Vorlesung: Grundlagen des Entscheidens I

Sommersemester 2008

Stand: 18. Juli 2008

Dozent: Eckhart Arnold

Universität Bayreuth

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieses Skript gehört zur Vorlesung „Grundlagen des Entscheidens I“, die ich im Sommersemester 2008 in Bayreuth gehalten habe. Inhaltlich habe ich mich dabei weitgehend an die bewährte Einführung von *Micheal D. Resnik: Choices. An Introduction to Decision Theory, University of Minnesota Press, 5th ed. 2000 [23]* gehalten, die eine ansprechende Stoffauswahl mit nicht übermäßig schwierigen mathematischen Beweisen verbindet. An vielen Stellen bin ich aber auch von Resnik abgewichen. So habe ich besonders für die Wahrscheinlichkeitsrechnung außer gängigen mathematischen Lehrbüchern vor allem die sehr gelungene Darstellung von Donald Gillies [11] herangezogen. Auch die Darstellung der Spieltheorie stützt sich überweigend auf andere Quellen. Da ich die Vorlesung zum erstenmal gehalten habe, enthält das Skript zweifellos noch zahlreiche Flüchtigkeits- und Tippfehler, die ich bei Gelegenheit noch zu korriegieren hoffe. (Wer Lust hat ein wenig Korrektur zu lesen, oder wer Fehler, besonders inhaltlicher Art(!) im Skript entdeckt, teile es mir bitte mit: eckhart_arnold@hotmail.com) Auch bleibt es nicht aus, dass ich im Nachhinein viele Dinge anders machen würde. Im einzelnen sehe ich folgende Punkte, an denen sich eine Überarbeitung der Vorlesung bzw. des Konzepts der Vorlesung lohnen würde:

- Über der Darstellung des dogmatischen Lehrstoffes ist leider die Kritik und die Erörterung von (besseren) Alternativen zu kurz gekommen. Besonders in den letzten Abschnitten der Vorlesung, also der Spieltheorie und der Sozialwahltheorie, wäre es wichtig noch ausführlicher zu erörtern, warum die entsprechenden Ansätze nur eine äußerst begrenzte Sichtweise auf menschliches Handeln (Spieltheorie) bzw. politische Ordnung und politische Entscheidungsfindung (Sozialwahltheorie) ermöglichen. Hinsichtlich der Entscheidungs- und Spieltheorie wäre es sicherlich empfehlenswert auch Ansätze aus der Psychologie und der experimentellen Spieltheorie zum Verständnis menschlichen Handelns und Entscheidens stärker einzubeziehen. Bei der Sozialwahltheorie, die in dieser Vorlesung allerdings nur sehr kurz angerissen wird, würde es lohnend sein, auch alternative Ansätze der Demoktratietheorie anzusprechen, um zu vermeiden, dass ein falsches Bild vom Gegenstandsbereich dieser Theorien entsteht. Unweigerlich formen nämlich die Theorien, mit denen wir uns beschäftigen, das Gesamtbild des Gegenstandes, auf den sie sich beziehen. Ich könnte es mir leicht machen, und die Stoffauswahl durch den Gesichtspunkt thematischer Beschränkung auf die formale Entscheidungstheorie verteidigen. Aber dagegen rebelliert mein intellektuelles Gewissen. Denn wenn die entsprechenden Theorien nur

Teilaspekte des Gegenstandes abdecken können, dann entsteht beinahe unvermeidlich ein verzerrtes Gesamtbild. Im Extremfall wäre man klüger geblieben, hätte man sich gar nicht mit der wissenschaftlichen Theorie abgegeben, sondern sich bloß auf den eigenen gesunden Menschenverstand bei der Beurteilung der Sache verlassen. Gerade der Philosophie, die doch immer die übergreifenden Zusammenhänge im Auge behalten sollte, steht es nicht an, sich mit thematischer Selbstbeschränkung herauszureden.

- Was nun die Auswahl der Themen angeht, so scheint mir, dass vor allem die Aufnahme der an sich sehr interessanten philosophischen Wahrscheinlichkeitstheorien (v. Mises und Ramsey-De Finetti, siehe Kapitel 6) zu überdenken ist. Nicht so sehr wegen der mathematischen und gedanklichen Anspruchshöhe als deshalb, weil der Stoff einerseits zwar wohl zum geistigen Hintergrund der Entscheidungstheorie gehört aber für die folgenden Themen nicht unbedingt vorausgesetzt werden muss und zudem eine eigene, ausführlichere Behandlung verdienen würde.

  Ebenfalls zu überdenken scheint mir in diesem Fall die Aufnahme der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie (Kapitel 7.3). Meine Motivation dafür sie aufzunehmen bestand darin, dass sie auch in den Lehrbüchern etwa zur Spieltheorie [20] auftritt, wobei die Motivation zu der doch seltsamen Konstruktion der Lotterien oft etwas im Dunkel bleibt. Mir scheint, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie im wesentlichen auf einer Illusion beruht, der Illusion nämlich man würde kardinale Nutzenwerte eines Tages so präzise messen können wie die Temperatur. Diesen Vergleich zur Physik führen Neumann und Morgenstern selbst an, wie irreführende Vergleiche mit der Physik ja immer zu den Requisiten mathematikbegeisterter Sozialwissenschaftler gehören. Aber nach 60 Jahren – das Buch von Neumann und Morgenstern erschien 1947 – sind wir von einer präzisen Messung von kardinalen Nutzenwerten immer noch genauso weit entfernt wie damals. Wozu soll die gewaltsame mathematische Konstruktion kardinaler Nutzenwerte gut sein, wenn man sie doch nicht präziser messen kann als durch die Frage „Wieviel Geld gibst Du mir dafür?“ Mag sein, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie zu den unveräußerlichen Grundlagen der Spieltheorie und der Volkswirtschaftslehre gehört. Für sich betrachtet wirkt sie eher wie eine müßige mathematische Spielerei.

- Es hat sich gezeigt, dass besonders die mathematischen Beweise viele

Leute vor schwer überwindliche Hindernisse stellen. Die didaktisch wohlverständliche Aufbereitung mathematischer Beweise stellt dabei eine nicht zu unterschätzende Herausforderung dar, die viel Zeit und Mühe erfordert. Resnik hat sich in seinem Lehrbuch dankenswerter Weise möglichst einfacher Beweisführungen bedient. Ich habe soweit als möglich versucht, die Beweisführungen nochmals einfacher und verständlicher darzustellen, aber ich möchte nicht behaupten, dass in dieser Hinsicht nicht noch ein Übriges getan werden könnte.

Auch wenn es billig klingt, so kann ich in diesem Punkt doch den Mathematikunterricht in der Schule nicht ganz von Tadel freihalten, weil man dort zwar tüchtig rechnen lernt aber keine richtige Mathematik, d.h. keine Beweisführungen.

- In diesem Zusammenhang ist einzuräumen, dass die Nomenklatur in meinem Skript zum Teil uneinheitlich und manchmal ungünstig gewählt ist, besonders bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In der Fachliteratur gibt es unterschiedliche Arten die Wahrscheinlichkeitstheorie darzustellen. In mathematischen Lehrbüchern ist die Mengenschreibweise üblich, d.h. man bezieht die Wahrscheinlichkeiten auf Ereignismengen. In der philosophisch orientierten Literatur greift man lieber auf eine aussagenlogische Schreibweise zurück. Meist habe ich das letztere gewählt. Für eine zukünftige Überarbeitung wäre aber eine einheitliche Schreibweise und dann höchstwahrscheinlich die Mengenschreibweise wünschenswert. (In diesem Zusammenhang scheint mir, dass die logische „und"-Verknüpfung bzw. die Schnittmenge mit einigem Gewinn für die Lesbarkeit durch das Zeichen „&" statt durch das Zeichen „$\wedge$" dargestellt werden kann.) Vielleicht wäre darüber hinaus ein kurzer Anhang zur formalen Logikschreibweise, deren Kenntnis hier vorausgesetzt wird, empfehlenswert.

Eckhart Arnold, Bayreuth, den 25. Juli 2008

2 Einleitung

2.1 Einleitung

Die Vorlesung „Grundlagen des Entscheidens I" ist der erste Teil einer auf zwei Semester angelegten Vorlesung, die – aus philosophischer Perspektive – in die Entscheidungs- und Spieltheorie einführen soll. In diesem Sommersemester geht es dabei vor allem um die Vermittlung von Grundlagen und elementaren Lösungs- und Rechentechniken, d.h. wir werden untersuchen, wie man Entscheidungsprobleme als Tabellen oder Entscheidungsbäume darstellt, wie Entscheidungen unter Risiko (d.h. bei bekannten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten unbeeinflussbarer Ereignisse) und unter Unwissen (bei unbekannten Wahrscheinlichkeiten) getroffen werden können, wie die strategische Interaktion zwischen mehreren menschlichen Entscheidern mit Hilfe spieltheoretischer Modelle dargestellt werden kann und vieles mehr. Dabei werden wir uns immer auch mit den philosophischen Interpretationsfragen dieser Techniken beschäftigen, sowie mit theoretischen Einwänden, von denen es zahlreiche gibt, und insbesondere mit den verschiedenen Paradoxien (z.B. „Vorhersagerparadox", „Paradox der Demokratie"), die sich innerhalb des theoretischen Rahmens der Entscheidungstheorie konstruieren lassen.

Ausgespart bleibt in den „Grundlagen des Entscheidens I" jedoch weitgehend die Frage der Anwendung dieser Theorie in verschiedenen empirischen Wissenschaftsbereichen. Die Anwendbarkeit der Spiel- und Entscheidungstheorie ist je nach Wissenschaftsbereich mehr oder weniger umstritten. Während sie in der Ökonomie gewissermaßen kanonisch ist, wird ihr Wert für die Sozial- und Politikwissenschaften oft bestritten. Besonders die Veröffentlichung von Donald Greens und Ian Shapiros Buch „The Pathologies of Rational Choice" [12] (ein Buch, das die Anwendung ökonomischer Modelle im Bereich der Politikwissenschaften einer detaillierten und präzisen Kritik unterzieht und das meiner Meinung nach jeder P&E-Student und jede P&E-Studentin irgendwann einmal gelesen haben sollte) hat eine sehr kontroverse Diskussion über den Wert und Unwert des ökonomischen Theorieansatzes in den Politikwissenschaften hervorgerufen. Wenn Zeit bleibt, werden wir am Ende des Semesters an einem Beispiel untersuchen, worum es bei der Kritik von Green und Shapiro geht.

Ganz im Gegensatz dazu gibt es umgekehrt auch das Bestreben einiger Autoren, die ökonomischen Denkansätze in Anknüpfung an klassische angelsächsische Philosophen wie Adam Smith und David Hume unter dem Titel „Erneuerung der Moralwissenschaften" gerade im Bereich der politischen Philosophie wieder fruchtbar zu machen. Auch darauf werden wir, wenn Zeit bleibt, am Ende des Semesters einen Blick werfen. Im wesentlichen bleibt die Diskussion dieses Ansatzes aber den „Grundlagen des Entscheidens II“ vorbehalten.

2.2 Der Gegenstand der Entscheidungstheorie

Die Entscheidungstheorie, die wir in dieser Vorlesung kennen lernen, ist eine formale Theorie darüber, wie man in Entscheidungssituationen bestmögliche Entscheidungen trifft. Eine *Entscheidungssituation* ist dabei charakterisiert durch 1) eine Menge von möglichen (Welt-)*Zuständen*, von denen wir entweder nicht wissen, welches der gültige Zustand ist, oder bei denen noch nicht feststeht, welcher Zustand eintreten wird, 2) eine Menge von *Handlungsalternativen* und 3) eine Menge von *Ergebnissen*, deren Realisierung von der gewählten Handlung und dem bestehenden bzw. dem eingetretenen (Welt-)Zustand abhängt.

Kann man eine bestimmte Entscheidungssituation überhaupt in dieser Form analysieren, dann lässt sich das Entscheidungsproblem sehr leicht schematisch in einer Tabelle darstellen:

		Zustand	
		schwere Klausur	leichte Klausur
Handlung	lernen	*bestehen*	*bestehen*
	schwimmen gehen	*durchfallen*	*bestehen*

Die Zeilen repräsentieren in dieser Tabelle unterschiedliche Handlungsalternativen, die Spalten stellen die verschiedenen Weltzustände dar. Die den Handlungen und Zuständen zugeordneten Ergebnisse stehen in den entsprechenden Zeilen und Spalten innerhalb der Tabelle. Diese Tabelle gibt natürlich nur ein äußerst einfaches Entscheidungsproblem wieder. Ebensogut könnte man eine größere Tabelle mit mehr Handlungsalternativen, z.B. „lernen und mitschreiben“, „schwimmen gehen und mitschreiben“, „krank schreiben lassen“, oder Zuständen, z.B. „schwere“, „leichte“ und „mittelschwere Klausur“, vorstellen. Bei der Analyse realer Entscheidungsprobleme stellt es oft eine Herausforderung dar, alle Zustände und Handlungsalternativen zu identifizieren bzw. eine geeignete Einteilung dafür zu finden. Insbesondere dürfen sich die Handlungsalterantiven untereinander (und ebenso die Zustände untereinander) nicht überschneiden, das Ergebnis muss eindeutig von den Handlungen abhängen und es sollten *alle* möglichen Zustände berücksichtigt werden, die Einfluss auf das Ergebnis haben können. Vergisst man irgendwelche Zustände, die Einfluss auf das Ergebnis haben können, in der Entscheidungstabelle zu berücksichtigen, so besteht die Gefahr, dass man unangenehme Überraschungen erlebt, indem Ergebnisse eintreten, mit denen man nicht gerechnet hat. (Versäumt man umgekehrt, mögliche Handlungsalternativen zu berücksichtigen, so schränkt man nur die eigene Entscheidungsfreiheit unnötig ein, wird aber bei ansonsten korrekter Analyse keine Überraschungen erleben.) Mit diesen Schwierigkeiten, die die *Problemspezifikation* betreffen, werden wir uns in dieser Vorlesungsreihe jedoch nur am Rande beschäftigen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass dieses Problem hochgradig nicht-trivial sein kann, und dass die praktische Anwendbarkeit der Entscheidungstheorie auch davon abhängig sein kann, ob es in einer gegebenen Situation möglich ist, eine zuverlässige Problemspezifikation im Sinne der Entscheidungstheorie zu geben.

Abgesehen von den Schwierigkeiten, die sich bei der Problemspezifikation ergeben können, ist die Anwendbarkeit der Entscheidungstheorie aber auch aus systematischen Gründen auf ganz bestimmte Entscheidungsprobleme eingeschränkt. So kann sie uns z.B. wenig weiterhelfen, wenn wir uns über die Ergebnisse bzw. die Bewertung der Ergebnisse einer Entscheidungssituation selbst nicht im Klaren sind. Die Frage, ob jemand im Urlaub lieber ans Meer oder in die Berge fahren will, stellt ganz sicher ein Entscheidungsprobem dar, aber es handelt sich nicht um ein Entscheidungsproblem von der Sorte, bei der uns die Entscheidungstheorie viel weiterhelfen kann. Vielmehr handelt es sich um ein Problem, bei dem man sich über die eigenen Präferenzen klar werden muss, man könnte auch sagen: um ein Problem, bei dem man sich einfach entscheiden muss. In Anlehnung an bestimmte Doktrinen in der Moralphilosophie und auch in der politischen Philosophie könnte man hier vielleicht von einem „*dezisionistischen* Entscheidungsproblem“ sprechen.

Weiterhin setzt die Entscheidungstheorie voraus, dass wir wissen, welche möglichen Ergebnisse als Folge der von uns getroffenen Entscheidungen überhaupt eintreten können. Es gibt aber viele Situationen, in denen die möglichen Folgen unserer Handlungen für uns schlicht unabsehbar sind. So können wir zwar absehen, dass sich der CO_2 Gehalt in der Atmosphäre in Zukunft erhöhen wird, wenn wir die Entscheidung treffen, den CO_2 Ausstoß nicht zu verringern, und mit einer – allerdings schon erheblich größeren Unsicherheit – können uns die Wissenschaftler sagen, dass sich dann das Klima erwärmen wird, aber wie sich die Erwärmung und die daraus resultierenden klimatischen Veränderungen gesellschaftlich und politisch auswirken werden, darüber können wir nur spekulieren. Solche Entscheidungen, bei denen wir die Menge der möglichen Ergebnisse nicht angeben können, weil wir es dabei mit „unknown unknowns“ (wie es der ehemalige amerikanische Verteidigungsminister Donald Rumsfeld so hübsch ausdrückte) zu tun haben, stehen wir mit der formalen Entscheidungstheorie auf verlorenem Posten. In Bezug auf den Klimawandel ist daher auch schon der unkonventionelle Vorschlag gemacht worden statt des auf der Entscheidungstheorie fußenden Utilitarismus, verstärkt einen tugendethischen Ansatz in Anschlag zu bringen [15, 155ff., 230ff.].[1]

Damit scheiden neben den Entscheidungsproblemen, die aus praktischen Gründen keine adäquate Problemspezifikation zulassen, viele weitere wichtige Enscheidungsprobleme aus dem Anwendungsbereich der formalen Entscheidungstheorie schon von vornherein aus. Es ist wichtig sich diesen Sachverhalt, dass die Entscheidungstheorie nur einen Teil der realen Entscheidungsprobleme adäquat behandeln kann, vor Augen zu halten. Denn dies bedeutet, dass die Entscheidungstheorie, die wir hier besprechen, nicht notwendigerweise die Theorie der Entscheidungen schlechthin ist. Denn es ist gut möglich, dass wir diejenigen Entscheidungsprobleme, für die diese Theorie ungeeignet ist, immer noch im Rahmen anderer, von ihrem Paradigma und Stil her vielleicht ganz andersartiger Theorien behandeln können, so wie für die Ethik des Klimaschutzes eine Tugendethik vorgeschlagen worden ist, um den Schwierigkeiten des Utilitarismus angesichts extremer Unsicherheit („unknown unknowns") zu begegnen.

In noch einmal verschärfter Form stellt sich dasselbe Problem für die Spieltheorie, deren empirische Anwendungsfälle außerhalb der Ökonomie eher dünn gesät sind. Die Gefahr besteht daher, dass man durch die einseitige Konzentration auf solche Probleme, die sich mit Hilfe derartiger Theorien methodisch in den Griff bekommen lassen, ein völlig falsches Bild von dem emprischen Sachbereich bekommt, auf den sie sich beziehen, und von dem sie nur einen kleinen Ausschnitt erfassen können, und der in Wahrheit größteils ganz anderen Gesetzen gehorcht. Dass diese Gefahr vornehmlich bei szientistischen, d.h. sich strenger und formaler Methoden nach dem Vorbild der Naturwissenschaften bedienender Ansätze auftritt, hängt mit der Methodenzentriertheit dieser Ansätze zusammen, die dazu führt, dass vornehmlich solche Probleme als wissenschaftlich relevant ausgewählt und untersucht werden, die zum vorgegebenen Methodenkanon passen, anstatt umgekehrt zu gegebenen empirischen Problemen und Fragestellungen die zur ihrer Behandlung geeigneten Methoden auszuwählen. A priori sind übrigens der methodenzentrierte Ansatz und sein Gegenstück, der problemorientierte Ansatz, gleichermaßen legitim. Nur ist die Gefahr der intellektuellen Selbsttäuschung beim methodenzentrierten Ansatz offenbar erheblich größer und tritt daher genau da auf, wo wir sie am wenigsten erwarten würden, nämlich dort, wo

[1] Da das Buch ansonsten sehr stark dem utilitaristischen Ansatz verpflichtet ist, vor allem auch gegen die nicht-anthropozentrische Naturethik etwa eines H. Jonas, wird man hinter diesem Vorschlag keine grundsätzliche Ablehnung des Utilitarismus oder wissenschaftliche Unbedarftheit vermuten dürfen.

auch das Bewusstsein wissenschaftlicher Strenge am größten ist.[2]

Immerhin verbleiben der formalen Entscheidungstheorie aber weite Bereiche, innerhalb derer wir sie fruchtbar und gewinnbringend anwenden können. (Und dort wo man sie anwenden kann, ist man mit Hilfe der Theorie anderen, intuitiven Entscheidungsfindungsmechanismen so gut wie immer überlegen!) Sofern die Menge der möglichen Ergebnisse und die Menge der Zustände bekannt ist, können wir sie selbst dann noch heranziehen, wenn wir nicht einmal wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir mit einem bestimmten Zustand rechnen müssen. In diesem Fall handelt es sich um „Entscheidungen unter Unwissen". Den dazugehörigen Teil der Entscheidungstheorie werden wir in der nächsten und übernächsten Woche besprechen. Sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen bestimmte Ereignisse eintreten können, dagegen bekannt, dann spricht man von „Entscheidungen unter Risiko". In diesem Fall lässt sich die Entscheidungstheorie sogar noch viel besser anwenden, was in den darauffolgenden Wochen demonstriert wird. Was schließlich die Spieltheorie, die wir als Letztes in diesem Semester ansprechen werden, von der Entscheidungstheorie unterscheidet, ist, dass sie die strategische Interaktion zwischen mehreren Entscheidern („Spielern") untersucht, die wechselseitig aufeinander reagieren bzw. die Reaktion des Gegenübers antezipieren können. An die Stelle der (Welt-)Zustände in der Entscheidungstheorie treten in der Spieltheorie also die Züge des anderen Spielers.

