# Übungsaufgaben zum Satz von Arrow und zu Lotterien

Eckhart Arnold

16. Juli 2009

## 1 Aufgabe 1

Gegeben sei eine Menge von Individuen $A, B, C, \ldots$ und eine Menge von Alternativen $x, y, z, \ldots$. Angenommen es gibt zu jedem Paar von Alternativen ein einzelnes Individuum, das in beide Richtungen *vollständig entscheidend* für dieses Paar von Alternativen ist (d.h. wenn $x, y$ ein Paar von Alternativen und das $i$-te Individuum dasjenige ist, welches für dieses Paar vollständig entscheidend ist, dann gilt wann immer $x \succ_i y$ (Präferenz des $i$-ten Individuums) so auch $x \succ_K y$ (kollektive Präferenz) und wann immer $x \prec_i y$ dann auch $x \prec_K y$).

**Zeige**, dass dann gilt, dass es ein Individuum gibt, dass vollständig entscheidend für alle Alternativen ist. Vorausgesetzt werden dürfen außer der Annahme die Voraussetzungen für den Satz von Arrow (Pareto-Effizienz, unbeschränkter Bereich, paarweise Unabhängigkeit) sowie die Eigenschaften wohlgeordneter Präferenzen, insbesondere die *Transitivität*.

## 2 Aufgabe 2

Angenommen, dass $i$-te Individuum sei *beinahe entscheidend* für $x$ über $y$, d.h. wann immer $x \succ_i y$ und für alle $n \neq i$ umgekehrt $y \succ_n x$ gilt, dann gilt für die kollektiven Präferenzen $x \succ_K y$.

**Zeige**, dass dann das $i$-te Individuum *vollständig entscheidend* für $x$ über $z$ ist, wobei $z$ eine beliebige Alternative außer $x$ und $y$ ist.

# 3 Aufgabe 3

Gegeben sei folgendes System zur Bestimmung kollektiver Präferenzen über einer Menge von Alternativen: Jedes Individuum schreibt die beiden bevorzugten Alternativen auf einen Zettel. Die kollektive Präferenzordnung der Alternativen ergibt sich dann aus der Häufigkeit der Nennungen, d.h. die Alternative, die am häufigsten genannt wurde, kommt an die erste Stelle, die am zweithäufigsten genannte an die zweite usf.

**Zeige**, dass dieses Wahlsystem einer der drei folgenden Bedingungen nicht genügt:

1. Transitivität der kollektiven Präferenzen

2. Pareto-Effizienz

3. Paarweise Unabhängigkeit

*Diskussionsfrage (nicht für die Klausur): Wie könnte jemand das Wissen um diese Eigenschaft des gegebenen Wahlverfahrens nutzen, um z.B. die Jahrgangsstufensprecherwahl zu manipulieren? Handelt es sich dabei um ein ernstzunehmendes Problem? Was meinen Sie?*

# 4 Aufgabe 4

Angenommen $B$ sei ein bestes Gut einer Menge von Gütern und $W$ ein schlechtestes Gut, und auf den Lotterien über diese Menge von Gütern sei eine Nutzenfunktion $u$ so definiert, dass $u(x) := a$ für diejenige Zahl $a$, für die gilt $x \sim L(a, B, W)$.

**Zeige**: Die so definierte Nutzenfunktion hat die Erwartungsnutzeneigenschaft, d.h $u(L(a, x, y)) = a \cdot u(x) + (1 - a) \cdot u(y)$. (Die Reduzierbarkeitsbedingung und das Substitutionsgesetz für Lotterien dürfen Sie voraussetzen.)