Universität Bayreuth: Philosophy & Economics, SoSe 2009

Alte Klausuren und Übungsklausuren zur Vorbereitung auf die GDE-I Klausur

Nachfolgend sind ein par Übungsaufgaben für die GDE-Klausur zusammengestellt. Da es sich dabei um Aufgaben aus alten Klausuren bzw. Übungsklausuren handelt, könnte es sein, dass sie zur Vorlesung aus dem Sommersemester 2009 nicht unbedingt immer passen bzw. dass Themen darin vorkommen, die wir (noch) nicht besprochen haben, wie z.B. Spieltheorie.

Eckhart Arnold, 9. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Die Klausuren

1.1 Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Hier sind ein par Aufgaben von der Art, wie sie in der Klausur vorkommen werden.

1.1.1 Entscheidungen unter Unwissenheit

1. Betrachte folgende Entscheidungstabellen:

Tabelle 1:

A_1	4	8	12	0
A_2	3	2	3	3
A_3	1	5	14	6
A_4	2	3	1	7

Tabelle 2:

A_1	0	-1	2	5
A_2	-3	12	2	4
A_3	1	8	-2	6
A_4	2	5	1	0

Löse beide Entscheidungstabellen:

(a) nach der (lexikalischen) Maximin-Regel

(b) nach der (lexikalischen) Minimax-Bedauerns-Regel

(c) nach dem Indifferenzprinzip

(d) nach der Optimismus-Pessimismus-Regel mit einem Optimismus-Index von 3/4

2. Welche der folgenden Nutzenfunktionen beschreiben jeweils denselben *ordinalen* Nutzen und welche denselben *kardinalen* Nutzen:

(a)

Gut:	A	B	C	D	E	F
u_1:	3	2	5	8	1	4
u_2:	6	4	8	16	2	7
u_3:	7	4	13	22	1	10

(b) $u_1(x) = 2x \qquad u_2(x) = -x \qquad u_3(x) = x^2 \qquad u_4(x) = 5x^2 - 3$

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ein Patient, der kürzlich einen Urlaub in Zentralafrika verbracht hat, wird mit Verdacht auf Malaria in die Klinik eingeliefert. Es ist bekannt, dass etwa bei 0.5% derartiger Verdachtsfälle tatsächlich eine Malariaerkrankung auftritt. Die behandelnde Ärztin führt zunächst einen Antigen-Schnelltest durch. Dieser Schnelltest hat eine positiv-positiv Rate von 80% und eine positiv-negativ Rate von 0.01%. Der Test fällt *negativ* aus.

   Da der Schnelltest nicht besonders sensitiv ist (wie man an der niedrigen positiv-positiv Rate sieht), führt die Ärztin noch einen zweiten Test auf Basis einer Polymerase-Kettenreaktion durch. Dieser Test, der mit einer positiv-positiv Rate von 99,5% und einer positiv-negativ Rate von 0.3% sehr viel zuverlässiger ist, fällt positiv aus.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Ärztin davon ausgehen, dass der Patient an Malaria erkrankt ist?

2. Die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit wird wie folgt definiert:

   (a) Es gibt eine endliche Menge von Elementarereignissen: Ω. (Beispiel: Beim Würfeln $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

(b) Jedes Ereignis ist durch eine Menge E charakterisiert, die Teilmenge von Ω ist: $E \subseteq \Omega$. (Beispiel: Das Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln, wird durch die Menge $E = \{2, 4, 6\}$ beschrieben.)

(c) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist definiert als die Anzahl der Elemente der Ereignismenge („günstige Fälle“) geteilt durch die Anzahl der Elementarereignisse („mögliche Fälle“). Wenn $|M|$ die Anzahl der Elemente der Menge M beschreibt, dann ist die Wahrscheinlichkeit p also definiert durch: $p(E) := \frac{|E|}{|\Omega|}$.

Beweise, dass die Laplac'sche Wahrscheinlichkeit die kolmogorowschen Axiome erfüllt:

(a) Axiom: $\forall_{E \subset \Omega} \quad p(E) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad p(E) \geq 0$

(b) Axiom: $p(\Omega) = 1$

(c) Axiom: $\forall_{E,F \subset \Omega} \quad E \cap F \neq \emptyset \Rightarrow p(E \cup F) = p(E) + p(F)$

3. Zeige, dass aus den drei kolmogorwschen Axiomen, die *Monotonie* von Wahrscheinlichkeiten folgt:

$$\forall_{E,F \subset \Omega} \quad E \subset F \Rightarrow p(E) \leq p(F)$$

1.1.3 Entscheidungen unter Risiko

1. In Amerika ist eine Grippewelle ausgebrochen. Experten rechnen damit, dass die Grippewelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% auch Deutschland erreicht. Wenn sie Deutschland erreicht, dann erkrankt ein Anteil von 15% der Bevölkerung. Wird die Grippe nicht behandelt, so sterben 3% der Erkrankten.