2.3 Darstellungsformen

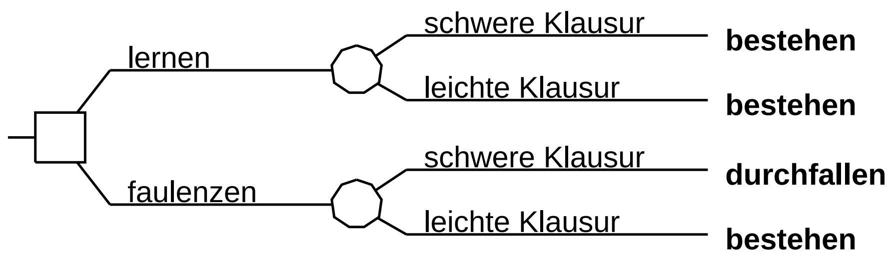
Zum Abschuss dieser Vorlesungsstunde soll – sozusagen als „Appetizer" – wenigstens schon ein kurzer Einblick in die Entscheidungstheorie selbst gegeben werden, mit der wir uns im Laufe des Semesters eingehend beschäftigen werden. Wir werden im folgenden 1) Entscheidungsbäume und Entscheidungstabellen als zwei unterschiedliche Formen der Darstellung von Entscheidungsproblemen kennen lernen und 2) bereits ein erstes sehr simples Lö-

[2] Siehe dazu die Kritik von Ian Shapiro [25] oder von John Dupré [9], sowie die ausführliche Studie von Donald Green und Ian Shapiro [12]. Besonders das letztere Buch hat eine rege Diskussion hervorgerufen. Eine Verteidigung des formalen Rational Choice Ansatzes gegen die Kritik von Green und Shapiro hat neben anderen Gary W. Cox[7] unternommen. Cox Ansicht allerdings, dass man selbst dann noch theoretische Erfolge für eine Theorie reklamieren kann, wenn sie empirisch erfolglos ist [7, S.159-164], geht an dem grundlegenden Ziel der Wissenschaft vorbei, das selbstverständlich in der Erklärung von Vorgängen in der empirischen Welt besteht und nichts anderem, und ist eher ein Beispiel wie Wissenschaftlicher sich lieber die Wissenschaftstheorie zurechtbiegen als ein Scheitern des von ihnen verfolgten Ansatzes einzugestehen. Eine wissenschaftliche Theorie, die falsch ist, oder deren Richtigkeit oder Falschheit man nicht empirisch feststellen kann, kann man unmöglich „erfolgreich" nennen.

sungsverfahren für Entscheidungsprobleme besprechen, nämlich das der Lösung durch Dominanz.

2.3.1 Entscheidungsbäume und -tabellen

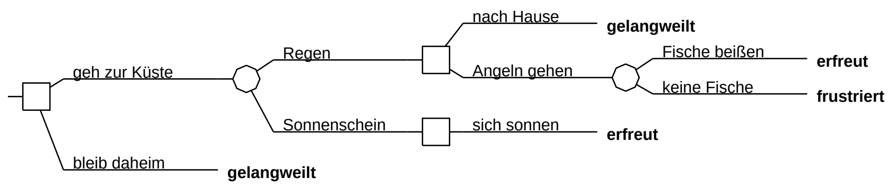
Zuvor hatten wir schon ein einfaches Beispiel einer Entscheidungstabelle angeführt. Dies ist nicht die einzige Form, in der man Entscheidungsprobleme schematisch darstellen kann. Eine andere, wahrscheinlich sogar anschaulichere Form der schematischen Darstellung ist der *Entscheidungsbaum*. Die weiter oben schon einmal als Entscheidungstabelle dargestellte Entscheidungssituation sieht als Baum folgendermaßen aus:



Entscheidungsbäume bestehen immer aus Knoten und Ästen. Dabei werden diejenigen Knoten, an denen eine Entscheidung zwischen unterschiedlichen Handlungsalternativen getroffen werden muss, *Entscheidungsknoten* genannt. Entscheidungsknoten werden durch ein Quadrat symbolisiert. Diejenigen Knoten, die ein Zufallsereigniss repräsentieren, werden *Möglichkeitsknoten* genannt und durch einen Kreis symbolisiert. Eingangs wurde statt von „Zufallsereignissen“ von „Zuständen“ gesprochen. Die Zweige, die auf einen Entscheidungsknoten folgen stellen dabei unterschiedliche „Handlungsalternativen“ dar, zwischen denen die Entscheiderin wählen kann. Die Zweige, die auf einen Möglichkeitsknoten folgen, entsprechen dagegen unterschiedlichen (Welt)-“Zuständen“, von denen entweder nicht sicher ist, welcher davon eintreten wird, oder von denen wir nicht wissen welcher eintreten wird oder bereits eingetreten ist, so dass es sich aus Sicht des Entscheiders immer noch um ein zufälliges Ereignis handelt. (Die Unterscheidung zwischen epistemischer Unsicherheit und objektiver Unbestimmtheit und, damit einhergehend, die zwischen subjektiver und objektiver Wahrscheinlichkeit muss uns an dieser Stelle noch nicht zu interessieren.) Die Ergebnisse stehen am Ende der Äste.

Hat man eine Entscheidungssituation, wie in diesem Fall, bereits durch eine Entscheidungstabelle dargestellt, dann kann man daraus sehr einfach einen Entscheidungsbaum ableiten, der dieselbe Entscheidungssituation wiedergibt: Man beginnt mit einem viereckigen Entscheidungsknoten. An diesen Entscheidungsknoten hängt man alle Handlungsalternativen an, die in er ersten Spalte der Tabelle stehen. Jeder dieser Zweige wird dann mit einem runden Möglichkeitsknoten versehen, an den wiederum alle Zustände angehängt werden, die in der ersten Zeile der Tabelle stehen. Am Ende der Zweige wird dann das jeweilige Ergebnis aus der Tabelle eingetragen.

Entscheidungsbäume haben gegenüber Entscheidungstabllen den Vorteil größerer Anschaulichkeit. Umgekehrt erlauben Tabellen eine kompaktere Darstellung. Die größere Anschaulichkeit soll an einem weiteren Beispiel demonstriert werden:



(Beispiel aus [23, S. 18])

Entscheidungsbäume erlauben es komplexe Entscheidungen, die aus mehreren Einzelentscheidungen zusammengestezt sind, in ihrem Verlauf darzustellen. Dennoch kann man jedes Entscheidungsproblem, dass sich als Entscheidungsbaum darstellen lässt auch als Entscheidungstabelle darstellen. Dazu muss man die möglichen Folgen von Einzelentscheidungen zu *Gesamtstrategien* zusammenfassen. Solche Gesamtstrategien müssen die „unter allen möglichen Eventualitäten“ zu treffenden Einzelentscheidungen festlegen. Gleichfalls ist es meist erforderlich, die Zufallsereignisse zu komplexeren Zuständen zusammenzufassen. Verfährt man in dieser Weise, dann entsteht aus dem eben präsentierten Entscheidungsbaum folgende Tabelle:

	Regen und Fische beißen	Regen und keine Fische	Sonnenschein
A1	gelangweilt	gelangweilt	erfreut
A2	erfreut	frustriert	erfreut
A3	gelangweilt	gelangweilt	gelangweilt

- *A1*: geh zur Küste; wenn Regen dann nach Hause, sonst wenn Sonnenschein dann sich sonnen
- *A2*: geh zur Küste; wenn Regen dann Angeln gehen, sonst wenn Sonnenschein dann sich sonnen
- *A3*: bleib daheim

Nehmen Sie sich ruhig ein wenig Zeit, um sich klar zu machen, dass die Tabelle dem Entscheidungsbaum entspricht, d.h. dass alle Handlungsalternativen, die nach der Baumdarstellung gewählt werden können, auch nach der Tabellendarstellung möglich sind, und ebenso auch alle denkbaren Kombinationen von Zufallsereignissen. Man könnte sich dabei zunächst wundern, warum beispielsweise die Kombination der Ereignisse „Sonnenschein" und „Fische beißen" nicht in der Tabelle vorkommt. Aber da in dem Fall, dass die Sonne scheint, der zweite Möglichkeitsknoten gar nicht mehr erreicht wird, ist es vom Ergebnis her gar kein Unterschied, ob die Fische beißen oder nicht. Insofern können beide Fälle durch ein- und dieselbe Zustandsspalte „Sonnenschein" erfasst werden

Das Verfahren, wie man einen Entscheidungsbaum in eine Tabelle überführt ist ebenfalls rein mechanischer Art. Da es etwas komplizierter ist als die Umwandlung einer Tabelle in einen Entscheidungsbaum, werden wir es gleich (Abschnitt 2.3.2) ausführlicher betrachten. Bis dahin soll einfach als gegeben angenommen werden, dass dies immer möglich ist.

Wenn wir es aber einmal als gegeben betrachten, dass man jeden Entscheidungsbaum in eine Entscheidungstabelle überführen kann, und, wie zuvor schon gezeigt wurde, jede Entscheidugnstabelle in einen Entscheidungsbaum, dann hat das die für uns wichtige Konsequenz, dass wir frei sind, uns je nach Konvenienz der einen oder der anderen Darstellung zu bedienen. Dies gilt insbesondere für die Entwicklung der Entscheidungstheorie selbst. Denn wir können nun davon ausgehen, dass alle Überlegungen, die wir in Bezug auf Entscheidungsprobleme anhand einer der Darstellungsformen anstellen, ihre Gültigkeit behalten, wenn wir zu der anderen Darstellungsform übergehen. Für die Entwicklung der Theorie eignet sich dabei die kompaktere Tabellenform häufig besser. Umgekehrt bietet sich für die Darstellung und Lösung bestimmter Entscheidungsprobleme oft eher die anschaulichere Darstellung durch Entscheidungsbäume eher an.

Wenn die Rede davon war, dass sich Tabellendarstellung und Baumdarstellung auf mechanische Weise ineinander überführen lassen, so bedeutet das allerdings nicht, dass wenn man nach diesem Verfahren einen Entscheidungsbaum in zuerst in eine Tabelle und dann wieder in einen Baum überführt, auch derselbe Entscheidungsbaum wieder dabei heraus kommt. Transformiert man die eben gewonnene Tabelle wieder in einen Baum, so hat dieser Entscheidungsbaum die folgende Gestalt:

Dass der Entscheidungsbaum nach der Übertragung in die Tabellenform und dann wieder der Rückübertragung in die Baumform ganz anders aussieht, sollte allerdings nicht verwundern, denn es gibt in der Regel viele unterschiedliche Möglichkeit ein- und dasselbe Entscheidungsproblem als Baum- und Tabelle darzustellen. Der zuletzt gezeigte Baum stellt in der Tat dasselbe Entscheidungsproblem dar wie der ursprüngliche Baum.

2.3.2 Exkurs: Entscheidungsbäume in Tabellen umwandeln

Dieses Teilkapitel ist als Exkurs gedacht. Wem es für den Anfang zu schwierig ist, der kann diesen Exkurs (und die dazu gehörigen Übungsaufgaben) ruhig überspringen. Im folgenden wird darauf nicht mehr zurück gegriffen.

Um Entscheidungsbäume in Tabellen umzuwandeln, können wir uns dem Umstand zu Nutze machen, dass Entscheidungsbäume, so kompliziert sie auch sein mögen, aus der Kombination von nur zwei Elementen bestehen, Entscheidungsknoten und Zufallsknoten. Um einen Entscheidungsbaum in eine Tabelle zu überführen müssen wir also nur wissen, wie man 1) Entscheidungsknoten in eine Tabelle überträgt, wie man 2) Zufallsknoten in eine Tabelle überträgt und 3) wie man einen komplizierten zusammengesetzten Baum schrittweise mit Hilfe der beiden vorherigen Übertragungsregeln reduziert.

1) Ein Entscheidungsbaum, der nur aus einem einzigen Entscheidungsknoten mit zwei Alternativen besteht, ergibt eine Tabelle mit zwei Zeilen und einer Spalte:

Baum:

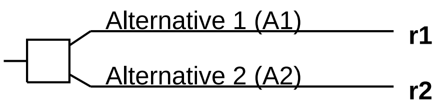


Tabelle:

	S_1
A_1	r_1
A_2	r_2

2) Ein Baum, der nur aus einem Zufallsknoten besteht, liefert demgegenüber eine Tabelle mit nur einer Zeile uns genau soviel Spalten wie Ereignisse an dem entsprechenden Ereignisknoten eintreten können.

Baum:

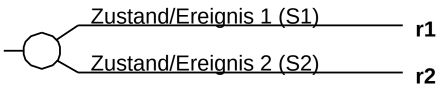


Tabelle:

	S_1	S_2
A_1	r_1	r_2

3) Wie kann man nun aber einen Entscheidungsbaum, der aus einer Vielzahl von Entscheidungs- und Zufallsknoten besteht, in eine Tabelle überführen? Dazu wird der Baum schrittweise von hinten „aufgerollt". Die jeweils „letzten" Entscheidungs- bzw. Zufallsknoten von rechts, entsprechen genau den vorher beschriebenen Fällen und können dementsprechend umgewandelt werden. Kompliziert wird es erst bei den weiter in der Mitte und am Anfang liegenden Knoten. Wenn wir an einem solchen Knoten ankommen, haben wir den Baum aber schon soweit aufgerollt, dass wir zu den sich an den Knoten anschließenden Teilbäumen bereits über Tabellen verfügen. Das Problem stellt sich also folgendermaßen dar: Wie kann ein Entscheidungsknoten bzw. ein Zufallsknoten in eine Tabelle überführt werden, an dessen Enden sich wiederum ganze Entscheidungsbäume anschließen, für die wir aber immerhin schon über eine Repräsentation in Tabellenform verfügen?

Um dieses Problem zu lösen, müssen wir wiederum Entscheidungs- und Zufallsknoten getrennt betrachten:

3 a) Angenommen, wir haben es mit einem Entscheidungsknoten zu tun. Dann endet der Entscheidungsknoten in zwei Teilbäumen, die bereits als Tabellen dargestellt sind. Jede dieser Tabellen enthält wiederum eine Menge von Handlungsalternativen und eine Menge von Zufallsereignissen.

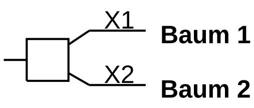


Tabelle zu Baum 1

	S_1	$\cdots$	S_n
A_1	r_{11}	$\cdots$	r_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_m	r_{m1}	$\cdots$	r_{mn}

Tabelle zu Baum 1

	T_1	$\cdots$	T_l
B_1	u_{11}	$\cdots$	u_{1l}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
B_h	u_{h1}	$\cdots$	u_{hl}

Die beiden Ereignismengen $\{S_1, \dots S_n\}$ und $\{T_1, \dots, T_l\}$ des ersten und des zweiten Teilbaums sowie die entsprechenden Mengen von Handlungsalternativen $\{A_1, \dots, A_m\}$ und $\{B_1, \dots, B_h\}$ müssen nun in geeigneter Form kobminiert werden, um die Tabelle des gesamten Entscheidungsknotens aufzubauen. Das geschieht folgendermaßen: In den Spalten der zusammengefassten Tabelle muss jede mögliche Kombination der Zufallsereignisse aus beiden Mengen eingetragen werden. In den Zeilen wird als erstes der Block von Handlungen $X_1 \wedge A_1, \dots, X_1 \wedge A_m$ eingetragen, worauf als zweites ein Block von Handlungen $X_2 \wedge B_1, \dots, X_2 \wedge B_h$ folgt (d.h. jede der Handlungen der ersten Tabelle wird mit der Handlung X_1 komibiniert, jede alternative Handlung der zweiten Tabelle mit X_2).[3] Daraus ergibt sich folgende kombinierte Tabelle:

	$S_1 \wedge T_1$	$\cdots$	$S_n \wedge T_1$	$\cdots$	$S_1 \wedge T_l$	$\cdots$	$S_n \wedge T_l$
$X_1 \wedge A_1$	r_{11}	$\cdots$	r_{1n}	$\cdots$	r_{11}	$\cdots$	r_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_1 \wedge A_m$	r_{m1}	$\cdots$	r_{mn}	$\cdots$	r_{m1}	$\cdots$	r_{mn}
$X_2 \wedge B_1$	u_{11}	$\cdots$	u_{11}	$\cdots$	u_{1l}	$\cdots$	u_{1l}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_2 \wedge B_h$	u_{h1}	$\cdots$	u_{h1}	$\cdots$	u_{hl}	$\cdots$	u_{hl}

Man beachte: Jedes mögliche Resultat r_{xy} aus der ersten Tabelle kommt genau l-mal vor, d.h. genauso viel mal, wie es Zufallsereignisse in der zweiten Tabelle gibt. Umgekehrt kommt jedes mögliche Resultat u_{xy} aus der zweiten Tabelle kommt genau n-mal vor, wobei n die Anzahl der Zufallsereignisse in der ersten Tabelle ist. Die entsprechende Tabellendarstellung ist also in der Regel hochgradig redundant.

3 b) Geht es statt dessen um die Umwandlung eines Zufallsknotens, dann stehen wir vor der spiegelbildlichen Situation, so dass wir diesmal zwei Spaltenblöcke bilden und in den Zeilen jede Kombination möglicher Handlungen zu berücksichtigen haben.

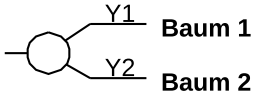


Tabelle zu Baum 1

	S_1	$\cdots$	S_n
A_1	r_{11}	$\cdots$	r_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_m	r_{m1}	$\cdots$	r_{mn}

Tabelle zu Baum 1

	T_1	$\cdots$	T_l
B_1	u_{11}	$\cdots$	u_{1l}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
B_h	u_{h1}	$\cdots$	u_{hl}

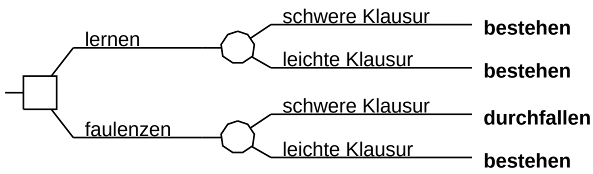
[3] Das aus der Logik bekannte Zeichen $\wedge$ bedeutet „und“.

