Universität Bayreuth: Philosophy & Economics, SoSe 2009

Lösung zur Nachklausur: Grundlagen des Entscheidens I

Datum: 8. Dezember 2009
Dozent: Eckhart Arnold

1 Aufgabe: Bayes und Entscheidungsbäume

Lösung zu Aufgabe 1.1 a): Wenn mit g das Ereignis bezeichnet wird, dass Gold vorhanden ist und mit t das Ereignis, dass die Prognose positiv ausfällt, dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass Gold vorhanden ist, sofern die Prognose positiv ausgefallen ist, $P(g|t)$ nach dem Bayes'schen Lehrsatz wie folgt:

$$P(g|t) = \frac{P(t|g) \cdot P(g)}{P(t|g) \cdot P(g) + P(t|(\neg g) \cdot P(\neg g)} \tag{1.1}$$

$$= \frac{0,88 \cdot 0,45}{0.88 \cdot 0,45 + 0,03 \cdot 0,55} = 0,96 \tag{1.2}$$

$$\tag{1.3}$$

Lösung zu Aufgabe 1.1 b): Analog dazu gilt für die Wahrscheinlichkeit, mit der Gold vorhanden ist, selbst wenn die Expertise negativ ausfällt, $P(g|\neg t)$:

$$P(g|\neg t) = \frac{P(\neg t|g) \cdot P(g)}{P(\neg t|g) \cdot P(g) + P(\neg t|(\neg g) \cdot P(\neg g)} \tag{1.4}$$

$$= \frac{0,12 \cdot 0,45}{0.12 \cdot 0,45 + 0,97 \cdot 0,55} = 0,092 \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

Zur Bewertung: 2 Punkte möglich;
Abzüge für fehlerhafte Wahrscheinlichkeiten, Rechnungen etc.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.2: Der erste Knoten (von links) des Entscheidungsbaums sollte die Entscheidung darüber repräsentieren, ob ein Test durchgeführt wird oder nicht. Sofern der Test durchgeführt wird, sollte in dem entsprechenden Teilbaum als nächstes ein Ereignisknoten für das positive oder negative Ergebnis des Tests folgen. Der Ereignisknoten für das Ereignis, dass Gold vorhanden oder nicht vorhanden ist, darf erst ganz am Ende folgen, also insbesondere nach der Entscheidung, ob investiert wird oder nicht. Dies entspricht nicht nur der zeitlichen Reihenfolge (da erst nach der Entscheidung über die Investition bekannt wird, ob Gold vorhanden ist), sondern darüber hinaus ist es auch nur so möglich, den Entscheidungsbaum aufzulösen, da man sonst den Entscheidungsknoten bezüglich der Investition nicht durch das Ergebnis für die günstigere Entscheidung ersetzen kann.

Zur Bewertung:2 Punkte möglich;
1 Punkt jeweils für den richtigen oberen bzw. unteren Teilbaum.

Lösung zu Aufgabe 1.3: Der Manager würde zwar die richtige Entscheidung treffen, aber seine Begründung ist falsch: Nicht schon deshalb, weil der Erwartungsgewinn (auch) ohne Expertise höher ist als die Investition, erübrigt sich die Expertise. Sie erübrigt sich vielmehr nur dadurch, dass in diesem speziellen Fall der Erwartungsnutzen für die Investition selbst in dem Fall noch positiv ist, dass die Expertise negativ ausfällt. Erst dadurch hat die Expertise keinen Einfluss auf die Entscheidung mehr.

Rechnerisch lässt sich dies ebensogut dadurch zeigen, dass der Erwartungsnutzen ohne Expertise höher ist als mit Expertise.

Um sich klar zu machen, dass das Argument des Managers falsch ist, kann man die Aufgabe so abändern, dass die Einnahmen nur 300 Mio Euro statt 600 Mio Euro betragen. In diesem Fall würde dieselbe Argumentation des Managers zu einer falschen Handlungsempfehlung führen.

Zur Bewertung: 2 Punkte möglich;
Wurde nur der Erwartungsnutzen falsch berechnet, aber so, dass noch die richtige Empfehlung herauskam gab es (sofern die Argumentation sonst stimmte) 1,5 Punkte;
Wurde der Erwartungsnutzen derart falsch berechnet, dass dies zu einer falschen Empfehlung führte, dann gab es noch 1 Punkt, sofern erkannt wurde, dass das Argument des Managers in der Form falsch ist.

2 Aufgabe: Sozialwahltheorie

Lösung zu Aufgabe 2.1: Die Unmöglichkeit eines Entscheidungsverfahrens, das alle drei Bedingungen erfüllt, ist dann bewiesen, wenn wir Präferenzen für A und B finden, mit denen keine Alternative als die kollektiv beste Alternative ausgewiesen werden kann. Dies ist aber für folgende Präferenzen der Fall:

$$\begin{aligned} A: &\qquad y \succ x \succ z \\ B: &\qquad z \succ y \succ x \end{aligned}$$

Mit diesen Präferenzen kann keine der drei Alternativen als die beste gewählt werden, denn:

1. Aufgrund der Präferenzen von A, und da A die Prärogative über x und z ausübt, kann z nicht gewählt werden.
2. Aufgrund der Präferenzen von B, und da B die Prärogative über y und z ausübt, kann y nicht gewählt werden.
3. Aufgrund der Einstimmigkeitsbedingung und der Präferenzen beider, kann aber auch nicht x gewählt werden.