   Die Gesundheitsministerin erwägt nun, ein breit angelegtes Impfprogramm für die gesamte Bevölkerung durchführen zu lassen. Wird die Impfung frühzeitig verabreicht, so senkt sie das Erkrankungsrisiko auf 2%. Allerdings ist die Impfung nicht ganz ohne Risiko, denn es kommt – geheim gehaltenen Zahlen zufolge – bei 0.2% der geimpften Personen zu schweren Komplikationen, die zum Tod führen.

   Wenn die Grippe bereits ausgebrochen ist, kann die Gesundheitsministerin immer noch die Entscheidung treffen, eine Impfung durchführen zu lassen, falls das nicht schon vorher geschehen ist. Allerdings ist die Impfung zu diesem späteren Zeitpunkt nicht mehr so effektiv. Sie senkt das Erkrankungsrisiko dann nur noch auf 10% bei gleichem Risiko von Komplikationen.

   Aufgaben:

   (a) Stelle das Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum dar.

(b) Sollte die Gesundheitsministerin eine frühzeitige Durchführung des Impfprogramms anstreben?

(c) Angenommen es hätte im Vorfeld eine öffentliche Diskussion über die Risiken des Impfprogramms gegeben, so dass die Durchführung des Impfprogramms zu einem frühen Zeitpunkt, als noch nicht klar war, ob sie Deutschland überhaupt erreicht, politisch nicht durchsetzbar war. Angenommen weiterhin, die Grippewelle hat Deutschland schließlich dennoch erreicht und der Ruf nach einer schleunigen Massenimpfung wird laut. Sollte die Gesundheitsministerin jetzt doch noch das Impfprogramm durchführen?

2. Für eine auf einer Menge von Lotterien definierte Präferenzrelation gilt neben den üblichen Ordnungsgesetzen von Präferenzrelationen u.a.:

   (a) *Bedingung der höheren Gewinne*: Für beliebige Lotterien x,y und L^* und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt:
      i. $L^* \succ x$ genau dann wenn $L(a, L^*, y) \succ L(a, x, y)$.
      ii. $L^* \succ y$ genau dann wenn $L(a, x, L^*) \succ L(a, x, y)$.

   (b) *Reduzierbarkeit zusammengesetzter Lotterien*: Für jede zusammengesetzte Lotterie der Form $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$ gilt $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y)) \sim L(d, x, y)$ mit $d := ab + (1 - a)c$.

   Zeige allein mit Hilfe dieser beiden Bedingungen (und der Ordnungsgesetze für Präferenzrelationen):

   (a) Es kann *nicht* gelten: $L(a, x, x) \succ x$
   (b) Es kann *nicht* gelten: $x \succ L(a, x, x)$

3. Nimm weiterhin folgende Bedingungen als gegeben an (ergibt sich aus der vorhergehenden Aufgabe): Für alle Wahrscheinlichkeiten a und alle Lotterien x gilt: $L(a, x, x) \sim x$

   Zeige allein mit dieser und den Bedingungen aus der vorhergehenden Aufgabe: Wenn B ein bestes Grundgut ist, dann kann es keine Lotterie $L(a, x, y)$ geben für die gilt: $L(a, x, y) \succ B$

1.1.4 Spieltheorie

1. Löse das folgende Spiel durch sukkzessive Dominanz (Gib dazu in der richtigen Reihenfolge die zu streichenden Zeilen- bzw. Spaltenstrategien an):

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	4	2	0	14
Z_2	11	7	1	12
Z_3	9	6	4	5
Z_4	3	4	2	8

2. Gegeben seien diese beiden Spiele:

Spiel A

	S_1	S_2
Z_1	2, 1	0,0
Z_2	-1,-2	1,3

Spiel B

	S_1	S_2
Z_1	0,0	-1,1
Z_2	1,-1	-2,-2

Aufgaben:

(a) Bestimmte zu jedem Spiel:

i. die *reinen* Nash-Gleichgewichte (sofern vorhanden).

ii. die *gemischten* Nash-Gleichgewichte (sofern vorhanden).