Um die kombinierte Tabelle zu konstruieren, müssen wir als zwei Spaltenblöcke bilden, wobei der erste Block alle Zufallsereignisse der ersten Tabelle umfasst (und-verknüpft mit dem Ereignis Y_1 versteht sich!) und der zweite Block die der zweiten Tabelle: In den Zeilen treten alle Kombinationen möglicher Handlungen auf, und zwar, da die Möglichkeit, eine bestimmte Handlung zu wählen oder nicht zu wählen erst durch das Eintreten von Y_1 oder Y_2 überhaupt eröffnet wird, in einer „wenn…, dann…"-Form. In einer abgekürzten Schreibweise, bei der das Zeichen „$\rightarrow$" für die wenn-dann-Beziehung stehen soll, schreiben wir also z.B. $Y_1 \rightarrow A_2 \wedge Y_2 \rightarrow B_5$.[4]

	$Y_1 \wedge S_1$	$\cdots$	$Y_1 \wedge S_n$	$Y_2 \wedge T_1$	$\cdots$	$Y_2 \wedge T_l$
$Y_1 \rightarrow A_1 \wedge Y_2 \rightarrow B_1$	r_{11}	$\cdots$	r_{1n}	u_{11}	$\cdots$	u_{1l}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$Y_1 \rightarrow A_1 \wedge Y_2 \rightarrow B_h$	r_{11}	$\cdots$	r_{1n}	u_{h1}	$\cdots$	r_{hl}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$Y_1 \rightarrow A_m \wedge Y_2 \rightarrow B_1$	r_{m1}	$\cdots$	r_{mn}	u_{11}	$\cdots$	u_{1l}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$Y_1 \rightarrow A_m \wedge Y_2 \rightarrow B_h$	r_{m1}	$\cdots$	r_{mn}	u_{h1}	$\cdots$	r_{hl}

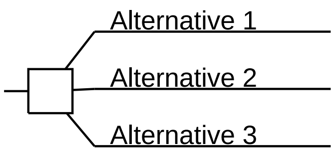
Mit diesen beiden „Übersetzungsregeln" kann man jeden Entscheidungsbaum systematisch schrittweise in eine Tabelle überführen. Man ahnt, dass die Tabelle ziemlich groß werden kann. Dies hängt auch damit zusammen, dass wir an dieser Stelle auf Sonderfallbetrachtungen verzichtet haben, die die Tabelle vereinfachen könnten. Z.B. ist es sehr wohl möglich, dass unterschiedliche Zufallsknoten in einem Baum in Wirklichkeit ein- und dasselbe Ereignis ausdrücken, nur dass es je nach den zuvor getroffenen Entscheidungen möglicherweise zu anderen Resultaten führt. Am Beispiel von vorhin lässt sich dies erläutern:

[4]Angesichts der Symmetrie zwischen dem Problem der Umwandlung eines Entscheidungsknotens in eine Tabelle und dem der Umwandlung eines Zufallsknotens in eine Tabelle, könnte es verwundern, dass wir im zweiten Fall in den Zeilen der generierten Tabelle „wenn…, dann…"-Audrücke vorfinden, während wir uns im ersteren Fall mit simpleren und-Verknüpfungen begnügen. Dies ist dadurch motiviert, dass wir davon ausgehen, dass die Ereignisse der Serien $T_1, \dots, T_n$ bzw. $S_1, \dots, S_n$ unabhängig von den getroffenen Entscheidungen auch dann eintreten, wenn sie angesichts des gewählten Zweiges für das erzielbare Ergebnis nicht mehr relevant sind. Diese Annahme ist zwar harmlos aber keinesfalls zwingend. Wollte man ganz präzise sein, dann müsste man die Spaltenüberschriften der aus einem Entscheidungsknoten gewonnen Tabelle ebenfalls als „wenn…, dann…"-Aussagen ausformulieren.

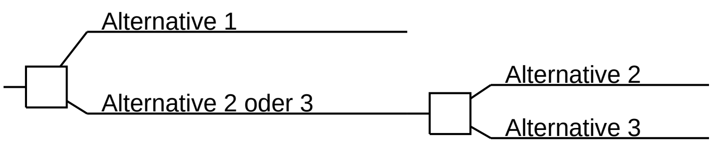


Würde man diesen Entscheidungsbaum nach unserem „mechanischen" Verfahren in eine Tabelle überführen, dann würden in den Spaltenüberschriften die Ereignisse „schwere Klausur & schwere Klausur", „schwere Klausur & leichte Klausur", „leichte Klausur & schwere Klausur" und „leichte Klausur & leichte Klausur" stehen. Das hängt damit zusammen, dass der Algorithmus zunächst keine Informationen darüber hat, ob unterschiedliche Zufallsknoten möglicherweise identische Zufallsereignisse repräsentieren. Man müsste den Entscheidungsbaum um entsprechende Informationen ergänzen (z.B. indem man eine Verbindungslinie zwischen identischen Ereignissen zieht) und den Algorithmus so anpassen, dass er unmögliche Ereigniskombinationen („schwere & leichte Klausur") streicht.

Weiterhin haben wir den Algorithmus zur Übersetzung von Bäumen in Tabellen zunächst nur für *Binär*-bäume (d.h. Bäume, die an jeder Verzweigung nur zwei Äste haben) beschrieben. Das ist aber unproblematisch, da man jeden Entscheidungsbaum in einen binären Entscheidungsbaum umwandeln kann. z.B. kann der Entscheidungsbaum



einfach in den Baum



umgewandelt werden. Eine andere Alternative bestünde darin, den Algorithmus so anzupassen, dass er sich auch für nicht binäre Entscheidungsbäume eignet (siehe Übungsaufgabe 6 auf Seite 23).

2.4 Das Prinzip der Dominanz

Bisher haben wir nur über die Darstellung von Entscheidungsproblemen gesprochen. Wie kann man aber nun (mit Hilfe von Bäumen oder Tabellen)

Entscheidungsprobleme lösen? Diese Frage wird einen Großteil unserer Aufmerksamkeit in den folgenden Wochen in Anspruch nehmen. Für heute soll es genügen, ein besonders offensichtliches Prinzip anzusprechen, das bei der Lösung von Entscheidungsproblemen eine Rolle spielt, nämlich das *Prinzip der Dominanz*. Betrachten wir dazu noch einmal die eingangs vorgestellte Entscheidungstabelle:

		Zustand	
		schwere Klausur	leichte Klausur
Handlung	lernen	*bestehen*	*bestehen*
	faulenzen	*durchfallen*	*bestehen*

Man sieht anhand der Tabelle sofort, dass es auf jeden Fall besser wäre zu lernen als zu faulenzen, denn in dem Fall, dass die Klausur schwer ist, erzielt man durch lernen ein besseres Ergebnis und in dem Fall, dass sie leicht wird, ist das Ergebnis wenigstens nicht schlechter als wenn man nicht lernt. Das bei dieser Überlegung implizit zu Grunde gelegte Entscheidungsprinzip kann man folgendermaßen formulieren.

> *Prinzip der schwachen Dominanz*: Wenn eine Handlung unter allen Umständen zu einem mindestens gleichguten Ergebnis führt wie alle anderen Alternativen und in mindestens einem möglichen Fall zu einem besseren Ergebnis, dann wähle diese Handlung.

Analog zu dem Prinzip der schwachen Dominanz kann man auch ein Prinzip der starken Dominanz aufstellen, bei dem gefordert wird, dass die zu wählende Handlung unter allen Umständen zu einem eindeutig besseren Ergebnis führt als sämtliche verfügbaren Alternativen. An dieser Stelle ist die Unterscheidung zwischen schwacher Dominanz und starker Dominanz noch nicht besonders wichtig. Der Begriff der starken Dominanz könnte sogar verzichtbar erscheinen. Allerdings spielt diese Unterscheidung spätestens bei der Suche nach geeigneten Lösungsstrategien in der Spieltheorie wieder eine wichtige Rolle und wird uns dort noch beschäftigen.

Das Prinzip der schwachen Dominanz erscheint so einfach und eindeutig, dass man nicht vermuten sollte, dass es bei seiner Anwendung irgendwelche Schwierigkeiten auftreten könnten. Dass das nicht unbedingt stimmen muss, kann folgende Beispiel verdeutlichen: Angenommen, Sie betreten ein Wettbüro, in dem Sportwetten für die Sportarten Fussball und Tennis angeboten werden. Der Einsatz beträgt in jedem Fall 2 Euro, aber da sehr viel weniger Leute an Tennis interessiert sind als an Fussball, können Sie bei einer Tenniswette höchstens € 10.000 gewinnen, während bei einer Fußballwette satte € 50.000 drin sind. Ihre Entscheidungstabelle würde als folgendermaßen aussehen:

	Wette gewinnt	Wette verliert
Tenniswette	€ 9.998	€ -2
Fussballwette	€ 49.998	€ -2

Wollte man in dieser Situation auf das Prinzip der Dominanz zurückgreifen, dann müsste man sich eigentlich ganz klar für die Fussballwette entscheiden. Warum wäre das aber ein Trugschluss? Der Grund ist folgender: Es ist höchst wahrscheinlich, dass die Gewinnchancen bei beiden Wetten sehr unterschiedlich verteilt sind. Werden einem zwei solche Wetten angeboten, dass ist davon auszugehen, dass die Gewinnchancen bei der Fussballwette sehr viel geringer sind als bei der Tenniswette. Je nachdem, um wieviel sie geringer sind, könnte es sein, dass die Tenniswette sogar aussichtsreicher ist als die Fussballwette. (Was „aussichtsreicher" dabei exakt heisst, werden wir noch genau definieren, wenn wir Entscheidungen unter Risiko besprechen.)

An diesem Beispiel wird deutlich, dass das Prinzip der Dominanz nur dann sinnvoll angewandt werden kann, wenn die Chancen für das Eintreten der Zufallsereignisse entweder gleichverteilt sind, oder wenn wir zumindest keinerlei Wissen darüber haben, wie sie verteilt sein könnten.

Daneben gibt es aber noch ein weiteres denkbares Problem, wie das folgende, mit leichten Abwandlungen aus Resniks Buch [23, S.9] übernommene Beispiel verdeutlicht. Das Beispiel stellt stark vereinfacht die strategische Problematik der Aufrüstung im kalten Krieg dar:

	Krieg	Frieden
Aufrüsten	„Tot"	hohe Militärausgaben
Abrüsten	„Rot"	„Friedensdividende"

Nimmt man einmal an, dass es besser ist, sich zum Kommunismus bekehren zu lassen als zu sterben, dann müsste man nach dem Prinzip der Dominanz die eigentlich Handlungsalternative „Abrüsten" eindeutig vorziehen, denn unabhängig davon ob es Krieg oder Frieden gibt, erzielt mit der Entscheidung zugunsten der Abrüstung in beiden Fällen das jeweils bessere Ergebnis. Wo ist der Haken an dieser Argumentation? Der „Haken" besteht darin, dass das Eintreten der Zustände „Krieg" oder „Frieden" nicht unabhängig davon ist, welche Handlung gewählt wird. Zumindest nach Ansicht von Aufrüstungsbeführwortern hätte damals eine zu weit gehende Abrüstung die Gefahr eines Überfalls durch die Ostblockstaaten drastisch erhöht. Stimmt man dem zu, dann ist es keineswegs mehr so eindeutig, dass Abrüsten die besser Wahl ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass es noch eine weitere stillschweigende Voraussetzung für die Anwendung des Prinzips der Dominanz wie übrigens auch anderer Entscheidungsregeln gibt, nämlich die Unabhängigkeit der „Zufallsereignisse“ bzw. der Weltzustände von den getroffenen Entscheidungen. In dem angeführten Beispiel ist eine solche Unabhängigkeit nicht gegeben, da wir es mit einem Gegenspieler zu tun haben, der auf unsere Entscheidungen reagiert. Strengenommen haben wir es daher gar nicht mehr mit einem reinen Entscheidungsproblem zu tun, sondern mit einem Problem strategischer Interaktion, das in das Gebiet der Spieltheorie fällt, auf die wir in diesem Semester im Anschluss an die Entscheidungstheorie eingehen werden.

2.5 Literaturhinweise

Zum Schluss ein par Worte zu der Fachliteratur, auf die sich diese Vorlesung stützt, und die ich als Ergänzung zu diesem Skript als Begeleittexte empfehle: Zum überwiegenden Teil werde ich in dieser Vorlesung dem Buch „Choices. An Introduction to Decision Theory“ von Micheal D. Resnik [23] folgen. Es handelt sich dabei um eine didaktisch gut aufbereitete und sehr verständliche Einführung in die Entscheidungstheorie und die Grundlagen der Spieltheorie. Speziell was die philosophischen Probleme im Zusammenhang mit der Entscheidungstheorie angeht, werde ich weiterhin Das Buch von Mark Kaplan „Decision Theory as Philosophy“ [17] hinzuziehen. Für die weiterführenden Themen aus dem Bereich Social Choice und Public Choicde, die wir am Ende des Semesters besrpechen werden, greife ich auf Dennis C. Mueller: „Public Choice III“ [19] zurück. (Als kritische Ergänzung zu der sehr einseitigen Darstellung Muellers ist, wie bereits erwähnt, das Buch „The Pathologies of Rational Choice“ von Donald Green und Ian Shapiro [12] sehr empfehlenswert.) Soweit in der Vorlesung auch wissenschaftstheoretische Fragen berührt werden, beziehe ich mich hauptsächlich auf Gerhard Schurz’ „Einführung in die Wissenschaftstheorie“ [24].

2.6 Aufgaben 1

1. *Stelle folgendes Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum dar*: Paula und Fritz stoßen an einer vielbefahrenen Kreuzung mit ihren Autos zusammen. Vieles spricht dafür, dass Fritz schuld ist. Deshalb bietet Fritz' Versicherung Paula € 5.000 als Schadensersatz und Schmerzensgeld an. Paula glaubt jedoch, dass ihr mehr zusteht und überlegt vor Gericht zu ziehen. Wenn Sie klagt, dann könnte es sein, dass Fritz' Versicherung ihr Angebot im Falle einer außergerichtlichen Einigung auf € 10.000 erhöht. Es ist aber auch möglich, dass die Versicherung ihr ursprüngliches Angebot beibehält. Gewinnt Paula den Prozess, dann erhält sie € 20.000. Verliert Sie den Prozess, dann bekommt sie gar nichts. (Gerichts- und Anwaltskosten können zunächst vernachlässigt werden.)

2. *Aufgabe*: Angenommen, bei einer Klage, die später zurückgezogen wird, fallen für die Klägerin immer noch Anwalts- und Gerichtskosten von € 500 an. Angenommen weiterhin, der Prozess kostet den Verlierer oder die Verliererin € 2.500. *Wie sieht nun der Entscheidungsbaum aus?*

3. *Stelle das Entscheidungsproblem aus 2. als Tabelle dar.*

4. *Aufgabe*: Angenommen, Paula würde eine Klage gar nicht erst in Erwägung ziehen, wenn die Versicherung von Fritz ihr gleich € 10.000 anbietet und sie würde ihre Klage wieder fallen lassen, wenn sich die Versicherung außergerichtlich auf € 15.000 mit ihr einigt. Für die Prozesskosten der Versicherung soll dasselbe gelten wie in Aufgabe 2. *Wie sieht der Entscheidungsbaum aus Sicht der Versicherung aus?*

5. *Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*: Auf einer Geburtstagsfeier treffen 40 Gäste ein. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den Gästen mindestens eine Person befindet, die am selben Tag Geburtstag hat, wie das „Geburtstagskind"? b) Ab welcher Anzahl von geladenen Gästen würde die Wahrscheinlichkeit mehr als 50% betragen?

6. Formuliere den Algorithmus zur Umwandlung von Entscheidungsbäumen in Entscheidungstabellen (siehe Abschnitt 2.3.2) so um, dass er auch für nicht binäre Entscheidungsbäume geeignet ist.

7. Beweise (bzw. Erläutere), dass die Kombinationen von Zufallsereignissen in den durch den Algorithmus zur Umwandlung von Entscheidungsbäumen (siehe Abschnitt 2.3.2) generierten Tabellen immer noch

wechselseitig ausschließend und zugleich erschöpfend (d.h. eins der Ereignisse tritt auf jeden Fall ein) sind.

3 Entscheidungen unter Unwissenheit I

In dieser und der folgenden Woche werden wir uns mit Entscheidungen unter Unsicherheit beschäftigen. Entscheidungen unter Unsicherheit sind Entscheidungen, bei denen wir nicht wissen mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Ereignisse (bzw. „Welt-Zustände") eintreten können, bei denen wir aber immer noch eine klare Vorstellung davon haben, mit welchen Ereignissen als Bedingungen unserer Entscheidungen und mit welchen Ergebnissen als Resultaten der Entscheidungen überhaupt zu rechnen ist. Entscheidungen unter Unwissen sind zu unterscheiden von Entscheidungen unter „vollständiger Unwissenheit" einerseits, bei denen wir nicht einmal mehr mit Sicherheit angeben können, zu welchen möglichen Resultaten unsere Handlungen führen können, und von „Entscheidungen unter Risiko" andererseits, bei denen wir zusätzlich Aussagen über Wahrscheinlichkeit der in Betracht zu ziehenden Ereignisse machen können.

Naturgemäß bieten Entscheidungen unter Risiko, bei denen wir Wahrscheinlichkeiten angeben können, die meisten Angriffspunkte für eine formale Theorie des Entscheidens. Aber auch Entscheidungen unter Unwissenheit sind bis zu einem gewissen Grade einer formalen Behandlung zugänglich, und weil dabei die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht erforderlich ist, handelt es sich technisch gesehen sogar um den einfacheren Teil der Entscheidungstheorie, weshalb wir diesen Teil auch zuerst besprechen.

3.1 Präferenzen

In der letzten Vorlesungsstunde wurde als Beispiel für ein mögliches Entscheidungsproblem, bei dem uns die Entscheidungstheorie *nicht* weiterhelfen kann, die Frage angeführt, ob der nächste Urlaub lieber in den Bergen oder an der See gebucht werden sollte. Der Grund, weshalb uns die Entscheidungstheorie hier nicht weiterhelfen kann, besteht darin, dass es bei diesem Entscheidungsproblem noch darum geht, wie die verschiedenen Ergebnisse der Entscheidung zu bewerten sind. Grundsätzlich setzt die Entscheidungstheorie voraus, dass wir uns über die Bewertung der möglichen Ergebnisse, sprich über unsere *Präferenzen* schon im Klaren sind. Im Folgenden ist daher zunächst einiges über Präferenzen zu sagen, insbesondere welche Anforderungen an die Präferenzen gestellt werden müssen, damit sie im Sinne der Entscheidungstheorie wohlgeformt sind.

Unter *Präferenz* ist im Zusammenhang der Entscheidungstheorie eine Relation zu verstehen, die festlegt, wann ein mögliches Resultat[5] eines Entschei-

[5]Die *Resultate* eines Entscheidungsprzesses sind nicht zu verwechseln mit der Entschei-

dungsprozesses einem anderen vorgezogen wird. (Da wir es mit Entscheidungsproblemen zu tun haben, bezieht sich unsere Präferenzrelation auf die möglichen Resultate von Entscheidungsprozessen. In der Ökonomie würde man die Präferenzrelation dagegen eher auf der Menge möglicher „Güterbündel" oder dergleichen definieren.) Wenn x und y zwei mögliche Resultate eines Entscheidungsprozesses sind, dann schreiben wir $x \succ y$, um auszudrücken, dass x y vorgezogen wird. Und wir schreiben $x \sim y$, wenn x und y gleich gut bewerten werden bzw. wenn diejenige Person, die die Entscheidung trifft, zwischen x und y *indifferent* ist. Eine wohlgeformte Präferenzrelation muss folgende fundamentale Eigenschaften erfüllen:

1. *Antisymmetrie:* Wenn $x \succ y$, dann nicht $y \succ x$, und auch nicht $x \sim y$
2. *Zusammenhang:* Für jedes Paar x, y aus der Menge der möglichen Resultate gilt entweder $x \succ y$ oder $y \succ x$ oder $x \sim y$
3. *Transitivität:* Wenn $x \succ y$ und $y \succ z$, dann auch $x \succ z$. (In analoger Weise gilt: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$, $x \sim y \wedge y \succ z \Rightarrow x \succ z$, $x \succ y \wedge y \sim z \Rightarrow x \succ z$)

Mit welchem Recht können wir fordern, dass eine Präferenzrelation diese Eigenschaften erfüllen muss? Man kann diese Frage von zwei Seiten aus betrachten: 1) von der Seite des entscheidungstheoretischen Formalismus aus und 2) von der empirischen Seite aus. 1. Von der Seite des entscheidungstheoretischen Formalismus stellt sich die Situation so dar, dass z.b. bestimmte Lösungsverfahren nur tatsächlich richtige (d.h. die Präferenzen optimal erfüllende) Entscheidungen liefern, wenn die Präferenzrelation in dem oben beschriebenen Sinne wohlgeformt ist; und zwar schon deshalb, weil die entsprechenden Lösungsverfahren unter genau dieser Voraussetzung entwickelt worden sind. Anderseits gilt aber auch, dass 2. die Entscheidungstheorie beansprucht unser Handeln richtig anleiten zu können. Dann sollten diese Eigenschaften auch den Eigenschaften von Präferenzen von Menschen in empirischen Entscheidungssituationen mehr oder weniger entsprechen. Kann man das ungeprüft voraussetzen? Wenigstens bei den Eigenschaften der *Transitivität* und des *Zusammenhangs* sind dabei jedoch einige Abstriche zu machen.

dung selbst. Das Resultat ist vielmehr das, was bei einer Entscheidung heraus kommt, die Entscheidung selbst ist die Wahl, die man trifft, um dann ggf. ein bestimmtes Resultat zu erzielen. Die Präferenzen, von denen hier die Rede ist beziehen sich zunächst auf die Resultate, auch wenn man im übertragenen Sinne ebenfalls davon sprechen könnten, dass eine Entscheidung einer anderen *vorgezogen* wird, weil man sich von ihr ein besseres Resultat erhofft.