Zur Bewertung: 3 Punkte für die richtige Lösung

Lösung zu Aufgabe 2.2: Hier sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Beide Individuen haben genau dieselben Präferenzen. Dieser Fall ist trivial: Die Festlegung einer kollektiven Präferenz die allen Bedingungen genügt, ist durch die Übernahme der (gemeinsamen) individuellen Präferenzen möglich.

2. Beide Individuen stimmen an einer Stelle überein, also z.B.

$$A: \qquad y \succ x \succ z$$

$$B: \qquad z \succ x \succ y$$

   wo A und B auf der 2.Stelle übereinstimmen.

   Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass dasjenige Gut auf der Stelle, auf der die Präferenze von A und B übereinstimmen das Gut x ist. Wähle nun die kollektiven Präferenzen so, dass x an der selben Stelle steht wie in den individuellen Präferenzen. Gebe nun A die Prärogative über x und y und B die Prärogative über x und z und ordne dann y und z entsprechend den Prärogativen in die kollektiven Präferenzen ein.

3. Beide Individuen stimmen auf keiner Stelle überein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann folgendes Präferenzprofil angenommen werden (soll heißen: Jedes andere Präferenzprofil, bei dem die Individuen auf keiner Stelle übereinstimmen lässt sich durch simples Umbenennen der Güter auf dieses Präferenzprofil zurückführen):

$$A: \qquad y \succ x \succ z$$
$$B: \qquad z \succ y \succ x$$

   Gebe A die Prärogative über x und z und B über x und y. Dann ist folgende kollektive Präferenzordnung immer noch möglich:

$$y \succ_K x \succ_K z$$

In jedem Fall ist es also möglich eine kollektive Präferenzordnung zu finden, die im Einklang mit den gegebenen Bedingungen steht. q.e.d.

Zur Bewertung: 3 Punkte möglich;
Für die richtige Behandlung des kompliziertesten Falles (3. Fall oben) gab es 2 Punkte;
Dafür, dass erkannt worden ist, dass eine Fallunterscheidung notwendig ist, gab es noch einmal 1/2 Punkte.
Is mindestens der 2. Fall auch noch richtig erörtert worden (der 1. Fall ist trivial), so gab es noch einen weitern 1/2 Punkt.

3 Aufgabe: Lotterien

Lösung zu Aufgabe 3.1: Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$L[(0.4 \cdot 0.1, 0.4 \cdot 0.9, 0.6 \cdot 0.4, 0.6 \cdot 0.6), (x_1, x_2, x_3, x_4)]$$

$$= L[(0.04, 0.36, 0.24, 0.36), (x_1, x_2, x_3, x_4)]$$

Zur Bewertung: 2 Punkte für die richtige Lösung.

Lösung zu Aufgabe 3.2: Es gibt mehrere Lösungen, je nachdem welche der drei Variablen x_1, x_2, x_3 man in der inneren 2-Güter Lotterie zusammenfasst. Eine mögliche Lösung lautet:

$$L[(0.5, 0.5), (x_2; L[(0.2, 0.8), (x_1; x_3)])]$$

Alternative Lösungen sind:

$$L[0.5; L[0.2; (x_1, x_2)], L[0.2, (x_2, x_3)]])]$$

oder:

$$L[(0.1, 0.9), (x_1; L[(5/9, 4/9), (x_2; x_3)])]$$

Zur Bewertung: 2 Punkte möglich;
Teilpunkte für die richtige Form der Lösung, auch wenn die Wahrscheinlichkeiten nicht stimmten, z.B. wenn sich die Wahrscheinlichkeiten der inneren Lotterie nicht zu 1 aufaddieren!
Falsch (0 Punkte), wenn entweder bei der Lösung einzelne der Güter "verloren" gegangen sind, oder am Ende immer noch irgendwo eine 3-Güter Lotterie stand.

Mögliche Lösung zu Aufgabe 3.3: Das Beispiel aus Aufgabe 1 lässt sich auf einfach verschachtelte 2-Güter Lotterien mit beliebigen Zahlenwerten verallgemeinern:

$$L[(a_1, a_2), (L[(b_1, b_2), (x_1, x_2)], L[(c_1, c_2), (x_3, x_4)])]$$
$$= L[(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2), (x_1, x_2, x_3, x_4)]$$

Das selbe Verfahren des Ausmultiplizierens lässt sich leicht auf einfach verschachtelte n-Güter Lotterien übertragen, indem man jede Wahrscheinlichkeit der äußeren Lotterie mit jeder Wahrscheinlichkeit jeder inneren Lotterie mutlipliziert. Mehrfach vorkommende Güter können (müssen aber nicht einmal) danach durch Aufaddieren der Wahrscheinlichkeiten zusammengefasst werden.