(b) Bestimme den Erwatungswert der Spiele für jeden Spieler in den gemischten Gleichgewichten.

1.2 Die Klausur

Aufgabe: Entscheidungen unter Unwissenheit

Lösen Sie nach der Minimax-Bedauerns-Regel. Stellen Sie dazu die Bedauernstabelle auf und geben Sie dann an, welche drei Handlungen A_1, A_2 oder A_3 gewählt werden sollte.

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	3	7	500	4
A_2	200	100	3	50
A_3	150	60	2	25

Aufgabe: Entscheidungsbäume

Eine Person steht vor einem Entscheidungsproblem, das durch den Entscheidungsbaum *auf der letzten Seite* dargestellt wird:

1. Sollte die Person an dem weiter rechts liegenden der beiden Entscheidungsknoten besser „Handlung A" oder „Handlung B" wählen?
2. Wie groß ist der Erwartungswert von „Alternative 1" (am ersten Entscheidungsknoten von links)?
3. Sollte die Person „Alternative 1" oder „Alternative 2" wählen?

(Nehmen Sie dabei an, dass die Person sich rational verhält und den Wert von zufälligen Ereignissen immer nach dem Erwartungsnutzenprinzip berechnet.)

Aufgabe: Nash-Gleichgewichte

Gegeben sei folgendes Zwei-Personen Spiel:

	S_1	S_2
Z_1	1, 1	2, 0
Z_2	0, 2	4, 4

1. Geben Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte des Spiels an.
2. Berechnen Sie das *gemischte* Nash-Gleichgewicht. Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zeilenspieler im gemischten Gleichgewicht Z_1 spielt, und mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spaltenspieler im gemischten Gleichgewicht S_1 spielt.

Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz

Ein Bergbau-Unternehmen möchte in Sibieren Gold abbauen. Experten schätzen, dass in dem dafür vorgesehenen Gebiet mit einer Wahrscheinlichkeit von **30%** reiche Goldvorkommen zu finden sind. Bevor das Unternehmen jedoch eine Abbau-Konzession von der Regierung erwirbt, hat es sich das Recht vorbehalten, Probegrabungen durchzuführen. Falls tatsächlich Goldvorkommen vorhanden sind, dann liefern die Probegrabungen mit **95%** Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis. Allerdings liefern sie mit **10%** Wahrscheinlichkeit auch dann ein positives Ergebnis, wenn in Wirklichkeit kein Gold vorhanden ist.

Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann noch davon ausgegangen werden, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabungen ein *negatives* Ergebnis liefern? Stellen Sie zur Lösung der Aufgabe die entsprechende Rechnung mit Hilfe des Bayes'schen Lehrsatzes auf, und rechnen Sie dann die Lösung aus.

Aufgabe: Beweise

1. Es seien x und y zwei Güter oder Lotterien mit $x \not\sim y$. Für welche Wahrscheinlichkeit b gilt dann: $L(a, x, y) \equiv L(b, y, x)$? Mit anderen Worten: Für welchen Wert von b sind die beiden Lotterien über dieselben Güter, aber in umgekehrter Reihenfolge identisch?

2. Die *Bedingung der höheren Gewinne* besagt, dass für beliebige Lotterien x,y und z und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt: $x \succ y$ genau dann wenn $L(a, x, z) \succ L(a, y, z)$. (Anders gesagt: Eine Lotterie wir dann vorgezogen, wenn man mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf der *ersten* Stelle einen höheren Gewinn erzielen kann, sofern der Gewinn auf der zweiten Stelle derselbe ist.)

   Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Bedingung der höheren Gewinne auch auf der zweiten Stelle gilt, d.h. dass für beliebige Lotterien x,y und z und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt: $x \succ y$ genau dann wenn $L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$.

   (Die Gültigkeit der Bedingung der höheren Gewinne auf der ersten Stelle und Ihr Ergebnis der ersten Aufgabe dürfen Sie dabei voraussetzen, aber *nicht* den Erwartungsnutzen!)