Zur *Tansitivität*: Wie könnte man zunächst einmal die Eigenschaft der Transitivität rechtfertigen? Ein beliebtes Argument zur Rechtfertigung dieser Eigenschaft ist das sogenannte *Geldpumpenargument*. Angenommen, es gibt jemanden, dessen Präferenzen nicht transitiv sind. Dann gibt es drei Weltzustände (bzw. „Resultate“ oder „Güterbündel“) a, b, c für die für diese Person gilt: $a \prec b, b \prec c, c \prec a$. Wenn diese Person aber b gegen über a vorzieht, so bedeutet dass, dass sie ggf. bereit wäre, für den Übergang von a zu b einen bestimmten Geldbetrag zu zahlen. Dann wäre sie aber wiederum bereit einen Geldbetrag für den Übergang von b zu c bezahlen. Ist sie aber erst einmal bei c angekommen, dann würde sie wegen $c \prec a$ nochmals bereit sein für den Übergang zu a in die Tasche zu greifen, und das ganze Spiel fängt von vorne an und könnte beliebig oft wiederholt werden. Nun wird man in Wirklichkeit wohl kaum jemanden finden, den man auf diese Weise ausbeuten kann und der zu blöd ist, das nicht nach ein par Runden zu bemerken und spätestens dann die eigenen Präferenzen entsprechend abzuändern. Aber zumindest zeigt das Argument, dass nicht transitive Präferenzen in gewisser Weise unplausibel bzw. inkonsequent sind. Leider zeigt es nicht, dass sie gar nicht vorkommen können.

Ganz besonders stellt sich dieses Problem im Zusammenhang Kollektivpräferenzen (d.h. den gemeinsamen Präferenzen eines Kollektivs von Menschen). Denn während man von einzelnen Menschen, z.B. Entscheidungsträgern in der Politik oder in der Wirtschaft noch recht und billig fordern kann, dass sie „ihre“ Präferenzen durch entsprechende Zieldefinition konsistent ordnen, bevor strategische Entscheidungen getroffen werden, dann ist das bei einem Kollektiv von Menschen nicht ohne Weiteres möglich. Denn dazu müsste irgendein geeigneter Abstimmungsmechanismus vorhanden sein, der es erlaubt aus den vielfältigen und möglicherweise höchst disparaten Interessen der Einzelnen eine gemeinsame Zielvorstellung zu bilden. Es gehört nun aber zu den interessantesten Theoremen der Social-Choice Theory, die unter Stichworten wie „Paradox der Demokratie“ und „Satz von Arrow“ bekannt geworden sind, dass einen solchen Abstimmungsmechanismus zu finden nahezu unmöglich ist, will man nicht die elementarsten Mindestanforderungen an die Fairness und die Vernunft eines solchen Abstimmungsmechanismus von vornherein aufgeben. Wir werden auf diese Theoreme am Ende dieses Semesters hoffentlich noch eingehen können. So viel sei aber hier schon vorweggenommen: Mit einer einfachen demokratischen Mehrheitsentscheidung ist das Problem nicht aus der Welt zu schaffen. Die Erörterung von „zyklischen Mehrheiten“ (in Analogie zu den zyklischen Präferenzen in unserem „Geldpumpenargument“) und deren mögliche Konsequenzen für den politischen Entscheidungsprozess spielt daher besonders in der theoretisch orientierten Public Choice Literatur eine nicht geringe Rolle

[19, S. 84ff.]. Die empirische Relevanz des vermeintlichen Problems zyklischer Mehrheiten wird jedoch von anderen nicht ohne Grund wiederum in Zweifel gezogen [12, S. 147ff.].

Eine weitere Einschränkung der Gültigkeit der Annahme transitiver Präferenzen ergibt sich aus folgender Überlegung [23, p. 23/24]: Stellen Sie sich zwei Tassen Kaffe vor, eine ohne Zucker und eine, die eine sehr kleine Menge Zucker enthält, gerade so viel, dass man den Zucker beim Trinken noch nicht bemerkt. Jemand, der entscheiden sollte, welche Tasse Kaffee er vorzieht, würde also indifferent zwischen diesen beiden Kaffeetassen sein, auch wenn er vielleicht gezuckerten Kaffee bevorzugt. Nun denken wir uns eine dritte Kaffeetasse, die wiederum ein klein wenig mehr Zucker enthält als die zweite, aber nicht so viel mehr, als dass man den Unterschied bemerken könnte. Dann, eine vierte Kaffeetasse, die sich wiederum von der dritten durch einen nur marginal größeren Zuckergehalt unterscheidet usw. Irgendwann haben wir dann eine Kaffeetasse, die soviel Zucker enthält, dass sich der Geschmack von dem der allerersten kaffeetasse deutlich unterscheidet. Dann würde jemand, der gezuckerten Kaffee bevorzugt, diese letzte Tasse unseres Gedankenexperiments der ersten Tasse sicherlich vorziehen, was aber im Widerspruch zur Transitivität der Indifferenzbeziehung steht. Das Gedankenexperiment ist zudem so konstruiert, dass es sich in diesem Fall nicht um ein Beispiel von Inkonsequenz oder Irrationalität handelt, sondern dass sich die Transitivität der Präferenzrelation „beim besten Willen“ nicht aufrecht erhalten lässt. Wenn wir das Gedankenexperiment als glaubhaft ansehen, dann bleibt uns nichts weiter übrig als zuzugestehen, dass wir in der Wirklichkeit nicht immer von transitiven Präferenzen ausgehen können, und dass die Präferenzrelation, so wie sie hier definiert ist, lediglich eine bessere oder manchmal auch schlechtere Annhährung an die Wirklichkeit darstellt. (Der tiefere Grund für dieses Problem besteht darin, dass Relationen vom Typ „ungefähr gleich wie“ im Gegensatz zu Relationen vom Type „gleich wie“ nicht (vollkommen) transitiv sind. Das wir es in der Empirie aber schon auf Grund von Messungenauigkeiten fast immer mit dem ersteren Typ zu tun haben, kann das zu Problemen führen, wann man vollständige (d.h. über eine beliebig große Anzahl von Zwischengliedern erhalten beliebende) Transitivität voraussetzt.)

Neben der Transitivität, lässt sich aber auch in Zweifel ziehen, ob man stets davon ausgehen kann, dass unsere Präferenzen *zusammenhängend* sind. Zumindest wenn wir eine größere und nicht mehr ohne Weiteres überschaubare Menge von Gütern (oder möglichen Entscheidungsresultaten) betrachten, kann man sich leicht vorstellen, dass es nicht mehr so ohne weiteres möglich ist, von jedem Paar aus dieser Menge eindeutig zu sagen, welche der Relationen $\succ$, $\prec$ oder $\sim$ zwischen den beiden Gliedern des Paars besteht. Einige Autoren [17], die diese Voraussetzung für allzu artifiziell halten, führen deshalb neben der Beziehung der *Indifferenz* $\sim$, die besteht, wenn wir zwei Güter gleich hoch schätzen, eine davon deutlich zu unterscheidende Beziehung der *Unentschiedenheit* oder auch „Unentschlossenheit" ein, die dann besteht, wenn wir nicht sicher sind, ob wir eine Sache einer anderen vorziehen oder nicht, was ja etwas anderes ist, als wenn wir eine Sache als genauso gut bewerten wie eine andere. Dieser Unterschied ist recht subtil, denn man kann sowohl hinsichtlich der Indifferenz als auch hinsichtlich der Unentscheidenheit mit Recht sagen, dass wir *weder* den einen *noch* den anderen der beiden Gegenstände zwischen denen wir indifferent bzw. unentschieden sind, dem anderen vorziehen. Trotzdem ist es noch etwas anderes, wenn wir es deshalb nicht tun, weil sie uns beide gleich lieb sind, oder deshalb, weil wir unentschieden darüber sind.

Die Annahme, dass es so etwas wie Unentscheidenheit gibt, erscheint besonders bei unüberschaubar großen Gegenstandsmengen oder bei solchen Gegenstandsmengen die Güter von sehr unterschiedlicher Art enthalten, sehr viel realistischer, denn anderenfalls würde man voraussetzen, dass die Frage, welches von zwei Gütern man vorzieht, oder ob man sie beide als gleichwertig beurteilt, immer schon entschieden ist, selbst wenn wir sie uns im konkreten Fall noch gar nicht vorgelegt haben. Zudem ist es ebenso möglich, eine Entscheidungstheorie auf der Grundlage zu konstruieren, dass es neben Bevorzugung und Indifferenz auch so etwas wie Untschlossenheit gibt. In diesem Fall muss man die Forderung, dass die Präferenzen „zusammenhängend" sind, zu der Eigenschaft des *beschränkten Zusammenhangs* abschwächen (sie dazu [17, S. 13, 24]). Die Formulierung der Entscheidungstheorie gestaltet sich dadurch technisch etwas komplizierter. Wir werden im Folgenden daher der Einfachheit halber davon ausgehen, dass es keine Unentschiedenheit gibt, bzw. dass alle denkbaren Unentscheidenheiten im Vorfeld der Entscheidungsfindung geklärt worden sind. Rechtfertigen ließe sich das dadurch, dass wir es bei den Beispielen, die wir besprechen werden ohnehin nur mit sehr begrenzten und überschaubaren Zielmengen zu tun haben. Zudem setzen wir eine gültige Präferenzrelation nur jeweils *lokal* für das in Frage stehende Entscheidungsproblem voraus. Wir unterstellen nicht, dass irgendjemand „global" (d.h. bezüglich aller Ziele und Wünsche, die man im Leben haben kann) über wohlgeordnete (d.h. transitive und durchgängig zusammenhängende) Präferenzen verfügt.

3.2 Ordinale Nutzenfunktionen

Mit Hilfe einer Präferenzrelation kann man die Gütermenge, auf die sich die Relation bezieht, in eine Menge von Indifferenzklassen *partionieren*, indem man jeder Indifferenzklasse alle diejenigen Güter zuordnet, zwischen denen Indifferenz herrscht. Ist die Präferenzlrelation wohlgeformt, dann schöpfen die Indifferenzklassen die gesamte Gütermenge aus, und jedes Gut ist Element genau einer Indifferenzklasse.[6] Weiterhin induziert die Ordnung der Güter durch die Präferenzrelation eine Ordnung auf der Menge der Indifferenzklassen. Wir können schreiben, $I_x \succ I_y$ genau dann wenn $x \succ y$ für $x \in I_x, y \in I_y$. Aus der Konstruktion der Indifferenzklassen ergibt sich dabei, dass wenn $x \succ y$ für ein irgend ein beliebiges $x \in I_x$ und ein beliebieges $y \in I_y$ dann gilt $x \succ y$ für jedes $x \in I_x$ und jedes $y \in I_y$. Wir können nun den Indifferenzklassen bzw. ihren Elementen Zahlen zuordnen, deren Ordnung der Ordnung der Indifferenzklassen entspricht. Diese Zuordnung bezeichnen wir als *Nutzenfunktion* oder auch als *Nutzenskala*, wobei die Nutzenskala jedoch strenggenommen die Zielmenge der Nutzenfunktion ist. Eine Nutzenfunktion $u : G \mapsto \mathbb{R}$ ist also eine Abbildung der Gütermenge G auf die reellen Zahlen, für die Folgendes gelten muss:

$$u(x) > u(y) \quad \text{genau dann wenn} \quad x \succ y \tag{3.1}$$
$$u(x) = u(y) \quad \text{genau dann wenn} \quad x \sim y \tag{3.2}$$

Wichtig ist dabei, dass bei dieser Art von Nutzenfunktionen, den zugeordneten Zahlenwerten keine andere Bedeutung zukommt als diejenige, das Ordnungsverhältnis zwischen den Gütern auszudrücken. Man kann also z.B. sagen, dass ein Gut x, dem eine Nutzenfunktion den Wert 4 zuordnet, nützlicher ist als ein Gut y, dem sie den Wert 1 zuordnet. Aber es wäre falsch zu sagen, dass das Gut x viermal so nützlich ist, wie das Gut y. Die beiden folgenden Nutzenfunktionen beschreiben dementsprechend denselben Nutzen aus:

G	x	y	z
u	1	2	3

G	x	y	z
v	-1	2	7

Man nennt die so interpretierten Nutzenfunktionen auch *ordinale Nutzenfunktionen*. Zwei ordinale Nutzenfunktionen beschreiben genau dann denselben Nutzen, wenn sie sich durch „ordnungserhaltende Transformationen“ ineinander überführen lassen. Eine ordnungserhaltende oder auch „*ordinale Transformation*“ ist eine Transformation, die die Bedingung erfüllt:

$$t(a) > t(b) \quad \text{genau dann wenn} \quad a > b \quad \text{für alle} \quad a, c \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

[6]Ökonomen sprechen statt „Indifferenzklassen“ auch gerne von „Indifferenzkurven“. Die Indifferenzkurven erhält man, wenn man die Indifferenzklassen grafisch darstellt. Es im Grunde also um ein- und dasselbe.

wobei G die Gütermenge und $t : \{u(x)|x \in G\} \mapsto \mathbb{R}$ die Transformation der Nutzenskala u in eine andere Nutzenskala ist.

Mit Hilfe ordinaler Nutzenskalen lassen sich unsere Entscheidungstabellen (oder unsere Entscheidungsbäume) in einer noch einfacheren und übersichlicheren Form darstellen, indem wir die möglichen Resultate des Entscheidungsprozesse durch ihre Zahlenwerte einer (beliebigen) Nutzenskala repräsentieren.

Die Entscheidungstabellen sehen dann noch einmal etwas schematischer aus, z.B. so:

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	3	7	2	0
A_2	2	1	2	-1
A_3	4	6	5	0

Ein Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass sich Entscheidungsregeln besonders leicht anwenden lassen, da sich die Präferenzordnung unmittelbar an den Größe der Zahlen ablesen lässt. In diesem Beispiel kann man beinahe sofort „sehen“, dass die Entscheidung A_2 durch beide anderen Handlungsalternativen dominiert wird und damit sicherlich ausscheidet. Welche der verbleibenden Alternativen gewählt werden solte, lässt sich anhand der Dominanz allein nicht mehr entscheiden. Dafür benötigt man weitergehende Entscheidungsregeln, denen wir uns nun zuwenden.

3.3 Entscheidungsregeln auf Basis des der ordinalen Nutzens

Mit dem *ordinalen Nutzen* haben wir das Rüstzeug um einige einfache Entscheidungsregeln zu formulieren. Für kompliziertere Entscheidungsregeln benötigen wir stärkere Nutzenkonzepte, wie das der „Neumann-Morgensternschen Nutzenfunktion“, die weiter unten besprochen wird. Im folgenden werden wir mehrere unterschiedliche Entscheidungsregeln besprechen, die alle auf ihre Weise sinnvoll sind, deren Anwendung aber interessanterweise zu jeweils anderen Entscheidungsempfehlungen führt. Wenn diese Regeln aber jeweils unterschiedliche Entscheidungsempfehlungen nahelegen, dann liegt die Frage nahe, welche dieser Regeln denn nun eigentlich die „richtige“ Entscheidung empfiehlt. Dazu ist zu sagen, dass es im Bereich der „Entscheidungen unter Unwissen“ keine unter allen Umständen beste Regel gibt. Alle der in dieser und der nächsten Woche besprochenen Regeln haben ihre relative Berechtigung, je nach der Situation in der sich das Entscheidungsproblem stellt. Anders sieht die Sache erst aus, wenn wir Entscheidungen unter Risiko betrachten. Denn dort kann man zeigen, dass mit der

Erwartungsnutzenhypothese unter wenigen Einschränkungen in der Tat so etwas wie eine eindeutig beste Entscheidungregel vorhanden ist.

Bei den Entscheidungen unter Unwissenheit gibt es aber keine solche beste oder einzig richtige Regel. Daher stellt sich bei jeder der folgenden Regeln die Frage: Wann sollte man sie anwenden? Oder auch: Warum sollte man gerade diese Regel anwenden? Die Antwort auf diese Fragen muss zwangsläufig von der Situation und/oder von subjektiven Voraussetzungen wie Vorlieben oder Abneigungen abhängig sein. Denn gäbe es eine generelle Antwort, dann hätte man damit auch eine beste Regel.

3.3.1 Die Maximin-Regel

Die erste Entscheidungsregel, die wir besprechen wollen, ist die sogenannte *Maximin-Regel*, die besagt, dass man die Verluste minimieren soll, oder, was dasselbe ist, dass man das minimale Ergebnis maximieren soll. (Eben deshalb heißt sie „Maximin-Regel".) Mit Hilfe von Entscheidungstabellen[7] kann man die Regel folgendermaßen anwenden: Zunächst markiert man in jeder Zeile (also für jede Handlungsalternative) den kleinsten Nutzenwert. Und anschließend wählt man diejenige Handlung aus, bei der markierte Wert von allen am größten ist. Das sieht dann folgendermaßen aus:

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	3	4	7	1*
A_2	-6*	12	2	2
A_3	5	0*	3	1
A_4**	2*	4	3	2*
A_5	3	5	5	1*

Die nach der Maximin-Regel beste Entscheidung ist in diesem Fall also die Entscheidung A_4, weil das schlechteste mögliche Ergebnis bei dieser Entscheidung mit einer 2 bewertet ist, während es bei allen anderen Entscheidungen einen noch niedrigeren Wert hat. (Dass der Wert 2 dabei bei dieser Entscheidung zweimal vorkommt, schadet nicht.)

Führt diese Entscheidungsregel immer zu einem eindeutigen Ergebnis? Nicht unbedingt, denn es ist ja möglich dass das schlechteste mögliche Ergebnis mehrerer Handlungsalternativen den gleichen Nutzenwert hat. Wie sollte man nun vorgehen? Eine naheliegende Erweiterung der Maximin-Regel besagt, dass man in diesem Fall unter den verbleibenden Handlungsalternativen nach dem zweitschlechtesten Ergebnis auswählen soll, dann nach dem

[7]Wer möchte, sollte sich einmal überlegen, wie man diese Regel bei Entscheidungsbäumen anwendet.

drittschlechtesten usf. Diese Erweiterung der Maximin-Regel nennt man auch die *lexikalische Maximin-Regel*. Auf ein Beispiel angewandt, funktioniert das folgendermaßen:

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	2	4	1*	6
A_2	0*	3	12	7
A_3*	5	2*	3	4
A_4	2	-1*	7	1
A_5*	2*	6	4	5

Nach dem ersten Schritt bleiben also nur noch die Entscheidungen A_3 und A_5 übrig. Im zweiten Schritt reduzieren wir die Tabelle auf diese beiden Strategien und ignorieren das jeweils schlechteste Ergebnis, um uns nun nach dem zweitschlechtesten zu richten:

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_3	5	x	3*	4
A_5**	x	6	4*	5

Die besten Entscheidung nach der lexikalischen Minimax-Regel besteht also in der Wahl der Handlung A_5. (Und wenn selbst die lexikalische Minimax-Regel kein eindeutiges Ergebnis zu Tage fördert, dann ist es wirklich egal, welche der verbleibenden Handlungen man wählt, oder?)