Nun kann man aber eine beliebig tief verschachtelte n-Güter Lotterie schrittweise von innen nach außen in eine unverschachtelte Lotterie umformen.

Zur Bewertung: 2 Punkte möglich;
richtige Idee (z.B. dass man das Problem in Analogie(!) zur Reduzierbarkeit lösen kann): 0.5 Punkte
richtige Lösung (durch Ausmultiplizieren): 1-2 Punkte, je nachdem wie genau und deutlich die Vorgehensweise beschrieben wurde.

Mögliche Lösung zu Aufgabe 3.4: Eine unverschachtelte n-Güter Lotterie hat die Form:

$$L[(p_1, \ldots, p_n), (x_1, \ldots, x_n)]$$

Als Erstes denkt man sich die Güter und Wahrscheinlichkeiten paarweise gruppiert:

$$[((p_1, p_2), \ldots, (p_{n-1}, p_n)), ((x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n))]$$

(Ggf., d.h. bei einer ungeraden Anzahl von Gütern, bleibt am Ende ein einzelnes Gut stehen, was nicht weiter schadet.)

Nun fasst man die Güter und Wahrscheinlichkeitspaare zu Lotterien zusammen, um die einfach verachtelte Lotterie L^1 zu erhalten. Dazu werden die Wahrscheinlichkeiten eines jeden Güterpaares in der äußeren Lotterie addiert (was die Wahrscheinlichkeit ergibt, mit der man eines der beiden Güter des Paares erhalten kann). In der entsprechenden inneren Lotterie über die beiden Güter müssen die Wahrscheinlichkeiten für jedes einzelne Gut nun noch auf 1 normiert werden. Als Formel geschrieben, sieht das so aus:

$$L^1[(p_1 + p_2, \ldots, p_{n-1} + p_n),$$
$$(L[(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}), (x_1, x_2)], L[(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + p_n}, \frac{p_n}{p_{n-1} + p_n}), (x_{n-1}, x_n)])]$$

So wie L^1 konstruiert wurde, bilden die inneren Lotterien maximal 2-Güter Lotterien. Wie man ggf. durch ausmultiplizieren leicht nachweisen kann, entspricht L^1 der ursprünglichen unverschachtelten n-Güter Lotterie L. Die Lotterie L^1 enthält ihrerseits maximal $n/2 + 1$ Güter.

Nun wendet man dasselbe Verfahren auf L^1 an und erhält eine zweifach verschachtelte Lotterie L^2 (deren sämtliche innere Lotterien maximal 2-Güter Lotterien sind). Das Verfahren wird so lange fort geführt, bis die äußere Lotterie nur noch 2 Güter (bzw. Lotterien) enthält.

Alternative Lösung zu Aufgabe 3.4: Unverschachtelte Lotterien kann man auch in verschachtelte 2-Güter Lotterien umwandeln, indem man schrittweise das jeweils erste Gut und die erste Wahrscheinlichkeit der innersten Lotterie "abtrennt". Dabei kann man praktischerweise auf die Kurzschreibweise für 2-Güter Lotterien zurückgreifen, d.h. man schreibt $L[p1; x_1, x_2]$ statt $L[(p_1, p_2), (x_1, x_2)]$, da man ja weiss, dass $p_2 = 1 - p_1$ gelten muss (weil die Definition von Lotterien fordert, dass eines der Güter auf jeden Fall "gewonnen" wird).

Am Anfang steht zunächst die unverschachtelte Lotterie:

$$L[(p_1, \ldots, p_n), (x_1, \ldots, x_n)]$$

Die verschachtelte Lotterie hat dann die Form:

$$L[p_1; x1, L[p_2^*, x_2, L[p_3^*, x_3, \ldots]]]$$

Die Frage ist nun: Wie berechnet man p_2^*,p_3^*,…? Dazu muss man sich klar machen, dass p_2^* die Wahrscheinlichkeit für das Gut x_2 bezogen auf die Wahrscheinlichkeit derjenigen Lotterie, in der p_2^* und x_2 vorkommen, selbst ist. (Letztere ist aber genau die inverse Wahrscheinlichkeit, der in der nächst äußeren Lotterie angegebenen Wahrscheinlichkeit, denn angegeben ist wird ja immer die Wahrscheinlichkeit für das jeweils "abgetrennte" Gut, so dass auf die Lotterie, die (direkt und indirekt) die restlichen Güter enthält, die entsprechende inverse Wahrscheinlichkeit entfällt.)

Daraus ergibt sich die Lösung:

$$L[(p_1; x1, L[p_2/(1 - \mathbf{p_1}); x_2, L[p_3/(1 - \mathbf{p2}/(\mathbf{1} - \mathbf{p_1})), \ldots]]]$$

Zur Bewertung: 2 Punkte möglich;
richtige Idee erkennbar: 0,5 Punkte; Form der verschachtelten Lotterie richtig angegeben: 1 Punkt;
Komplett richtige Lösung, einschließlich der Angabe, wie die inneren Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen sind: 2 Punkte;
Abzüge für Schönheitsfehler etc.