(7.1.-8) ***Beispiel***
Äquivalente Mengen und ihre Wahrscheinlichkeiten kann man nicht nur benutzen, um wie in Beispiel (7.1.-2) Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, sondern auch, um Annahmen über Wahrscheinlichkeiten zu widerlegen (siehe auch [AE], Seite 162):

Es werde mit 2 Münzen unabhängig voneinander geworfen, die Ergebnisse seien Wappen oder Zahl, kurz W1, Z1 und W2, Z2, die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsbewertung sei P.
Münze 1: $P(\{W1\}) = x$; $P(\{Z1\}) = 1 - x$
Münze 2: $P(\{W2\}) = y$; $P(\{Z2\}) = 1 - y$

Es sei
$S_1 = \{(W1, W2), (W1, Z2), (Z1, W2), (Z1, Z2)\}$ mit der Bewertung P_1.
$S_2 = \{W, V, Z\}$ mit der Bewertung P_2.

Es gelte die Äquivalenz:

$\{W\} \subset S_2$	$\leftrightarrow$	$\{(W1, W2)\} \subset S_1$	„beides mal Wappen“
$\{Z\} \subset S_2$	$\leftrightarrow$	$\{(Z1, Z2)\} \subset S_1$	„beides mal Zahl“
$\{V\} \subset S_2$	$\leftrightarrow$	$\{(W1, Z2), (Z1, W2)\} \subset S_1$	„verschiedene Ergebnisse“

Aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt dann mit geeigneten Zahlen a, b:

(1) $a = P_2(\{W\}) = P_1(\{(W1, W2)\} = P(\{W1)\cdot P(\{W2) = xy$
(2) $b = P_2(\{Z\}) = P_1(\{(Z1, Z2)\} = P(\{Z1\})\cdot P(\{Z2\}) = (1 - x)(1 - y)$
(3) $1 - a - b = P_2(\{V\}) = P_1(\{(W1, Z2), (Z1, W2)\} = P(\{W1\})\cdot P(\{Z2\}) + P(\{Z1\})\cdot P(\{W2\})$
$= x(1 - y) + (1 - x)y$

Aus (1) und (2) folgt:

$$x_1 = \frac{1+a-b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+a-b)^2 - 4a} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1+a-b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1+a-b)^2 - 4a}$$
$$x_2 = \frac{1+a-b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1+a-b)^2 - 4a} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{1+a-b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+a-b)^2 - 4a},$$

also insbesondere:
$$(1 + a - b)^2 - 4a \geq 0$$

Wenn man sich zu Beginn über P_2 keine weiteren Gedanken macht, so kann man aufgrund des Indifferenzprinzips (siehe Kapitel 8.3) annehmen, dass die drei Elementarereignisse bei S_2 gleichwahrscheinlich – also gleich $\frac{1}{3}$ – sind. Das widerspricht aber der Ungleichung, da aus $a = b$ folgt: $a = b \leq \frac{1}{4}$.

Die beiden Annahmen

- die Ergebnisse der beiden Münzwürfe sind unabhängig voneinander
- die 3 Elementarereignisse aus S_2 haben dieselbe Wahrscheinlichkeit

sind also unvereinbar.

7.2 Gleichverteilung