Ein wesentliches Problem der lexikalischen Maximin-Regel besteht darin, dass sie dominierte Alternativen nicht immer ausschließt. Man betrachte dazu folgende Tabelle:

	S_1	S_2	S_3
A_1	-1	2	100
A_2	-1	-1	3

In diesem Fall wird die Handlung A_2 durch die Handlung A_1 dominiert. Sie ist also unter allen Umständen schlechter als die Handlung A_1. Geht man nach der lexikalischen Maximin-Regel vor, so würde man im ersten Schritt keine Entscheidung treffen können, weil für beide Handlungsalternativen das minimale Resultat mit -1 gleichgroß ist. Streicht (oder ignoriert) man im nächsten die schlechtesten Resultate, um sich nach den zweitschlechtesten zu richten, so müsste man die dominierte Handlung A_2 wählen, da der zweitschlechteste Wert von A_2 (u=3) größer ist als der zweitschlechteste Wert von A_1 (u=2)!

Man kann dem Problem dadurch begegnen, dass man festlegt, dass der schlechteste Wert, sofern er in einer Zeile mehrmals vorkommt, nur einmal gestrichen werden sollte. In welcher Spalte er gestrichen wird wäre in dem Fall sogar gleichgültig, da man auch in der Folge die Werte ja niemals spaltenweise, sondern immer nur die jeweils schlechtesten Werte jeder Zeile miteinander vergleicht. Zudem wäre die Streichung nur eines Wertes dadurch motiviert, dass ein häufigeres Vorkommen des schlechtesten Wertes gegenüber einem nur einfachen Vorkommen als Nachteil einer Handlungsalternative aufgefasst werden sollte.

Eine andere Möglichkeit, dass Problem zu lösen, besteht darin, die lexikalische Maximin-Regel mit der Dominanz-Regel dergestalt zu kombinieren, dass man in jedem Schritt als erstes alle dominierten Handlungsalternativen streicht und dann die Maximin-Regel anwendet. Das Auftreten des oben beschrieben „Problems“ ist so unmöglich gemacht, denn entweder gab es (in einem gegebenen Anwendungsschritt) das Problem nicht, weil keine Handlungsalternative dominiert wurde, oder die dominierten Handlungsalternativen werden gestrichen, so dass das Problem nicht mehr vorhanden ist, sobald die Maximin-Regel angewendet wird.

In welchen Situationen bietet sich die Verwendung die Minimax-Regel an? Sicherlich wird man dann auf diese Regel zurückgreifen, wenn es bei irgendeiner Entscheidungssituation vor allem darum geht, Schäden zu vermeiden, also z.B. wenn Leib und Leben in Gefahr geraten könnten. Ein sehr berühmtes Beispiel für die Anwendung der Maximin-Regel in der Philosophie hat John Rawls geliefert, der in seiner „Theorie der Gerechtigkeit“ fordert, dass man die Gerechtigkeit der Gesellschaftordnung nach dem Maximin-Prinzip beurteilen soll: Diejenige Gesellschaftsordnung ist die Gerechteste, in der es den am schlechtesten Gestellten im Vergleich zu allen anderen möglichen (und, so eine weitere Forderung von Rawls, *freien*) Gesellschaftsordnungen am Besten geht. Damit setzt sich Rawls bewusst vom Utilitarismus ab, der bekanntlich fordert, den Gesamtnutzen aller zu maximieren. Wir werden in der nächsten Vorlesungsstunde auf diese Diskussion noch ausführlicher eingehen.

3.3.2 Die Maximax-Regel

Wenn es eine Maximin-Regel gibt, dann, so sollte man meinen, müsste es auch so etwas wie eine *Maximax-Regel* geben. In der Tat lässt sich auch eine Maximax-Regel formulieren. Nach der Maximax-Regel sollte diejenige Handlung gewählt werden, bei der der maximale Erfolg am größten ist. Diese Regel ist eher etwas für ausgeprägte Optimisten oder sehr risikobereite Menschen oder für Situationen, in denen es eher darauf ankommt, Kühnheit und Sportsgeist zu zeigen als Vorsicht und Besonnenheit. Analog zur lexikalischen Minimax-Regel lässt sich auch eine lexikalische Maximax-Regel bilden. Da das Lösungsverfahren ganz ähnlich funktioniert, können wir uns Beispiele dafür ersparen.

3.3.3 Die Rangordnungsregel

Wie würde man die Lösung zu beurteilen haben, die die Maximin-Regel für folgendes Beispiel liefert:

	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_{100}
A_1	0	2	2	$\cdots$	2
A_2	1	1	1	$\cdots$	1

Nach der Minimax-Regel müsste man A_2 wählen. Das bedeutet aber, man zieht A_2 der Handlung A_1 vor, obwohl von 100 Fällen A_2 nur in einem einzigen nicht schlechter ist als A_1. Das könnte – je nach Situation – wenig sinvoll erscheinen und verdeutlicht, dass die Eigenschaft der Minimax-Regel jeweils nur ein einzelnes Spaltenelement in die Prüfung einzubeziehen unter Umständen eine Schwäche sein kann. Könnte man eine Regel formulieren, die dieser Schwierigkeit entgeht?

Denkbar wäre z.B. folgende Regel: Man bestimme für jedes Element innerhalb jeder Zeile, welchen Rang es innerhalb seiner Spalte hat. Dann summiere man die gefundenen Werte zeilenweise auf und wähle die Handlung, deren Zeile die kleinste Summe hat. (Bei dieser Regel bestimmen wir erst den Rang statt unmittelbar mit den Zahlen in der Tabelle zu rechnen, weil es wenig Sinn hat mit ordinalen Nutzenwerten zu rechnen, die ja nur dazu dienen sollen, eine Rangfolge wiederzugeben.) Nach diesem Verfahren würde die Handlung A_1 eine Rangzahl von 101 erhalten, da ihr Ergebnis in 99 von hundert möglichen Fällen auf den ersten Rang kommt und in einem Fall auf den zweiten. Die Handlung A_2 würde eine Rangzahl von 199 erhalten $(1 \cdot 1 + 99 \cdot 2)$. Damit müsste nach dieser Regel A_1 gewählt werden.

Natürlich ist auch die Rangordnungsregel nicht vollkommen. So kann es Fälle geben, in denen die Rangzahlen mehrerer oder gar aller Handlungsalternativen genau gleich sind. Aber in diesen Fällen kann man dann immer noch unbedenklich auf die Maximin-Regel zurückgreifen, da dann praktisch ausgeschlossen ist, dass es sich um eine für die Maximin-Regel problematische Situation wie die in der Tabelle weiter oben dargestellte handelt.

Mit der Maximin-, der Maximax- und der Rangordnungsregel haben wir drei Entscheidungsregeln vorgestellt, die sich bei Entscheidungen unter Unwissen und bei bloß ordinalen Nutzenwerten anwenden lassen, wobei die wichtigste dieser Regeln die Maximin-Regel ist. Stellt sich die Frage: Könnte es noch weitere Regeln für diese Art von Entscheidungsproblemen geben?

Das ist allerdings anzunehmen. Vielleicht fällt Ihnen selbst eine weitere Regel ein. Dabei ist zu beachten, dass eine gute Entscheidungsregel folgenden Bedingungen genügen muss:

1. Sie muss stabil bezüglich ordinaler Transformationen der Nutzenwerte sein, d.h. wenn man die Nutzenwerte in der Entscheidungstabelle durch ordinal transformierte ersetzt, sollte die Entscheidungsregel immer noch dieselbe Entscheidung empfehlen.

2. Es sollte irgendwelche plausiblen Gründe geben, die für diese Entscheidungsregel sprechen, z.B. besondere Entscheidungssituationen, in denen sie intuitiv sinnvoll erscheint.

3. Es sollte möglichst wenig Gegenbeispiele in Form von denkbaren Entscheidungsproblemen geben, bei denen die Anwendung der Regel abwegig erscheint.

3.4 Entscheidungsregeln auf Basis kardinalen Nutzens

3.4.1 Die Minimax-Bedauerns-Regel

Von den zuvor besprochenen Entscheidungsregeln ist die Maximin-Regel wahrscheinlich die einleuchtendste und sinnvollste, aber wir haben auch schon ein Beispiel kennen gelernt, bei dem ihre Anwendung möglicherweise nicht sinnvoll wäre und man kann weitere Beispiele konstruieren, bei denen das noch deutlicher der Fall ist, z.B. das folgende:

	S_1	S_2
A_1	€ 1,25	€ 1,50
A_2	€ 1,00	€ 50.000

Nach der Maximin-Regel müsste die Entscheidung zugunsten der Handlung A_1 ausfallen. Aber ist es sinnvoll, sich die Chance auf € 50.000 entgehen zu lassen, nur um einen möglichen Verlust von 25 Cent zu vermeiden? Wenn man nicht gerade eine Geschichte erfindet, bei der von diesen 25 Cent Leben und Tod abhängen, erscheint das mehr als zweifelhaft. Um Situationen wie dieser gerecht zu werden, gibt es eine Regel, die darauf zielt, „verpasste Chancen" zu vermeiden. Diese Regel ist die *Minimax-Bedauerns-Regel* (wohlbemerkt: diesmal heißt es „Minimax" nicht „Maximin"!). Bei dieser Regel leitet man von der ursprünglichen Tabelle zunächst eine Bedauernstabelle ab, die für jede Entscheidung und jedes möglicherweise eintretende Ereignis (bzw. jeden möglichen Weltzustand) die Größe der verpassten Chance beziffert.

Dann wählt man diejenige Entscheidung aus, bei der die größtmögliche verpasste Chance am kleinsten ist. Die Einträge in der Bedauernstabelle erhält man, indem man jeden Wert in der Tabelle vom Maximalwert derselben Spalte abzieht. Für das Beispiel von eben, würde die Bedauernstabelle dann folgendermaßen aussehen:

	S_1	S_2
A_1	€ 0	€ 49.998,50
A_2	€ 0,25	€ 0

Das maximale Bedauern für die Handlung A_1 würde also mit € 49.998,50 zu beziffern sein, während man bei der Wahl von A_2 schlimmstenfalls ein Verlust von 25 Cent verschmerzt werden müsste. Um das maximale Bedauern zu minimieren, muss nach der Minimax-Bedauernsregel also die Handlung A_2 gewählt werden.

Ähnlich wie die die Maximin-Regel kann man die Minimax-Bedauernsregel auch *lexikalisch* mehrfach hintereinander anwenden, wenn nicht gleich bei der ersten Anwendung eine eindeutige Entscheidung getroffen werden kann.

An dieser Stelle könnte jedoch ein Einwand erhoben werden: Beim Übergang von der Entscheidungstabelle zur Bedauernstabelle haben wir bestimmte Einträge in der Tabelle voneinander subtrahiert. Da es sich um Geldbeträge handelte, war das denkbar unproblematisch, denn jeder wird zugeben, dass man mit Geldbeträgen rechnen kann, und dass man sinnvollerweise davon sprechen kann dass € 3 dreimal so viel Wert sind wie € 1. Aber was ist, wenn wir es nicht mit Geldbeträgen, sondern wie zuvor mit ordinalen Nutzenwerten zu tun. Den vergleichsweise voraussetzungsarmen Begriff des ordinalen Nutzens haben wir ja gerade deshalb eingeführt, weil man mit anderen Werten als Geldbeträgen nicht unbedingt Rechnungen durchführen kann, selbst wenn sich die Größe des Wertes noch unterscheiden lässt. (Beispiel: Die meisten Menschen würden wohl zustimmen, dass Bier und Würstchen leckerer sind als Brot und Wasser, aber es wäre Unsinn zu sagen, sie sind genau dreimal so lecker.) Wenn wir eine Bedauernstabelle mit ordinalen Nutzenwerten berechnen würden, dann würde sich das Ergebnis, das bei der Anwendung der Minimax-Bedauerns-Regel herauskäme ändern, wenn wir die Nutzenwerte durch ordinal transformierte Nutzenwerte ersetzen (als Übungsaufgabe können Sie einmal ein Beispiel dafür konstruieren), was bei einer robusten Entscheidungsregel nicht vorkommen dürfte. Daher müssen wir entweder auf die Anwendung der Minimax-Bedauerns-Regel verzichten, oder wir dürfen sie nur dort anwenden, wo wir einen stärkeren Nutzenbegriff vorausetzen dürfen, wie er z.B. implizit den in den vorhergehenden

Beispielen verwendeten Geldwerten zu Grunde liegt. Der schwächstmögliche stärkere Nutzenbegriff (stärker im Vergleich zum ordinalen Nutzen), der es uns erlaubt die Minimax-Bedauerns-Regel anzuwenden, ist der Begriff des Neumann-Morgensternschen Nutzens. Was es damit auf sich hat, werden wir uns nächste Woche anschauen.

Zum Schluss ist allerdings noch auf eine besondere Eigenschaft der Minimax-Bedauerns-Regel hinzuweisen, die unter Umständen auch als ein Einwand gegen diese Regel begriffen werden kann: Die Minimax-Bedauerns-Regel verletzt nämlich das Prinzip der *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.* Fügt man den bestehenden Handlungsalternativen eine Handlungsalternative hinzu, so kann das selbst dann zu einer Änderung der Entscheidung führen, wenn die neu hinzugefügte Alternative nach der Minimax-Bedauerns-Regel sowieso nicht gewählt werden würde. Beispiel:

Entscheidungstabelle

A_1	0	10	4
A_2	5	2	10

„Bedauerns"-tabelle

A_1	5	0	6
A_2	0	8	0

A_1	0	10	4
A_2	5	2	10
A_3	10	5	1

A_1	10	0	6
A_2	5	8	0
A_3	0	5	9

Quelle: Michael D. Resnik: Choices. An Introduction to Decision Theory, Minnesota 2000, S. 31.

Die Alternative A3 ist in diesem Beispiel irrelevant in dem Sinne, dass sie nach der Minimax-Bedauerns-Regel nicht gewählt wird. Dennoch übt ihre Präsenz einen Einfluss darauf aus, welche der beiden anderen Handlungsalternativen nach der Minimax-Bedauerns-Regel gewählt wird. Ist die „irrelevante" Alternative A3 abwesend, so ist die Handlung A1 nach der Minimax-Bedauerns-Regel die beste Handlung. Fügt man die Alternative A3 hinzu, so ist A2 die beste Handlung.

Sollte man die Abhängigkeit von „irrelevanten" Alternativen als eine Schwäche der Minimax-Bedauerns-Regel ansehen? Das hängt wiederum sehr davon ab, in welchem Zusammenhang die Entscheidungsregel angewandt wird. Resnik erzählt dazu in etwa die folgende Geschichte ([23, S. 40]): Stellen Sie sich vor, Sie sitzen in einem Restaurant und überlegen, ob Sie lieber ein Steak oder ein vegetarisches Gericht bestellen wollen. Eigentlich mögen Sie lieber Steak, aber da das Restaurant einen etwas heruntergekommenen Eindruck macht, haben Sie wegen der Fleischzubereitung so ihre Bedenken und tendieren eher zu einer vegetarischen Speise. Nun erzählt Ihnen die Dame vom Nebentisch, dass sie gerade ein vorzügliches Schnitzel gegessen hat. Sie selbst – nehmen wir an – mögen zwar kein Schnitzel, aber obwohl diese Alternative für Sie „irrelevant“ ist, wissen Sie nun, dass Sie der Fleischzubereitung in diesem Restaurant vertrauen können, und bestellen doch das Steak.

Wie man sieht können Alternativen, die im technischen Sinne der Entscheidungstheorie „irrelevant“ genannt werden (was eigentlich nur heisst, dass sie nicht gewählt werden!), auf Grund der Informationen, die ihr Vorhandensein vermittelt, sehr wohl relevant sein. Insofern muss die Abhängigkeit von „irrelevanten“ Alternativen kein Problem darstellen. Aber es gibt andere Situationen, wo das durchaus der Fall sein kann, etwa bei Wahlen oder Abstimmungen, deren Ergebnis unter Umständen dadurch manipuliert werden kann, dass man weitere, scheinbar irrelevante Alternativen zur Abstimmung stellt. (Eine Geschichte dazu könnte wie folgt beginnen: „Stellen Sie sich vor, Sie sind Mitglied der Studentenvertretung und nehmen an der Abstimmung über die Verwendung der Studiengebühren teil. Sie wissen, dass der von Ihnen gemachte Vorschlag wahrscheinlich überstimmt werden wird. Daher bringen Sie noch einen weiteren Vorschlag ein, von dem zwar niemand glaubt, dass er auch nur eine Stimme erhält, aber...“) Wie sich dieses Problem im Zusammenhang mit Abstimmungen genau darstellt, werden wir in einer späteren Vorlesung noch besprechen.

3.5 Aufgaben 2 (22. April)

1. Sei u(x) eine Nutzenskala, die eine Präferenzordnung wiedergibt. Dann gilt: a) $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y$ und b) $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$. *Beweise*: Beide Bedingungen gelten auch für die transformierte Nutzenskala t(u(x)), sofern t der Bedinung für *ordinale Transformationen* genügt: $t(a) > t(b) \Leftrightarrow a > b$ und $t(a) = t(b) \Leftrightarrow a = b$ für alle a,b auf der Nutzenskala u.

2. Welche Handlungen sollten bei den beiden folgenden Entscheidungs-Tabellen nach der lexikalischen Maximin-Regel gewählt werden:

Tabelle 1:

A_1	1	-3	5	6
A_2	2	2	3	3
A_3	4	6	-10	6

Tabelle 2:

A_1	0	1	1	3
A_2	0	4	2	3
A_3	3	0	0	1

Quelle: Michael D. Resnik: Choices. An Introduction to Decision Theory, Minnesota 2000, S. 27.

3. In der Vorlesung wurde die Präferenzrelation genaugenommen durch zwei Relationen, nämlich durch die Relation der strikten Präferenz $\succ$ und die Relation der Indifferenz $\sim$ eingeführt. Zeigen Sie, dass man auch mit einer einzigen Relation, der schwachen Präferenz $\succeq$ auskommen kann. Geben Sie dazu geeignete Axiome für die Relation $\succeq$ an. Definieren Sie dann, die Relationen $\succ$ und $\sim$ durch die Relation $\succeq$ und zeigen Sie anschließend, dass für die so definierten Relationen $\succ$ und $\sim$ die für sie in der Vorlesung angegeben Axiome gelten.

4. Ein Gremium von 5 Personen wird zufällig aus einer Gruppe von 5 Männern und 10 Frauen besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gremium aus 2 Männern und 3 Frauen besteht? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gremium nur aus Frauen besteht?

4 Entscheidungen unter Unwissenheit II

In dieser Woche werden wir den Begriff des kardinalen Nutzen bzw. des Neumann-Morgensternschen Nutzens einführen und einige weitere Entscheidungsregeln kennen lernen, die auf diesem Nutzenkonzept beruhen. Weiterhin werden wir einige Einwände bzw. Probleme der Entscheidungsregeln besprechen. Schließlich wollen wir am Beispiel der utilitaristischen Kritik des Gerechtigkeitskonzepts von John Rawls darlegen, wie die Entscheidungstheorie bei der Diskussion von Gerechtigkeitsfragen ins Spiel kommen kann.

