber B vorgezogen wird, dann existiert auch keine Lotterie L^* mit einem Grad kleiner n, für die $L(a, L^*, B) \succ L(a, B, B)$ oder $L(a, B, L^*) \succ L(a, B, B)$ gilt.

4. Zeige: Unter derselben Annahme existieren auch keine zwei Lotterien L_1^*, L_2^* mit Graden kleiner n, für die gilt $L(a, L_1^*, L_2^*) \succ L(a, B, B)$

5. Zeige, dass es – *unabhängig* vom Grad der Lotterie – keine Lotterie gibt, die gegenüber B vorgezogen wird.

Viel Glück!