Universität Bayreuth: Philosophy & Economics, SoSe 2008

Lösung zur Klausur: Grundlagen des Entscheidens I

Dozent: Eckhart Arnold
8. Juli 2008

0.1 Die Lösung

Aufgabe: Entscheidungen unter Unwissenheit

Bedauernstabelle:

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	***197***	93	0	46
A_2	0	0	*497*	0
A_3	50	40	*498*	25

Lösung: A_1 sollte gewählt werden, da bei A_1 der maximale Gewinn, der entegehen könnte, mit 197 kleiner ist als bei A_2 mit 497 und A_3 mit 498.

Entscheidungsbäume

1. Für den Erwartungswert der „Handlung B" gilt: $EW = 0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 800 = 500$ €. Da die „Handlung A" nur 400 € liefert, würde eine rational handelnde Person die „Handlung B" wählen.

2. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Personen von den beiden Handlungen des rechten Entscheidungsknotens die bessere wählt. Damit hat „Ereignis 1", wenn es eintritt, einen Wert von 500 € (siehe die erste Aufgabe). Der Erwartungswert der „Alternative 1" des linken Entscheidungsknotens berechnet sich dann wie gehabt: $EW = 0.2 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 500 = 600$ €

3. Um diese Frage zu beantworten, muss nur noch der Erwartungswert von „Alternative 2" berechnet werden: $EW = 0.3 \cdot 600 + 0.5 \cdot 400 + 0.2 \cdot 1000 = 580$ €. Da die „Alternative 1" einen höheren Erwartungswert hat, sollte „Alternative 1" gewählt werden.

Nash-Gleichgewichte

1. Die beiden reinen Nash-Gleichgewichte sind (Z_1, S_1) und (Z_2, S_2). Weder der Zeilen- noch der Spaltenspieler kann sich im Gleichgewicht durch einen Wechsel seiner Strategie noch verbessern, wenn der andere Spieler seine Strategie beibehält.

2. Ansatz: Ein gemischtes Gleichgewicht kann nur dann vorkommen, wenn der jeweils andere Spieler bezüglich der gemischten Gleichgewichtsstrategie seines Gegenüber indifferent zwischen seinen reinen Strategien ist. Sei a die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zeilenspieler die erste seiner beiden Strategien Z_1 spielt. Dann errechnet sich die Auszahlung, die der Spaltenspieler erhält, wenn er die Strategie S_1 spielt nach:
$$V(S_1) = a \cdot 1 + (1 - a) \cdot 2$$
Und die Auszahlung, die er erhält, wenn er S_2 spielt, ist:
$$V(S_2) = a \cdot 0 + (1 - a) \cdot 4$$
Durch Gleichsetzen erhält man:
$$\begin{aligned} a \cdot 1 + (1 - a) \cdot 2 &= (1 - a) \cdot 4 && (0.1) \\ -a + 2 &= 4 - 4a && (0.2) \\ 3a &= 2 && (0.3) \\ a &= \frac{2}{3} && (0.4) \end{aligned}$$
Im gemischten Gleichgewicht wird der Zeilenspieler also mit 2/3 Wahrscheinlichkeit Z_1 spielen und mit 1/3 Wahrscheinlichkeit Z_2. Wegen der Symmetrie des Spiels spielt der Spaltenspieler mit genau denselben Wahrscheinlichkeiten, nämlich mit 2/3 Wahrscheinlichkeit S_1 und mit 1/3 Wahrscheinlichkeit S_2.

Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz

Sei p das Ereignis, dass die Probegrabung erfolgreich ausfällt und g das Ereignis, dass Gold vorhanden ist. Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabung negativ ausfällt, d.h. $P(g|\neg p)$. Nach dem Bayes'schen Lehrsatz gilt:
$$P(g|\neg p) = \frac{P(\neg p|g)P(g)}{P(\neg p|g)P(g) + P(\neg p|\neg g)P(\neg g)}$$
Aus der Aufgabenstellung geht unmittelbar nur hervor, dass $P(g) = 0.3$, $P(p|g) = 0.95$ und $P(p|\neg g) = 0.1$. Alle anderen benötigten Werte muss man aus diesen gegebenen Werten berechnen, also:
$$P(\neg g) = 1 - P(g) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(\neg p|g) = 1 - P(p|g) = 1 - 0,95 = 0,05$$
$$P(\neg p|\neg g) = 1 - P(p|\neg g) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$P(g|\neg p) = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,7} = 0,023256$$

Die Lösung lautet also, dass nur noch mit ca. 2,3% Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden kann, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabung negativ ausfällt.

Aufgabe: Beweise

1. $L(a, x, y) \equiv L(b, y, x)$ wenn $b = 1 - a$. Begründung: Wenn $b = 1 - a$, dann kann man in beiden Lotterien mit genau denselben Gewinnchancen dieselben Gewinne bekommen. Damit sind die Lotterien aber identisch.

   Anmerkung: Man kann in diesem Fall schon deshalb nicht mit dem Erwartungsnutzen argumentieren, weil damit höchstens die Indifferenz zwischen beiden Lotterien gezeigt werden kann, aber noch nicht ihre Identität. (Wenn der Erwartungsnutzen von einem Apfel für eine bestimmte Person derselbe ist wie der von einer Birne, dann ist die Person zwischen Apfel und Birne indifferent, aber deshalb ist ein Apfel noch lange keine Birne!)

2. Nach dem ersten Teil der Aufgabe ist die Lotterie $L(a, z, x)$ identisch mit der Lotterie $L(1-a, x, z))$ und die Lottiere $L(a, z, y)$ identisch mit der Lotterie $L(1 - a, y, z))$.

   Nun gilt aber: Für jedes a mit $0 \leq a \leq 1$ liegt der Wert $1 - a$ wieder in dem Intervall von 0 bis 1. Dann gilt aber nach der Bedingung der höheren Gewinne auf der ersten Stelle (Voraussetzung):

   $$x \succ y \Leftrightarrow L(1 - a, x, z) \succ L(1 - a, y, z)$$

   Aufgrund der oben festgestellten Identität gilt aber ebenfalls:

   $$L(1 - a, x, z) \succ L(1 - a, y, z) \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

   Damit gilt insgesamt:

   $$x \succ y \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

   q.e.d.

   Anmerkung: Wichtig ist, dass der Beweis so geführt wird, dass klar ist, dass die Formel am Ende auch tatsächlich für alle a gilt!