4.1 Kardinaler Nutzen

In der letzten Woche wurde als eine mögliche Entscheidungsregel die „Minimax-Bedauerns-Regel“ beschrieben, deren ratio darin beteht, eine solche Entscheidung zu wählen, bei der der maximal mögliche Verlust (je nach eintretenden Zufallsereignissen) minimiert wird. Da wir diese Regel auf ein Beispiel mit Geldwerten angewendet haben, konnten wir die Verluste relativ bedenkenlos als die Differenz zwischen entgangenem Gewinn und erhaltenem Gewinn bestimmen. Aber wie sollen wir eine solche Regel wie die „Minimax-Bedauerns-Regel“ anwenden, wenn die (möglichen) Ergebnisse eines Entscheidungsproblems keine Geldwerte darstellen? Die Ihnen zugeordneten Nutzenwerte spiegeln dann – nach dem Konzept des *ordinalen Nutzens* – nur eine Rangordnung zwischen den möglichen Ergebnissen des Entscheidungsprozesses entsprechend den Präferenzen wieder. Das Ergebnis der Anwendung einer Entscheidungsregel sollte also auch nur von der Rangordnung der Nutzenwerte nicht aber von den – solange die Ordnung erhalten bleibt – willkürlich wählbaren Zahlenwerten abhängen, die diese Ordnung auf einer Nutzenskala wiedergeben. Betrachten wir als Beispiel einmal folgende beiden Nutzenskalen, die den Ergebnissen x, y, z jeweils einen bestimmten Nutzen zuordnen. (x, y und z sollen dabei irgendwelche möglichen Resultate irgendeines Entscheidungsprozesses sein, z.B. könnten sie für die Resultate *frustriert*, *gelangweilt*, *erfreut* aus dem Beispiel auf Seite 13 stehen.)

Nutzenskala **u()**

x	y	z
1	2	3

Nutzenskala **v()**

x	y	z
1	4	9

Beide Skalen geben offenbar denselben ordinalen Nutzen wieder, da $u(z) > u(y) > u(x)$ und ebenso $v(z) > v(y) > v(x)$. Betrachtet man allerdings die Differenzen, so fällt auf, dass $u(z) - u(y) = u(y) - u(x)$, während $v(z) - v(y) > v(y) - v(x)$. Würden diese Nutzenwerte bei einem Entscheidungsproblem auftauchen, so könnte es geschehen, dass man bei Anwendung der Minimax-Bedauernsregel je nachdem, ob man die Nutzenfunktion u oder die Nutzenfunktion v zur Darstellung der Präferenzen heranzieht, zu einer anderen Entscheidungsempfehlung kommt. Genau das dürfte aber nicht geschehen, da u und v nur unterschiedliche Darstellungen desselben *ordinalen* Nutzens sind. Welche Auswege könnte man sich aus dieser misslichen Situation denken:

1. Angesichts des Beispiels (Seite 36), mit dem wir die Minimax-Bedauernsregel eingeführt haben, könnte man auf die naheliegende Idee verfallen, dass man diese Regel nur in solchen Fällen anwenden kann, in denen die Ergebnisse des Entscheidungsprozesses monetäre Auszahlungen sind. Das hätte allerdings zwei Nachteile: 1) Die Anwendbarkeit der Regel würde dabei auf eine vergleichsweise kleine Menge von Entscheidungsproblemen eingeschränkt. 2) In vielen Situationen, in denen in irgendeiner Form monetäre Auszahlungen vorkommen, geben die monetären Auszahlungen nicht unmittelbar den damit assoziierten Nutzen wieder. Entscheidungsleitend ist jedoch immer der Nutzen (bzw. sollte es sein!). Beispiel: 2.000 € sind doppelt so viel Geld wie 1.000 €. Aber der zusätzliche Nutzen, den man von 2.000 € Monatsgehalt gegenüber 1.000 € Monatsgehalt gewinnt, ist sicherlich geringer als der zusätzliche Nutzen von 1.000 € gegenüber 0 € Gehalt.

2. Eine andere Alternative wäre die Aufstellung einer *qualitativen Bedauernstabelle*. Dazu müsste man zunächst einmal die *Differenzergebnisse* bestimmen, worunter man zusammengesetzte Ergebnisse aus einem nicht eingetretenen und einem statt dessen eingetretenen Ergebnis verstehen kann. (In dem Beispiel des Küstenbesuchers aus der ersten Vorlesung (Seite 13), in dem die möglichen Resultate *frustriert*, *gelangweilt*, *erfreut* waren, würden sich daraus die Differenzereignisse *frustriert statt bloß gelangweilt*, *gelangweilt statt erfreut* und *frustriert statt erfreut* ergeben.) Weiterhin müsste man ein neutrales Differenzereignis definieren, welches die Stelle der 0 in der aus Nutzenwerten gewonnen Bedauernstabelle einnimmt. Dieses neutrale Differenzergebnis könnte man z.B. als „Unter gegebenen Umständen so gut wie möglich“ bezeichnen oder ähnlich. Schließlich müsste man die Präferenzen bezüglich der Differenzergebnisse bestimmten, denen man dann eine neue ordinale Nutzenfunktion zuweisen könnte. Die Bestimmung des minimalen größten Bedauerns erfolgt wie zuvor beschrieben (Siehe Abschnitt 3.4.1). Der Nachteil dieses Vorgehens besteht erstens darin, dass die Präferenzordnung für eine weitere Ergebnismenge, nämlich die Menge der Differenzergebnisse, bestimmt werden muss, und zweit-

ens darin, dass sich dieses Verfahren tatsächlich nur auf die Minimax-Bedauerns-Regel anwenden lässt, nicht mehr aber auf die meisten weiteren Entscheidungsregeln, die wir gleich noch kennen lernen werden. In den Fällen aber, in denen wir nicht die gleich zu besprechende Neuman-Morgensternsche Nutzenfunktion bilden können (d.h. in den Fällen, in denen wir aus empirisch-sachlichen Gründen höchstens einen *ordinalen* Nutzen voraussetzen dürfen) bleibt die Bildung einer qualitativen Bedauernstabelle die einzige Alternative.

3. Schließlich kann man versuchen, ein „stärkeres" Nutzenkonzept als das des ordinalen Nutzens zu Grunde zu legen. Bei einem solchen Nutzenkonzept müsste nicht nur die Ordnung der Nutzenwerte unter einer Transformation erhalten bleiben sondern mindestens auch die Ordnung beliebiger Differenzen von Nutzenwerten. Stärker ist ein solches Nutzenkonzept in dem Sinne, dass die Nutzenwerte dann mehr Informationen enthalten als nur die Information über die Ordnung der Präferenzen. Das bedeutet aber auch, dass ein solches Nutzenkonzept empirisch schwerer zu rechtfertigen ist, und dass der empirische Anwendungsbereich eines solches Nutzenkonzepts kleiner sein wird als der des ordinalen Nutzens. Um die Ordnung der Differenzen zu erhalten, ist es aber andererseits noch längst nicht erforderlich, den konkreten Zahlenwerten der Nutzenfunktion eine eindeutige Interpretation zu geben, wie dies bei der Zuweisung von Geldwerten der Fall wäre. Gesucht ist also ein möglichst schwaches (und damit empirisch immer noch *möglichst* breit anwendbares) Nutzenkonzept, das aber stärker ist als das des Ordinalen Nutzens. Ein solches Nutzenkonzept ist das des *kardinalen* bzw. des *Neumann-Morgensternschen Nutzens*.

Das, was wir eben eher intuitiv die „Stärke" eines Nutzenkonzepts genannt haben, ist dadurch bestimmt, unter welcher Art von Transformationen man zwei Nutzenfunktionen als *äquivalent*, d.h. denselben Nutzen ausdrückend, betrachtet. (Man kann es also nicht den Nutzenfunktionen also solchen ansehen, ob sie einen ordinalen oder kardinalen Nutzen ausdrückt. Sondern erst durch den Vergleich von Nutzenfunktionen und der Festlegung der Bedingungen ihrer Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz wird dies bestimmt.) Beim *ordinalen Nutzen* wurden alle Nutzenfunktionen als äquivalent betrachtet, die durch „ordnungserhaltende" Transformationen ineinander überführt werden können. „Ordnungserhaltend" sind alle streng monoton steigenden Abbildungen. Der *kardinale Nutzen* ist nun dadurch definiert, dass zwei Nutzenfunktionen als äquivalent betrachtet werden, wenn man sie durch *positive lineare Transformationen* ineinander überführen kann. Positive lineare Transformationen sind alle Transformationen der Form:

$$u(x) = ax + b, \qquad a > 0$$

Man betrachte unter diesem Gesichtspunkt einmal die folgenden, in Tabellen dargestellten Nutzenfunktionen:

$$\mathbf{u()} \begin{array}{c|c|c} \text{x} & \text{y} & \text{z} \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad \mathbf{v()} \begin{array}{c|c|c} \text{x} & \text{y} & \text{z} \\ \hline 1 & 4 & 9 \end{array} \qquad \mathbf{w()} \begin{array}{c|c|c|} \text{x} & \text{y} & \text{z} \\ \hline 1 & 3 & 5 \end{array}$$

Alle drei Nutzenfunktionen geben denselben ordinalen Nutzen wieder, aber nur die Funktionen u und w geben denselben kardinalen Nutzen wieder, da $w(x) = 2u(x) - 1$. Weiterhin kann man sich leicht überlegen, dass zwei Nutzenfunktionen, die denselben kardinalen Nutzen darstellen, immer auch denselben ordinalen Nutzen repräsentieren, denn positive lineare Transformationen sind immer auch ordnungserhaltende Transformationen. Umgekehrt gilt dasselbe aber nicht, wie die Tabelle oben zeigt. Kardinale Nutzenskalen sind „feinkörniger" als ordinale Nutzenskalen. Und sie erhalten, wie erwünscht nicht nur die Ordnung der Nutzenwerte sondern auch die Ordnung der Differenzen von Nutzenwerten, denn seien $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ beliebige Nutzenwerte und sei $u(x) = ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ eine positive lineare Transformation, dann:

$$\begin{array}{rcl} x - y & > & z - w \\ a(x-y) & > & a(z-w) \\ a(x-y) + b - b & > & a(z-w) + b - b \\ (ax+b) - (ay+b) & > & (az+b) - (aw+b) \\ u(x) - u(y) & > & u(z) - u(w) \end{array}$$

Dasselbe gilt, wenn man statt des Ungleichheitszeichens ein Gleichheitszeichen einsetzt, womit der Erhalt der Ordnung von Nutzendifferenzen unter positiv linearer Transformation bewiesen ist. Positive lineare Transformationen haben darüber hinaus die Eigenschaft, dass sie nicht bloß die Ordnung der Differenzen von Nutzenwerten erhalten, sondern auch die Quotienten der Differenzen:

$$\frac{u(x) - u(y)}{u(z) - u(w)} = \frac{(ax+b) - (ay+b)}{(az+b) - (aw+b)} = \frac{a(x-y) + b - b}{a(z-w) + b - b} = \frac{x - y}{z - w}$$

Diese Eigenschaft wird später noch für uns wichtig werden wird. Erfüllt eine Skala, wie in diesem Fall die kardinale Nutzenskala, diese Eigenschaft, so nennt man sie auch eine *Intervallskala*. Zur besseren Übersicht sollen im folgenden kurz einige der wichtigsten Skalentypen aufgelistet werden, die in der Wissenschaft von Bedeutung sind.

4.1.1 Exkurs: Skalentypen

Skalen dienen dazu abgestufte Größen darzustellen. Nun gibt es unterschiedliche Grade, in denen irgendwelche Größen abgestuft sein können. (Mit dem ordinalen und dem kardinalen Nutzen haben wir schon zwei unterschiedliche Abstufungsgrade kennen gelernt.) Diese unterschiedlichen Abstufungsgrade spiegeln sich in den verschiedenen Skalentypen wieder. Die Skalentypen sind dabei von gröberen zu immer feineren Skalentypen geordnet. (Vgl. zum folgenden [24, S. 73ff.])

Das gröbste bzw. „niedrigste" Skalenniveau, das man sich vorstellen kann, ist das einer **Nominalskala**. Bei einer Nominalskala wird die gegebene Größe lediglich in eine von mehreren begrifflichen Kategorien eingordnet, ohne dass zwischen diesen Kategorien eine Ordnung des Mehr- und Weniger besteht. Man spricht deshalb auch von „Kategorienskalen" oder von „qualitativ-klassifikatorischen Begriffen". Ein Beispiel wäre etwa die Zuordnung von Wirtschaftsunternehmen zu unterschiedlichen Wirtschaftssektoren wie Landwirtschaft, Handel und Industrie, Dienstleistung. Die einzigen Bedinungen, denen eine Nominalskala genügen muss, bestehen darin, dass die Kategorien 1. *disjunkt* (kein Gegenstand kann unter mehr als eine Kategorie gleichzeitig fallen) und 2. *exhaustativ* (jeder Gegenstand kann in mindestens eine Kategorie eingeordnet werden) sein müssen. Eine wie auch immer geartete Ordnungsbeziehung muss zwischen den Kategorien aber nicht bestehen. (Man kann ja auch z.B. kaum sinnvollerweise sagen, dass Dienstleistung „mehr" oder „größer" ist als Landwirtschaft.)

Das nächsthöhere Skalenniveau stellt die **Ordinalskala** (auch „Rangskala") dar. Im Gegensatz zur Nominalskala werden hier die Merkmale bzw. die Objekte des Gegenstandsbereichs in „Ranggruppen" eingeteilt, zwischen denen eine Höher- und Niedriger-Beziehung besteht. (Für die präzise Definition einer solchen *Quasi-Ordnungs*-Beziehung siehe Seite 26) Außer dem nun schon bekannten ordinalen Nutzen, wäre ein weiteres Beispiel die Mohs-Skala aus der Mineralogie, bei der die Härte von Mineralien danach geordnet wird, welches Mineral welche anderen „ritzt" [24, S. 75].

Auf die Ordinalskala folgt in der Rangfolge die **Intervallskala**. Intervallskalen verfügen über eine mehr oder weniger willkürlich gewählte Maßeinheit. Weder die Maßeinheit selbst noch der Nullpunkt einer Intervallskala sind in irgendeiner Weise durch den Gegenstandsbereich festgelegt. Voraussetzung ist jedoch, dass die auf einer Intervallskala abgebildete größe empirisch messbar ist. Die Maßeinheit erlaubt es dann, Differenzen und Quotienten von Differenzen der gemessenen Größe zu vergleichen. Beispiele sind denn auch Orts- und Zeitmessungen, denn ob man das Jahr 0 auf Christi Geburt oder auf den Zeitpunkt der Auswanderung Mohammeds nach Medina verlegt, ist eine Sache bloßer Konvention, genauso wie es eine Konvention ist, dass der Nullmeridian in Greenwich liegt. Trotzdem kann man Zeit- und Ortsdiffernzen sowie Quotienten von Differenzen vergleichen (eine Stunde ist solange wie jede andere und drei Stunden sind dreimal solange wie eine Stunde).

Die **Verhältnisskala** schießlich unterscheidet sich von der Intervallskala dadurch, dass nur noch die Maßeinheit willkürlich festgelegt ist, der Nullpunkt aber durch die Wirklichkeit vorgegeben ist. Beispiele dafür sind etwa Gewichtsskalen oder auch die Temperaturskala nach Kelvin, die den Nullpunkt auf den „absoluten Nullpunkt“ bei 273,15 Grad Celsius verlegt. Auch Geldwerten liegt eine Verhältnisskala zu Grunde, denn der Nullpunkt (d.h. wenn jemand gar kein Geld hat) ist ja in naheliegender Weise vorgegeben.

Schließlich kann man von allen vorhergehenden Skalen noch die **Absolutskala** unterscheiden, bei der man verlangen müsste, dass auch die Maßeinheit selbst noch eine zwingende empirische Interpretation hat. Dergleichen ist aber im Grunde nur bei einfachen Zählskalen der Fall. Wenn man also z.B. von „drei Äpfeln“ spricht, dann hat die Zahl drei dabei einen ganz bestimmten empirischen Sinn und es ist nicht eine Frage der Konvention ob man drei oder zwei sagt, wie es eine Frage der Konvention ist, ob man eine Länge in Meter oder Fuß angibt.

Insgesamt ergibt sich also eine Abfolge von fünf Skalentypen:

$$\text{Nominalskala} < \text{Ordinalskala} < \text{Intervallskala} < \text{Verhältnisskala} < \text{Absolutskala}$$

Im Anschluss an diese Auflistung von Skalentypen stellen sich zwei naheliegende Fragen: Erstens: Sind das alle Skalentypen, die es gibt? Und zweitens: Wonach richtet sich, welchen Skalentyp man verwenden kann oder soll?

Was die erste Frage betrifft, so sind die aufgeführten Skalentypen natürlich längst nicht alle denkbaren Skalentypen. Einmal könnte man die Abfolge von Skalentypen sehr wohl noch weiter verfeinern. Dann gibt es, was noch wichtiger ist, neben den hier aufgeführten eindimensionalen Skalen auch mehrdimensionale Skalen. Zu diesen zählen beispielsweise Farbskalen bzw. Farbräume. Im RGB-Farbraum etwa wird jede Farbe durch ein 3-tupel des Rot-, Grün- und Blauwertes angegeben, aus denen die Farbe nach dem Prinzip der additiven Mischung zusammengesetzt ist.

Was die zweite Frage betrifft, so richtet sich die Verwendung eines bestimmten Skalentyps nach den empirischen Eigenschaften der auf der Skala abgebildeten Größe und nach den vorhandenen Messmethoden. So kann man die Länge deshalb auf einer Intervallskala messen, weil wir mit dem „Urmeter“ über einen entsprechenden Vergleichsmaßstab verfügen. Bei der Härtemessung von Materialen nach der Mohs-Skala gibt es keinen solchen Vergleichsmaßstab, so dass sie auch nicht auf einer Intervallskala, sondern nur auf einer Ordinalskala angegeben werden kann.

Besonders schwierig gestaltet sich die Suche nach geeigneten Messmethoden und damit die „Metrisierung“ (d.h. die Überführung von komparativer Begriffe in quantitative mittels geeigneter Messmethoden) in den Sozialwissenschaften. Denn während die verschiedenen Zahlenmengen von den natürlichen Zahlen bis hin zu den komplexen Zahlen geradezu dafür geschaffen scheinen, die Zusammenhänge auszudrücken, die die Naturwissenschaften untersuchen (dazu sehr eindrucksvoll [21, S. 51ff.]), weshalb man in diesem Bereich recht eigentlich sagen darf, dass die Mathematik die Sprache der Natur ist, lassen sich mathematische Gesetze für die Sozialwissenschaften vielfach nur unter erheblicher Strapazierung der Begriffe einspannen. Diese Schwierigkeiten begegnen uns auch beim Präferenzbegriff, denn während man die Annahme, dass es ordinale Präferenzen (soll heißen: Präferenz, die durch ordinale Nutzenfunktionen beschrieben werden können) gibt, noch einigermaßen glaubwürdig rechtfertigen kann, und es zumindest vorstellbar erscheint, die Ordnung von Präferenzen durch Befragung oder Verhaltensbeobachtung halbwegs zuverlässig festzustellen, so ist dies bei der Annahme kardinaler Präferenzen nur unter Schwierigkeiten möglich. Wenn man aber annimmt, dass bei solchen Gegenständen, deren Wert sich durch Geld ausdrücken lässt (also bei „Waren“) der kardinale Nutzen einigermaßen mit dem Geldwert korreliert, dann erscheint die Annahme nicht ganz abwegig, dass es so etwas wie kardinale Präferenzen geben könnte.

Eine weitere Schwierigkeit, die mit der Beantwortung der Frage, welche Art von Skala man zur Nutzenmessung verwenden darf, noch gar nicht berührt ist, ist die ob Nutzenbewertungen immer nur jeweils für eine Person gültig sind, oder ob man auch die Nutzenwerte unterschiedlicher Personen untereinander vergleichen darf (*intersubjektiver Nutzen*). In Bezug auf solche Güter, deren Wert von den meisten Menschen gleichhoch geachtet wird (z.B. Gesundheit, Leben, Wohlstand, Jugend etc.) erscheint ein intersubjektiver Nutzenvergleich nicht abwegig. Ebenso erscheint ein intersubjektiver Nutzenvergleich bei Gütern möglich, für die soziale Institutionen existieren, die solche Nutzenvergleiche hervorbringen, wie das z.B. Märkte für Waren tun. Bei anderen Gütern mag das nicht immer möglich sein. Mit den beiden Unterscheidungen kardinaler Nutzen - ordinaler Nutzen und subjektiver Nutzen - intersubjektiver Nutzen ergeben sich insgesamt vier Arten von Nutzenkonzepten:

		Skalentyp	
		ordinal	*kardinal*
Vergleichbarkeit	*subjektiv*	subjektiver ordinaler Nutzen	subjektiver kardinaler Nuzen
	intersubjektiv	intersubjektiver ordinaler Nutzen	intersubjektiver kardinaler Nutzen

Spiel- und Entscheidungstheoretische Modelle kann man danach einteilen, welche Art von Nutzen sie voraussetzen. Die empirische Anwendbarkeit solcher Modelle hängt dann immer davon ab, ob man in einer gegebenen Anwendungssituation das vorausgesetzte Nutzenkonzept rechtfertigen kann oder nicht (was in der Regel wiederum eine Frage des Vorhandenseins zuverlässiger Bestimmungsmethoden der Nutzenwerte des vorausgesetzten Nutzenkonzepts in der gegebenen Anwendungssituation ist).

