Universität Bayreuth: Philosophy & Economics, SoSe 2009

Nachklausur: Grundlagen des Entscheidens I

Datum: 3. November 2009
Dozent: Eckhart Arnold

1 Aufgabe: Bayes und Entscheidungsbäume

Ein Risikokapitalgeber erwägt, **30 Mio Euro** in eine Firma zu investieren, die in einem bisher unerschlossenen Gebiet der Arktis Gold fördern will. Die Vertreter der Firma sind fest von ihrem Vorhaben überzeugt, obwohl Experten die Wahrscheinlichkeit, dass sich in diesem Gebiet tatsächlich Gold befindet, lediglich auf **45 %** schätzen. Sollten die Firmenvertreter recht behalten, so könnte die Investition dem Risikokapitalgeber immerhin satte **600 Euro Mio** einbringen.

Ein Team von Geologen bietet dem Risikokapitalgeber an, mit Hilfe seismischer Testverfahren das Gebiet auf Goldvorkommen hin zu untersuchen. Ist Gold vorhanden, so können die Geologen dies mit **88%**-iger Sicherheit prognostizieren. Ist kein Gold vorhanden, so wird das soger mit einer Zuverlässigkeit von **97%** festgestellt. Für ihre Untersuchung verlangen die Geologen **8 Mio Euro**.

Aufgabe:

1. Bestimmen Sie (mit Hilfe der Bayes'schen Formel) die bedingten Wahrscheinlichkeiten, mit denen Gold vorhanden ist bzw. nicht vorhanden ist, falls *a)* die Prognose der Geologen positiv, und *b)* falls sie negativ ausfällt.

2. Stellem Sie den Entscheidungsbaum für das beschriebene Entscheidungsproblem auf.

3. Ein Manager im Team des Risikokapitalgebers spricht sich gegen die Expertise aus mit dem Argument, dass der Erwartungsnutzen von $0.45 \cdot 600 = 270$ Mio Euro bereits deutlich höher sei als die Investition von 30 Mio Euro. Zusätzliches Geld für eine Expertise auszugeben sei schon deshalb unnötig. Ist dieses Argument stichhaltig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Aufgabe: Sozialwahltheorie

Das sogennante „Paradox des Liberalismus“ besagt, dass es *kein* Verfahren zum Treffen kollektiver Entscheidungen gibt, welches den weiter unten angegebenen Bedingungen genügt. Dabei seien mit Kleinbuchstaben x, y, z die Güter bezeichnet, über deren Anordnung in einer kollektiven Präferenzrelation entschieden werden muss. Mit Großbuchstaben A, B seien die Individuen bezeichnet, die dem Kollektiv angehören. Die Präferenzen eines Individuums I seien mit $\succ_I, \prec_I, \sim_I$ symbolisiert. Die kollektiven Präferenzen seien dagegen mit $\succ_K, \prec_K, \sim_K$ bezeichnet. Als Bedingungen gelten:

1. *minimale Fairness*: Für jedes beteiligte Individuum gilt: Seine Präferenzen setzten sich mindestens bei einem Paar von Alternativen durch, d.h.
$$\forall_I \exists_{x,y} \quad x \succ_I y \Rightarrow x \succ_K y$$
2. *unbeschränkter Bereich*: Jedes beliebige individuelle Präferenzprofil ist zugelassen (solange die Präferenzen wohlgeformt sind).
3. *Pareto-Effizienz*: Wenn *alle* Individuen eine bestimmte Alternative einer anderen vorziehen, dann sollte die Alternative auch nach der kollektiven Präferenzordnung vorgezogen werden, d.h.
$$(\forall_I \quad x \succ_I y) \Rightarrow x \succ_K y$$

Angenommen nun, es existiere ein Kollektiv K, dem zwei Individuen A und B angehören und es stünden drei Alternativen x, y, z zur Auswahl, und es sei gemäß der Bedingung 1 („minimale Fairness“) festgelegt, dass sich bezüglich der Alternative “x oder z” die Präferenzen des Individuums A durchsetzen und bezüglich der Altenative “y oder z” die Präferenzen des Individuums B.

Aufgabe:

1. Zeigen Sie: Es gibt ein Präferenzprofil, bei dem es nicht mehr möglich ist, eine kollektive Wahl zu treffen (d.h. eine der drei Alternativen unter Erfüllung der gegebenen Bedingungen als die kollektiv bevorzugte auszuzeichnen).
2. Zeigen Sie: Wenn die Individuen zuerst ihre Präferenzen festlegen müssen, und erst dann bestimmt wird, bei welchem Paar von Alternativen sich die individuellen Präferenzen jedes Individuums durchsetzen,

dann sind die drei oben angegebenen Bedingungen sehr wohl miteinander vereinbar.

3 Aufgabe: Lotterien

Eine n-Güter Lotterie besteht aus n-Gütern $x_1, \dots, x_n$ und n Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$, wobei das i-te Gut x_i jeweils mit der p-ten Wahrscheinlichkeit p_i "gewonnen" werden kann. Damit die Loterie wohldefiniert ist, muss weiterhin gelten, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1 aufaddieren, d.h. $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Beispiel: $L[(0.2, 0.3, 0.1, 0.4), (x_1, x_2, x_3, x_4)]$

Hinweis: Offensichtlich gilt, dass zwei (verschachtelte und nicht verschachtelte) Lotterien genau dann übereinstimmen, wenn man bei beiden mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten die gleichen Güter gewinnen kann.

Aufgabe:

1. Stelle die verschachtelte 2-Güter Lotterie:

$$L[(0.4, 0.6), L[(0.1, 0.9), (x_1, x_2)], L[(0.4, 0.6), (x_3, x_4)]]$$

als unverschachtelte Lotterie dar.

2. Stelle die unverschachtelte 3-Güter Lotterie $L[(0.1, 0.5, 0.4), (x_1, x_2, x_3)]$ als verschachtelte 2-Güter Lotterie dar.

3. Zeige: Jede beliebig tief verschachtelte 2-Güter Lotterie, kann man auch als unverschachtelte Lotterie darstellen.

4. Zeige: Jede unverschachtelte n-Güter Lotterie kann man auch als verschachtelte 2-Güter Lotterie darstellen.