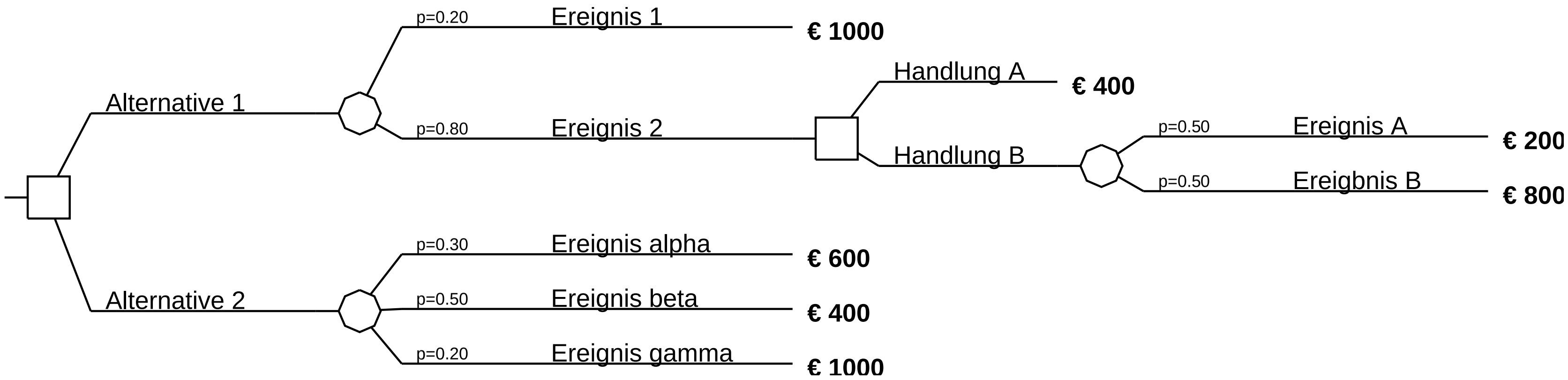

Abbildung 1: Der Entscheidungsbaum zu Aufgabe 1.2.

1.3 Die Nachklausur

1.3.1 Aufgabe: Entscheidungsbäume

Ein Automobilunternehmen möchte ein neu zu entwickelndes Elektroauto auf den Markt bringen, das zwar weniger schnell fährt aber dafür unglaublich sparsam ist. Es besteht kein Zweifel daran, dass die Entwicklung eines solchen Wagens technisch möglich ist. Allerdings würden bis zur Marktreife immer noch Forschungs- und Entwicklungskosten von 10 Mio Euro anfallen. Wird der neue Wagen vom Markt akzeptiert, so rechnet die Firma mit einem Ertrag von 15 Mio Euro (worin die Forschungs- und Entwicklungskosten *nicht* eingerechnet sind).
Aus Konsumentenbefragungen schließt das Management der Firma, dass die Chance auf einen Markterfolg bei 60% liegt. Nun erwägt die Firma, die Markteinführung des neuen Wagens durch eine breit angelegte Werbekampagne abzustützen. Die Werbekampagne würde noch einmal mit 1 Mio Euro zu Buche schlagen, aber die Chance auf einen Markterfolg auf 80% erhöhen.

Aufgaben

1. Stellen Sie den Entscheidungsbaum auf.
2. Wie hoch ist der erwartete Ertrag, wenn die Firma eine Werbekampagne durchführt?
3. Sollte die Firma demnach eine Werbekampagne durchführen?

1.3.2 Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz

Frau Schmitz ist Einkäuferin für die Gemüseabteilung eines großen Supermarktes. Ihr ist bekannt, dass ca. 3% des von Zwischenhändlern angebotenen Gemüses übermäßig stark durch Pestizide belastet ist. Daher führt sie vor der Abnahme der Ware immer einen standardisierten Schnelltest auf Pestizidbelastung durch. Dieser Schnelltest hat eine positiv-positiv Rate von 90% und eine positiv-negativ Rate von 5%.

Aufgaben:

1. Aufgabe Ein Zwischenhändler bietet Ihr eine Ladung Gurken an, die von ihr *positiv* gestestet wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist damit zu rechnen, dass die Gurken tatsächlich pestizid-belastet sind?
2. Der Zwischenhändler protestiert und verlangt einen zweiten Test nach einem aufwändigeren aber genaueren Verfahren. Die Kenndaten dieses

Verfahrens sind eine positiv-positiv Rate von 98 % und eine positiv-negativ Rate von 1%. Angenommen der zweite Test nach dem aufwändigeren Verfahren fällt negativ aus: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann dennoch mit einer Pestizidbelastung zu Rechnen?