4.2 Weitere Entscheidungsregeln auf Basis des kardinalen Nutzens

4.2.1 Die Optimismus-Pessimismus Regel

Für die Theorie- und Modellbildung ist der kardinale Nutzen deshalb so vorteilhaft, weil er es erlaubt, in einem gewissen Rahmen mit Nutzenwerten zu rechnen. Mit Hilfe des kardinalen Nutzenbegriffs können wir daher nicht nur endlich guten Gewissens die Minimax-Bedauerns-Regel anwenden, sondern gleich auch eine ganze Reihe weiterer Entscheidungsregeln erfinden. Eine davon ist die „Optimismus-Pessimismus"-Regel. Diese Regel funktioniert folgendermaßen: Zunächst legen wir einen Optimismusindex a fest, der zwischen 0 und 1 liegen muss. Dann wählen für jede Handlung (also aus jeder *Zeile* der Entscheidungstabelle) das beste und das schlechteste mögliche Ergebnis aus. Das beste Ergebnis können wir der Einfachheit halber mit MAX bezeichnen, das schlechteste nennen wir min. Nun berechnen wir für jede Handlung eine Bewertung R_a („R" wie „rating") nach folgender Formel:

$$R_a = aMAX + (1 - a)min$$

Schließlich wählen wir diejenige Handlung aus, für die R_a am größten ist. Welche Handlung dabei gewählt wird hängt dabei ganz wesentlich von der Wahl des Optimismusindex a ab. Aber das ist auch gewollt, denn bei dieser Entscheidungsregel geht es darum, zuerst festzulegen, wie „optimistisch" man sein möchte, und dann auf dieser Grundlage die eigentliche Entscheidung zu treffen. Die beiden Grenzfälle a=0 und a=1 entsprechen übrigens haargenau der letzte Woche besprochenen Maximin (a=0) und Maximax-Regel (a=1). Die Anwendung der Regel kann an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

	S1	S2	S3
A1	9	1	2
A2	5	6	3

Für a = 0.5 ergibt sich:

$$R_{A1} = 0.5 \cdot 9 + 0.5 \cdot 1 = 5.0$$
$$R_{A2} = 0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot 3 = 4.5$$

Bei einem Optimismus-Index von 0.5 sollte also die Handlung A1 gewählt werden.

Für a = 0.2 ergibt sich dagegen:

$$R_{A1} = 0.2 \cdot 9 + 0.8 \cdot 1 = 2.6$$
$$R_{A2} = 0.2 \cdot 6 + 0.8 \cdot 3 = 3.6$$

In diesem Fall sollte die Handlung A2 gewählt werden.

Die Handlungsempfehlung, die sich aus der Anwendung der Optimismus-Pessimismus-Regel ergibt, hängt wie zu erwarten von der Wahl des Optimismusindex ab. Auch wenn diese Wahl willkürlich ist, stellt sich doch die Frage, ob es ein Verfahren gibt, um die Wahl wenigstens sinnvoll zu treffen, oder anders formuliert: Woher weiss ich eigentlich wie optimistisch ich sein will? Ein Verfahren, das zu Bestimmung des Index vorgeschlagen worden ist, ist dieses (vgl. [23, S. 33]): Man nehme die folgende einfache Entscheidungstabelle, in welcher in der ersten Zeile die Nutzenwerte 0 und 1 (einer beliebigen kardinalen Nutzenskala) und in der zweiten Zeile in beiden Spalten ein unbekanntes Ergebnis x eingetragen worden ist:

	S1	S2
A1	0	1
A2	x	x

Dabei soll diesmal die Frage nicht lauten, welche Handlung gewählt werden soll (um ein möglichst gutes Ergebnis zu erzielen), sondern es soll vielmehr schon vorgegeben sein, dass wir zwischen den Handlungen A1 und A2 indifferent sind. Nun müssen wir x genau so groß wählen, dass wir zwischen A1 und A2 tatsächlich indifferent sind. Haben wir x entsprechend gewählt, dann können wir daraus den Optimismus-Pessimismusindex ableiten, denn auf Grund der Indifferenz gilt:

$$\begin{aligned} R_{A1} &= R_{A2} \\ a \cdot 1 + (1-a) \cdot 0 &= a \cdot x + (1-a) \cdot x \\ a &= x \end{aligned}$$

Was ist damit gewonnen? Wir haben auf diese Weise die Wahl des Optimismusindex aus der Wahl (bzw. Entscheidung im *dezisionistischen* Sinne) über die Indifferenz zwischen zwei Handlungsalternativen abgeleitet. Wenn man annimmt, dass es leichter ist, anzugeben, ob man zwischen zwei Alternativen indifferent ist, als die Frage zu beantworten, wie hoch man den eigenen Optimismus auf einer Skala zwischen 0 und 1 einschätzt, dann vereinfacht das die Wahl des Optimusmusindex. Wir hätten dann eine Willkürentscheidung auf eine andere zurückgeführt, die zu treffen uns möglicherweise leichter fällt.

Allerdings wirkt dieses Verfahren etwas gezwungen. Vor allem gibt es einen gravierenden Einwand: Die Frage wie optimistisch oder pessimistisch man entscheiden sollte, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wie risikofreudig oder risikoavers man sich verhält, dürfte von den meisten Menschen hochgradig situationsspezifisch beantwortet werden. Insofern erscheint es äußerst fragwürdig, einen Optimismusindex, den man durch ein abstraktes Gedankenexperiment bestimmt hat, auf irgendeine konkrete Entscheidungssituation zu übertragen, der man möglicherweise ein ganz anderes Risikoverhalten zu Grunde legen möchte. Dann kann man sich das Gedankenexperiment besser gleich sparen und willkürlich bleibt die Entscheidung über den Optimismusindex ohnehin.

Dieses Willkürelement ist noch aus einem anderen Grund als dem der Schwierigkeit der Festlegung des Optimismusindex problematisch: Wenn eine Entscheidungsregel derartige Willkürelemente enthält, dann lädt sie geradezu dazu ein, zuerst die Entscheidung vollkommen intuitiv zu treffen, und sie erst im Nachhinein durch die Wahl eines geeigneten Index zu „rationalisieren“. Das könnte besonders dann problematisch werden, wenn die entscheidenden Personen anderen für ihre Entscheidung rechenschaftspflichtig sind, denn es lässt sich dann nicht mehr nachvollziehen, ob die Entscheidung „verantwortlich“ getroffen wurde.

Daneben ist die Optimismus-Pessimismus-Regel mit ähnlichen Schwierigkeiten behaftet, wie die Maximin und die Minimax-Bedauerns-Regel. Da sie jeweils nur zwei Werte jeder Zeile in das Kalkül einbezieht, lassen sich leicht Fälle konstruieren, in denen sie unplausibel erscheint:

	S_1	S_2	S_3	$\ldots$	S_{99}	S_{100}
A_1	2	1	1	$\cdots$	1	0
A_2	2	0	0	$\cdots$	0	0

In diesem Fall würde die Optimismus-Pessimismus-Regel immer zur Indifferenz zwischen beiden Handlungen führen, obwohl intuitiv die Handlung A1 sicherlich als die bessere beurteilt werden müsste.

Schließlich existiert noch ein weiterer Einwand, der auf einer etwas raffinierteren Konstruktion beruht, nämlich auf der sogenannten „Mischungsbedingung“ (*mixture-condition*), die – leicht vereinfacht – besagt: Wenn eine Person indifferent zwischen zwei Handlungsalternativen ist, dann ist sie auch indifferent zwischen diesen beiden Handlungen und einer dritten Handlung, die darin besteht, eine Münze zu werfen und bei „Kopf“ die erste Handlung und bei „Zahl“ die zweite Handlung zu wählen. Betrachten wir die folgende Tabelle:

	S1	S2
A1	0	1
A2	1	0

Nach der Optimismus-Pessimismus-Regel herrscht zwischen beiden Handlunsalternativen völlige Indifferenz, und zwar unabhängig von der Wahl des Optimismusindex a. Fügt man nun die Münzwurfalternative hinzu, dann ergibt sich folgende Entscheidungstabelle[8]:

	S1	S2
A1	0	1
A2	1	0
A3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Angenommen der Optimismus-Pessimismus-Index wäre $a = \frac{2}{3}$. Dann ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} R_{A1} &= \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{2}{3} \cdot 1 = \quad 2/3 \\ R_{A2} &= \tfrac{2}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 0 = \quad 2/3 \\ R_{A3} &= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Nach der Optimismus-Pessimismus-Regel müssten die Handlungen A1 und A2 der „Münzwurfalternative“ vorgezogen werden, unter Verletzung der Mischungsbedingung. Die Mischungsbedingung lässt sich nur erfüllen, wenn das beste und das schlechteste mögliche Ergebnis genau gleich gewichtet werden, d.h. bei einem Optimismusindex von $a = \frac{1}{2}$.

Wie auch bei den denkbaren Einwänden gegen die anderen Entscheidungsregeln, lässt sich darüber streiten, ob die Verletzung der „Mischungsbedingung“ ein Nachteil oder, eher im Gegenteil, eine besondere Eigenschaft der

[8] Bei der Nutzenbewertung der Ergebnisse der Münzwurfhandlung wurde implizit bereits die *Erwartungsnutzenhpyothese* zugrunde gelegt, die besagt, dass der Erwartungsnutzen gleich dem erwarteten Nutzen multipliziert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit ist. Strenggenommen kann auch das Ergebnis der Münzwurfhandlung nur 0 oder 1 sein.

Optimismus-Pessimismus-Regel ist. Wenn jemand optimistisch ist, dann besagt das ja gerade, dass die Person eher geneigt ist an den Erfolg zu glauben als an eine 50:50 Chance von Erfolg und Misserfolg, so dass es nicht verwunderlich ist, dass sie eine Handlung, an deren Erfolg sie glaubt, einem Münzwurf vorzieht, von dem sie weiß, dass die Chancen gleichverteilt sind. Widersprüchlich ist das optimistische (oder pessimistische) Verhalten bei der gegebenen Entscheidungstabelle aber immer noch insofern, als die Person ohne nähre Gründe eigentlich nur *entweder* an den mehr als 50%-igen Erfolg von S1 *oder* S2 glauben kann, aber – sofern die Zustände S1 und S2 von den Handlungen unabhängig sind – nicht daran, dass sie in jedem Fall die höheren Erfolgschancen hat.

4.2.2 Das Prinzip der Indifferenz

Wenn wir die Nutzenwerte als kardinale Nutzenwerte interpretieren und daher mit ihnen Rechnen dürfen, wie das bei der Optimismus-Pessimismus-Regel der Fall ist, dann besteht eine der naheliegendsten Arten, die unterschiedlichen Handlungsalternativen in eine Rangordnung zu überführen, darin einfach alle Zahlen in jeder Zeile aufzusummieren und die Handlungsalternative mit der höchsten Zeilensumme zu wählen. An einem Beispiel betrachtet sieht das Verfahren folgendermaßen aus:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\sum$
A_1	8	2	-7	3	3	9
A_2	-5	-3	5	12	4	13

In diesem Fall würde also die Handlung A2 gewählt werden, weil die Summe der erzielbaren Nutzenwerte größer ist als bei der Handlung A1. Werden die Nutzenwerte einer Zeile einfach aufsummiert, dann bedeutet das, dass sie alle gleich gewichtet werden. Dem Summierungsverfahren liegt damit implizit ein Prinzip zu Grunde, das man auch als das *Prinzip der Indifferenz* bezeichnet. Es besagt, dass wir alle Ereignisse als gleichwahrscheinlich betrachten sollten, solange wir nicht wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eines von mehreren Ereignissen eintreten wird. In der Fachliteratur wird statt vom „Prinzip der Indifferenz“ zuweilen auch vom „Prinzip des (un-)zureichenden Grundes“ gesprochen [23, S. 35ff]. Beim „Prinzip des (un-)zureichenden Grundes“ handelt es sich aber um einen allgemeineren philosophischen Gedanken, der in der Philosophiegeschichte immer wieder in unterschiedlichen Ausprägungen und Formulierungen aufgetreten ist. In der einfachsten Form besagt es, dass nichts ohne Ursache geschieht. Man kann es auch so auffassen, dass in einer Reihe von gleichartigen Ereignissen keine Ausnahmen auftreten können, ohne dass es dafür einen zureichenden Grund gibt, d.h. der Ausnahmefall muss sich in irgendeiner qualitativen Hinsicht von den anderen Fällen unterscheiden. Das Prinzip des unzureichenden Grundes ist ein *heuristischer Grundsatz* (ein Hilfsmittel unserer Erkenntnis). Ontologische, d.h. die Natur der Gegenstände selbst bzw. das Wesen des Seins betreffende Bedeutung kommt ihm wenn überhaupt nur in einem deterministischen Universum zu (Vgl. [24, S. 130]). Das hier besprochene „Prinzip der Indifferenz“ kann man vage auf das Prinzip des (un-)zureichenden Grundes zurückführen.

In diesem Zusammenhang ist noch einmal darauf hinzuweisen, dass ein subtiler Unterschied zwischen dem vom „Prinzip der Indifferenz“ erfassten Fall besteht, in dem wir nicht wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis eintritt („*Unwissen*“), und dem vergleichsweise „harmloseren“ Fall, in dem wir bloß nicht wissen, welches Ereignis eintritt, aber über die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse auf Grund unserer Kenntnis des empirischen Vorgangs, um den es geht, genaue Aussagen machen können („*Risiko*“). Beim Würfeln oder bei einem Münzwurf etwa wissen wir auf Grund unser Kenntnis von Würfeln und Münzen, dass die verschiedenen möglichen Ereignisse gleichverteilt sind. Die Rechtfertigung dafür, dass wir beim Würfeln oder auch beim Werfen einer Münze von einer Gleichverteilung ausgehen, ergibt sich aus dieser Kenntnis. Dem Prinzip der Indifferenz liegt keine vergleichbare Rechtfertigung zu Grunde. Es handelt sich um ein philosophisches oder, wenn man so will, sogar *metaphysisches Postulat*, dessen Annahme keinesfalls zwingend ist, und das auch keineswegs durchgängig geteilt wird (wohingegen die Annahme der Gleichverteilung von Würfelergebnissen oder Münzwürfen genauso zwingend ist, wie andere Aspekte der alltäglichen physischen Wirklichkeit, wie etwa, dass „morgens die Sonne aufgeht“, dass „dort eine Wand steht“ etc.).

Die auf dem Prinzip der Indifferenz beruhende Entscheidungsregel hat die Eigenschaft (wenn man so will: den Vorzug), dass sie sowohl die *Mischungsbedingung* erfüllt als auch *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* garantiert und selbstverständlich auch *dominierte Alternativen* ausschließt. Trotzdem wird man in bestimmten Situation, z.B. in Situationen, in denen es vor allem darum geht, Schaden zu begrenzen, auf andere Entscheidungsregeln wie die Maximin-Regel zurückgreifen. Unter „Unwissen“ gibt es viele je nach Situation mehr oder weniger gute Entscheidungsregeln, aber keine eindeutig beste Regel.

4.3 Entscheidungsregeln in der Philosophie: Die Debatte zwischen John Rawls und John C. Harsanyi

Die Maximin-Regel hat in der Philosophie einige Bekanntheit erlangt, weil sie an prominenter Stelle in John Rawls sehr einflussreichem Werk „Eine Theorie der Gerechtigkeit“ figuriert. John Rawls vertritt in diesem Werk den Grundsatz, dass dasjenige Gesellschaftsmodell das gerechteste ist, in dem es den am schlechtesten gestellten Menschen im Vergleich mit anderen Modellen am besten geht. Etwas anders formuliert könnte man auch sagen, dass Ungleichheit nur insoweit gerechtfertigt ist, wie sie *jedermann* zum Vorteil gereicht [22]. Dieses Prinzip wird auch das „Differenzprinzip“ genannt. Rawls stellt diesem Prinzip noch das von Kant übernommene „Freiheitsprinzip“ voran, wonach in der Gesellschaft jeder Mensch soviel Freiheit wie möglich genießen soll, so dass seine Freiheit mit demselben Maß an Freiheit für andere Menschen noch verträglich ist. Unfreie Gesellschaften kommen also von vornherein nicht als gerechte Gesellschaften in Betracht. Uns soll hier aber nur das Differenzprinzip interessieren.

Rawls liefert in seinem Werk für das Differenzprinzip eine Quasi-Ableitung, für die er sich der aus der vertragstheoretischen Tradition seit Hobbes beliebten Vorstellung eines Urzustandes bedient. Rawls stellt sich einen hypothetischen Urzustand vor, in dem die Menschen ein Gesellschaftsmodell wählen dürfen. In diesem Urzustand wissen sie aber noch nicht, welche (soziale) Rolle sie in der gewählten Gesellschaft einnehmen werden. Sie befinden sich hinter einem *Schleier des Nichtwissens*. Welche Gesellschaft werden sie in einer Solchen Situation wohl wählen? An dieser Stelle kommt die Maximin-Regel ins Spiel. Denn Rawls ist überzeugt davon, dass in einer solchen Situation die einzige Entscheidungsregel, deren sich ein vernünftiger Mensch bedienen würde, die Maximin-Regel ist. (Wenn es um das eigene Lebensschicksal geht, dann sollte man besser auf Nummer sicher gehen.) Nach der Maximin-Regel würden die Menschen aber die Gesellschaft wählen, die nach dem Differenzprinzip die Gerechteste ist, denn das ist genau die Gesellschaft, in er es einem im schlimmsten Fall noch am besten geht.

Harsanyi vertritt dazu den utilitaristischen Gegenstandpunkt: Seiner Ansicht nach muss eine rationale Entscheidungsregel auf dem Prinzip der Indifferenz beruhen und statt der Maximin-Regel den Durchschnittsnutzen heranziehen unter der Annahme der Gleichverteilung aller möglichen Ergebnisse. Er rechtfertigt dies einmal mit offensichtlichen Konsistenzbedingungen wie z.B. der Transitivität der Präferenzen oder dem Prinzip „Du wirst besser gestellt sein, wenn Du [in einer Lotterie] einen höheren Gewinn mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit angeboten bekommst, als wenn Du einen niedrigeren Gewinn mit der gleichen Wahrscheinlichkeit angeboten bekommst“ [14, S 47], von denen man in der Tat mathematisch zeigen kann, dass wenigstens einige davon verletzt werden, wenn man vom Durchschnittsnutzen abweicht. Zusätzlich führt Harsanyi einige Einzelbeispiele in Form von Gedankenexperimenten an, in denen die Maximinregel unplausibel erscheint, von der Gestalt wie: „Du kannst in Chicago einen super Job bekommen, oder zu Hause bei Deinem miesen Job bleiben. Wenn Du nach Chicago fliegst, könnte das Flugzeug natürlich abstürzen...“ Nach der Maximin-Regel müsste man zu Hause bleiben, was Harsanyi absurd findet.