1.3.3 Aufgabe: Einfache Spiele

Gegeben sei folgende Spielmatrix („Chicken Game“):

	K	D
K	0, 0	-1,1
D	1,-1	-10,-10

Aufgabe: Bestimme alle Gleichgewichte des Spiels.

1.3.4 Aufgabe: Wiederholte Spiele

Im einem paarweisen, unbestimmt oft *wiederholten Gefangendilemma* mit folgender Auszahlungsmatrix

	Kooperiere	Defektiere
Kooperiere	3, 3	0, 5
Defektiere	5, 0	1, 1

seien folgende vier Strategien vertreten:

1. *Tit for Tat*: Kooperiert in der ersten Runde und kooperiert in den folgenden Runden immer genau dann, wenn die Gegnerstrategie in der vorhergehenden Runde auch kooperiert hat.
2. *Random*: Kooperiert oder defektiert vollkommen zufällig.
3. *Dove*: Kooperiert immer.
4. *Hawk*: Defektiert immer.

Aufgaben: Besimme die Durchschnittspunktzahl, die

1. *Dove* gegen *Random* erhält.
2. *Hawk* gegen *Random* erhält.
3. *Tit for Tat* gegen *Random* erhält.

1.3.5 Aufgabe: Beweisaufgabe

Das sogenannte „Paradox des Liberalismus“ besagt, dass es *kein* Verfahren zum Treffen kollektiver Entscheidungen gibt, welches den weiter unten angegebenen Bedingungen genügt. Dabei seien mit Kleinbuchstaben x, y, z die Güter bezeichnet, über deren Anordnung in einer kollektiven Präferenzrelation entschieden werden muss. Mit Großbuchstaben A, B seien die Individuen bezeichnet, die dem Kollektiv angehören. Die Präferenzen eines Individuums I seien mit $\succ_I, \prec_I, \sim_I$ symbolisiert. Die kollektiven Präferenzen seien dagegen mit $\succ_K, \prec_K, \sim_K$ bezeichnet. Als Bedingungen gelten:

1. *minimale Fairness*: Für jedes beteiligte Individuum gilt: Seine Präferenzen setzten sich mindestens bei einem Paar von Alternativen durch, d.h.
$$\forall_I \exists_{x,y} \quad x \succ_I y \Rightarrow x \succ_K y$$
2. *unbeschränkter Bereich*: Jedes beliebige individuelle Präferenzprofil ist zugelassen (solange die Präferenzen wohlgeformt sind).
3. *Pareto-Effizienz*: Wenn *alle* Individuen eine bestimmte Alternative einer anderen vorziehen, dann sollte die Alternative auch nach der kollektiven Präferenzordnung vorgezogen werden, d.h.
$$(\forall_I \quad x \succ_I y) \Rightarrow x \succ_K y$$

Angenommen nun, es existiere ein Kollektiv K, dem zwei Individuen A und B angehören und es stünden drei Alternativen x, y, z zur Auswahl.
Weiterhin sei gemäß der Bedingung 1 („minimale Fairness“) festgelegt, dass sich bezüglich der Alternative x oder z die Präferenzen des Individuums A durchsetzen und bezüglich der Altenative y oder z die Präferenzen des Individuums B.

Aufgabe: Zeige: Bei „ungünstig“ verteilten Präferenzen der Individuen A und B ist es unmöglich unter Erfüllung aller drei Bedingungen eine der Alternativen x, y, z als die kollektiv am meisten bevorzugte auszuzeichnen.

Tipp: Gehe in folgenden Schritten vor:

1. Wähle zuerst möglichst „ungünstig“ verteilte Präferenzen für A und B.

   Nur dann kann das Problem überhaupt entstehen. Wenn A und B dieselben oder sehr ähnlich Präferenzen hätten, würde die Abbildung ihrer individuellen Präferenzen auf eine kollektive Präferenzordnung keinerlei Schwierigkeiten aufwerfen.

2. Zeige für jedes des Güter x, y, z einzeln, dass es aufgrund einer oder mehrerer der drei Bedingungen bei den für A und B festgelegten Präferenzen nicht die kollektiv bevorzugte Alternative sein kann.

   Kann man dies für jede der Alternativen zeigen, dann ist damit bewiesen, dass die Entscheidung über eine kollektive Präferenzordnung unmöglich ist, denn bei einer solche kollektive Präferenzordnung müsste ja irgendeine eine Alternative an der Spitze stehen.