Um den Unterschied der beiden Positionen in Bezug auf die Frage der Gerechtigkeit zu verdeutlichen, können wir uns als Beispiel zwei mögliche Gesellschaftsmodelle denken. In dem ersten Gesellschaftsmodell arbeiten 10% der Menschen hart, damit die restlichen 90% wohlleben können. Die 10% Arbeiter erhalten jeweils einen (kardinalen) Nutzen von 1, die anderen von 90, macht im Schnitt 81.1 [23, S. 41]. In einem anderen Gesellschaftsmodell muss sich jeder an der Arbeit beteiligen, und jeder erzielt einen Nutzen von 35. Für welche Gesellschaft würden sich die Menschen hinter einem *Schleier des Nichtwissens* entscheiden? Mit Rawls und dem Maximin-Prinzip für die zweite. Mit Harsanyi und dem Utilitarismus für die erste.

Wie sind die unterschiedlichen Positionen zu beurteilen? Kann Harsanyi Rawls Gerechtigkeitstheorie mit Hilfe der Entscheidungstheorie wiederlegen? Die Beantwortung dieser Frage hängt sehr stark davon ab, wie man die Gerechtigkeitstheorie von Rawls und insbesondere ihre Begründungslogik rekonstruiert. Es gibt – stark vereinfacht – zwei Möglichkeiten das zu tun:

1. Man siedelt die *ethische Basisentscheidung* auf der Ebene des Gerechtigkeitsprinzips selbst an. Dann muss man zunächst die Entscheidung (im *dezisionistischen*, nicht im entscheidungstheoretischen Sinne!) treffen, ob man das Differenzprinzip oder den Utilitarismus als Gerechtigkeitsprinzip wählen möchte. Alle Schlussfolgerungen, die man dann aus dem gewählten Prinzip in Bezug auf den Aufbau und die Institutionen der gerechten Gesellschaft zieht, sind dann ethische Deduktionen. All dasjenige, woraus man das gewählte Gerechtigkeitsprinzip ableiten könnte, also insbesondere alle Urzustandsszenarien, sind dann lediglich begründende Mythen, deren berechtigter Zweck allein darin besteht, das Gerechtigkeitsprinzip zu motivieren, erzählerisch auszuschmücken, propagandistisch aufzuwerten usf.

   Sollte sich nun durch eine entscheidungstheoretische Kritik wie der von Harsanyi zeigen, dass das gewählte Gerechtigkeitsprinzip nicht aus dem Urzustand ableitbar ist, dann beweist das bestenfalls, dass man auf einen ungeeigneten Mythos zurückgegriffen hat, um es zu motivieren.

Andererseits beruht aber gerade die Kritik von Harsanyi auf dem Nachweis der Verletzung von Konsistenzbedingungen durch die von Rawls für die Entscheidung im Urzustand reklamierte Maximin-Regel. Nun kann man aber ernsthaft fragen, ob es für das Urzustandsszenario, zumal wenn es ohnehin keine begründende Bedeutung hat, auf die Konsistenz und Rationalität (im dem engen Sinne, in dem Harsanyi den Ausdruck Rationalität gebraucht) der Entscheidung überhaupt ankommt. Rawls beansprucht freilich, dass eine Entscheidung nach der Maximin-Regel im Urzustand eine vernünftige Entscheidung ist. Aber schlimmstenfalls wäre er nur gezwungen seinen Urzustandsmythos fallen zu lassen oder durch einen anderen zu ersetzen, nicht jedoch dazu, das Differenzprinzip aufzugeben.

2. Man siedelt die ethische Basisentscheidung auf der Ebene des Urzustandes oder sogar davor an, so dass diejenige Gesellschaftsordnung als gerecht gelten muss, die sich daraus ableiten lässt. In gewisser Weise scheint die Basisentscheidung zumindest was Harsanyi betrifft, noch vor dem Urzustand zu liegen, indem er als wesentliches Merkmal des Moralischen vorauszusetzen scheint, dass man von den Interessen, die man als konkretes Einzelindividuum hat absieht und die Interessen der anderen gleichwertig mitberücksichtigt. Das motiviert dann die Konstruktion des Urzustandes hinter dem Schleier des Nichtwissens. (Eine Konstruktion von der Harsanyi beansprucht, dass er sie unabhängig von Rawls schon herangezogen hat.) Außer dieser recht formalen Bedingung für Moral scheint Harsanyi weitere, konkrete ethische Entscheidungen (i.S.v. Dezisionen) nicht zuzulassen.

   Nur in diesem zweiten Fall kommt der entscheidungstheoretischen Argumentation tatsächlich eine Schlüsselfunktion zu. Denn einmal den Urzustand als ethische Basisentscheidung gegeben, hängt es von der korrekten Anwendung der entscheidungstheoretischen Regeln ab, welches Gesellschaftsmodell als das gerechteste betrachtet werden muss. Harsanyis Kritik ist an Rawls Gerechtigkeitsideal ist dann in dem Maße berechtigt wie seine Kritik der Maximin-Regel zutrifft.

Was ist zu dieser Kritik zu sagen? Zunächst, was die Einzelbeispiele betrifft, mit denen Harsanyi gegen die Maximin-Regel polemisiert: Gegen den Utilitarismus kann man ebenso gute Einzelbeispiele anführen, z.B.: Zwei Menschen sind todkrank, der eine benögt zur Lebensrettung eine Spenderniere, der andere ein Herz. Man schlachte einen Dritten (oder nehme ihm mindestens eine Niere) und man hat utilitaristisch mit zwei Leben gegen eins die Nutzensumme erhöht. Oder: Auf einer Insel ist eine Gruppe von Leuten gestradet. Die Rettung ist unterwegs, verzögert sich aber und wird erst eintreffen, wenn schon alle verhungert sind. Wenn nun aber die eine Hälfte der Gruppe die andere schlachtet und verspeist, kann wenigstens die Hälfte bis zum eintrffen der Rettung überleben. Utilitaristisch und unter dem Gesichtspunkt des Durchschnittsnutzens betrachtet, ist es besser, wenn die Hälfte überlebt als wenn alle sterben und der Kannibalismus damit eine moralische Pflicht.... Kurz, mit Einzelbeispielen kann man jedes Moralprinzip kleinkriegen. (Das zeigt weder, dass Einzelbeispiele noch dass allgemeine Moralprinzipien falsch sind, aber vielleicht, dass man nicht mit einem einzigen einfachen Moralprinzip auskommt, und dass in der Moral wie im Leben ein gewisses Maß an Inkonsequenz empfehlenswert ist.)

Ernstzunehmender ist die Kritik, soweit sie sich auf die Verletzung von elementaren Konsistenzbedingungen durch die Maximin-Regel bezieht. Hier kann man allenfalls noch entgegenhalten, dass unter Umständen die Verletzung von Konsistenzbedingungen zu billigen sei (wenn wichtigeres auf dem Spiel steht, wie ja auch die Maximin-Regel ihre „Showcases“ hat, wenn es um Leib und Leben geht). Man müsste dann klären, welche Konsistenzbedingungen bei der Anwendung der Maximin-Regel auf den Urzustand verletzt werden, und ob man, wiederum bezogen auf den Urzustand, eine Rechtfertigung dafür finden kann.

Schließlich sei noch angemerkt – aber dies ist zugegebenermaßen mehr ein Vorbehalt – dass es bei Harsanyi manchmal so erscheint, als ob er den Utilitarismus nur auf Grund einer idiosynkratischen Vorliebe für ein Moralsystem bevorzugt, das sich am ehesten mit der von ihm offenbar geschätzten Stilform eines (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Kalküls verbinden lässt[9], ohne dass er die zu treffenden sittlichen Entscheidungsmöglichkeiten überhaupt bewusst als solche reflektiert.

[9]In der Einleitung seiner Rawls-Kritik lässt er die Bemerkung fallen, dass der Utilitarismus „up to now in its various forms was virtually the only ethical theory proposing a reasonably clear, systematic and purportedly rational concept of morality“ sei, als ob das die einzigen oder gar wichtigsten Maßstäbe sind, an denen man die Entscheidung für oder gegen ein Moralsystem treffen müsste, und nicht vielmehr in erster Linie dessen sittlicher Inhalt.

4.4 Aufgaben 3 (29. April)

1. Welche der folgenden Transformationen sind *ordinale* und welche *positive lineare* Transformationen (und welche keins von beiden)? (Es sei angenommen, dass x eine beliebige reelle Zahl sein kann):

   (a) t(x) $= x - 5$

   (b) t(x) $= x^2$

   (c) t(x) $= x^3$

   (d) t(x) $= 3x + 5 - 4x$

2. Kann es bei Verwendung der Optimismus-Pessimismus-Regel dazu kommen, dass dominierte Handlungen gewählt werden?

3. Die Optimismus-Pessimismus-Regel hat die Schwäche, dass immer nur zwei Einträge jeder Zeile (das Maximum und da Minimum) der Entscheidungstabelle berücksichtigt werden. Denken Sie sich eine Verbesserung der Optimismus-Pessimismus-Regel aus, die alle Einträge einer Zeile berücksichtigt.

4. Zeige, dass das Prinzip des unzureichenden Grundes niemals eine dominierte Handlungsalternative empfiehlt.

5. Zeige, dass das Prinzip der Indifferenz kardinalen Nutzen voraussetzt.

6. Wie kann man die Wahl eines Geselschaftsmodells hinter einem Rawlsschen *Schleier des Nichtwissens* als Entscheidungstablle darstellen? Und als Entscheidungsbaum?

7. Als Vorgeschmack eine Aufgabe zu bedingten Wahrscheinlichkeiten: In einer Fernsehshow muss die Kandidatin eine von drei verschlossenen Türen wählen. Hinter einer der Türen befindet sich als Hauptpreis ein Auto. Wählt die Kandidatin die richtige Tür, so bekommt sie das Auto, sonst nichts. Um die Sache spannender zu machen, wird nach folgenden Regeln gespielt. Erst darf sich die Kandidatin eine Tür aussuchen, dann öffnet der Showmaster, der hinter welcher Tür das Auto steht, eine von den verbleibenden Türen, wobei er natürlich niemals die Tür schon öffnet, hinter der sich das Auto befindet. Nun bekommt die Kandidatin die Gelegenheit entweder bei der zuerst gewählten Tür zu bleiben, oder sich noch einmal umzuentscheiden, und die andere noch geschlossene Tür zu wählen. Wie sollte sie sich entscheiden, um ihre Gewinnchancen zu maximieren?

5 Wahrscheinlichkeiten I: Rechentechniken

In dieser und der folgenden Woche werden wir uns die mathematischen Voraussetzungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie erarbeiten, die wir für die Theorie der Entscheidungen unter Risiko (d.h. solchen Entscheidungen, bei denen wir im Gegensatz zu Entscheidungen unter Unwissenheit die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Zustände oder Zufallsereignisse kennen) benötigen.

Diese Woche steht dabei folgendes auf dem Programm:

1. Herleitung der wesentlichen Gesetze der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie, also insbesondere:

   (a) *Wahrscheinlichkeit von „und"-verknüpften Ereignissen*: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei möglichen Zufallsereignissen, deren jeweilige Wahrscheinlichkeit bekannt ist, beide eintreten?

   (b) *Wahrscheinlichkeit von „oder"-verknüpften Ereignissen*: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei möglichen Ereignissen das eine oder das andere eintritt?

   (c) *Bedingte Wahrscheinlichkeit*: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt, dass von einem anderen abhängt, unter der Bedingung, dass das andere Ereignis schon eingetreten ist? Und im Gegensatz dazu, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es überhaupt, also ohne diese Bedingung, eintritt?

2. Der Satz von Bayes. Das Theorem von Bayes ist grundlegend für die Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten und hat zahlreiche Anwendungen in der Statistik, der Entscheidungstheorie und der Philosophie.

Am Ende der Vorlesung werden Sie Aufgaben wie die folgende mühelos lösen können:

> Ca. 3% aller 70-jährigen haben Alzheimer. Auch wenn Alzheimer bisher nicht geheilt werden kann, ist die Früherkennung eine wichtige Voraussetzung für vorbeugende, den Krankheitsverlauf evtl. mildernde Maßnahmen. Leider lässt sich Alzheimer nur schwer präzise diagnostizieren. (Erst durch Gewebeuntersuchungen am verstorbenen Patienten lässt sich mit Sicherheit feststellen, ob eine Alzheimererkrankung vorlag.) Angenommen einmal, die Forschung hätte einen Gedächtnistest entwickelt, durch

> den eine vorliegende Alzheimererkrankung mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar ist, an dem im Durchschnitt aber auch 2% der älteren Menschen scheitern, selbst wenn sie nicht an Alzheimer erkrankt sind.
>
> Angenommen, Sie sind Ärztin oder Arzt und untersuchen einen 70-jährigen Patienten mit Hilfe des Gedächnistests. Es zeigt sich, dass der Patient nicht mehr in der Lage ist, die Aufgaben des Tests zu lösen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient an Alzheimer erkrant ist?

Um es vorweg zu nehmen: Die Antwort „95%" ist falsch! Aber warum? Dafür eben benötigt man die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bevor aber auf das mathematische Kalkül der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen wird, ist zunächst etwas zu der Frage zu sagen, was Wahrscheinlichkeiten eigentlich sind. Es gibt drei Arten von Phänomen, auf die man das Wahrscheinlichkeitskalkül anwenden kann:

1. *Häufigkeiten* bei einer größeren Menge oder Folge von Ereignissen. So besagt die Aussage, dass ein 70-jähriger mit 3%-iger Wahrscheinlichkeit an Alzheimer leidet, nichts weiter als dass eben unter den 70-jährigen die Alzheimerkrankheit mit einer Häufigkeit von 3% auftritt. (Jeder einzelne 70-jährige dagegen hat die Alzheimerkrankheit oder auch nicht. Aber kein 70-jähriger hat 3% Alzheimer.) Die Wahrscheinlichkeitsaussage bezieht sich in diesem Fall also nur auf die Häufigkeit eines Zustands in einer Gesamtheit.

2. *Glaubensgrade* oder auch „subjektive Wahrscheinlichkeiten": Wenn eine Ärztin einen Patienten dem oben beschriebenen Gedächsnistest unterzogen hat, und nun (mit Hilfe des Bayes'schen Lehrsatzes) die korrekte Wahrscheinlichkeit berechnet hat, mit der der Patient an Alzheimer erkrankt ist, dann wird sie oder er genau in dem Grad davon überzeugt sein, dass der Patient an Alzheimer leidet, der dieser Wahrscheinlichkeit entspricht. Wiederum gilt: Der Patient hat entweder Alzheimer oder kein Alzheimer. Die Wahrscheinlichkeit sagt bei genauer Auslegung nur etwas darüber aus, bis zu welchem Grad man davon ausgehen muss, dass er Alzheimer hat.

3. *Objektive Wahrscheinlichkeiten* (Propensitäten): Die Wahrscheinlichkeit kann aber auch die inhärente Eigenschaft eines einzelnen Vorgangs beschreiben. So hat die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Sechs zu würfeln offensichtlich etwas mit dem symmetrischen Aufbau des Würfels zu tun, man kann die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu

würfeln, daher als eine objektive Eigenschaft des Vorgangs eines Würfelwurfs betrachten.[10]

Die Tatsache, dass man auf alle drei Klassen von Phänomenen ein- und dasselbe wahrscheinlichkeitstheoretische Kalkül anwendet – zudem es übrigens, sofern man seine Anwendung auf den entsprechenden empirischen Phänomenbereich überhaupt zugesteht, keine Alternative gibt – darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass es sich – empirisch betrachtet – um sehr unterschiedliche Phänomene handelt. Das gilt trotz der Tatsache, dass die Interpretation, um welche Art von (empirischer) Wahrscheinlichkeit es sich handelt, nicht in jedem Fall eindeutig oder zwingend ist. So kann man die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Sechs zu würfeln statt als Propensität des Systems „Würfel" auch als Häufigkeit verstehen, mit der bei einer großen Anzahl von Würfen die Sechs auftritt.

5.1 Grundlegende Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wenn wir im Zusammenhang der Entscheidungstheorie von Wahrscheinlichkeiten sprechen, dann sind fast immer die Wahrscheinlichkeiten von Zuständen oder von Zufallsereignissen gemeint. Wir schrieben dafür:

$$P(E) = a \qquad 0 \leq a \leq 1$$

Lies: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E eintritt ist a. Statt über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu reden, können wir ebensogut über die Wahrscheinlichkeit von Aussagen reden, die Ereignisse beschreiben. Wenn q die Aussage ist, dass das Ereignis E eintritt, dann ist mit

$$P(q) = a \qquad 0 \leq a \leq 1$$

die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass die Aussage q wahr ist. Da q aussagt, dass E eintritt, ist diese Wahrscheinlichkeit natürlich genau dieselbe wie

[10]Dagegen könnte eingewandt werden, dass beim Würfeln als einem nach der klassischen Mechanik streng deterministisch zu beschreibenden Vorgang, dass Ergebnis schon vorherbestimmt ist, so dass man nicht im wörtlichen Sinne von einer „objektiven Wahrscheinlichkeit" seines Eintretens sprechen könne. Da es aber andererseits noch nie jemanden gelungen ist, Würfelwürfe tatsächlich vorherzusagen, so spricht – ungeachtet der Beschreibung des Systems durch eine deterministische Theorie – nichts dagegen, den Ausgang des Würfelwurfs als objektiv zufällig zu betrachten. Mit dieser Interpretation folge ich der (allerdings nicht unumstrittenen) Theorie von Nancy Cartwright, der zufolge (natur-)wissenschaftliche Theorien nur bei den Vorgängen überhaupt gültig sind, an denen man sie auch nachweisen kann [6].

diejenige, dass E eintritt. Spricht man von den Wahrscheinlichkeiten von Aussagen über Ereignisse, so erlaubt dies ohne weitere Umstände die aussagenlogischen und modallogischen[11] Verknüpfungen von Aussagen anzuwenden und die Wahrscheinlichkeiten von aussagenlogisch verknüpften Aussagen zu bestimmen. Aber im Grunde handelt es sich dabei nur um eine andere Redeweise. Besonders in der mathematischen Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie ist es darüber hinaus auch üblich den Wahrscheinlichkeitsbegriff in Bezug auf Ereignismengen zu definieren, die die Teilmengen eines Ereignisraums sind, wobei man zusammengesetzte Ereignisse noch einmal von Elementarereignissen unterscheidet [5, S. 1ff.]. Der Einfachheit halber beschränken wir uns, Resnik folgend [23, S. 45ff.], hier meist aber auf die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bzw. Aussagen über Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde 1993 von dem russischen Mathematiker Anderj Nikolajewitsch Kolmogorow axiomatisiert. Seitdem beruht die gesamte Wahrscheinlichkeitsrechnung auf folgenden drei (harmlos wirkenden) Axiomen:

Axiom 1: Für die Wahrscheinlichkeit P(p) eines Ereignisses p gilt:

$$0 \leq P(p) \qquad P(p) \in \mathbb{R}$$

Axiom 2: Wenn p sicher ist, dann gilt:

$$P(p) = 1$$

Axiom 3: Wenn die Ereignisse p und q sich ausschließen, dann gilt:

$$P(p \vee q) = P(p) + P(q)$$

Sofern die Menge möglicher Ereignisse abzählbar unendlich viele Ereignisse enthält, ersetzt man Axiom 3 durch:

Axiom 3': Seien $p_1, p_2, \ldots$ höchstens abzählbar unendlich viele Ereignisse und paarweise unvereinbar, dann gilt:

$$P(\bigvee p_i) = P(p_1 \vee p_2 \vee \ldots) = P(p_1) + P(p_2) + \ldots = \sum P(p_i)$$

[11] Während die Aussagenlogik nur die Wahrheit und Falschheit von Aussagen einbezieht, behandelt die Modallogik auch solche Eigenschaften wie die *Möglichkeit* und *Notwendigkeit* von Aussagen. So ergibt sich in der Modallogik z.B. dass die Negation einer Aussage, die *unmöglich* wahr sein kann, *notwendig* wahr ist.

Es ist bemerkenswert, dass man mit diesen drei Axiomen auskommt, und dass sich alle anderen Gesetze für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten daraus ableiten lassen. Insbesondere kann man aus diesen Axiomen relativ unmittelbar folgende *Corrolarien* ableiten:

1. $P(\neg p) = 1 - P(p)$ $\qquad$ (*inverse Wahrscheinlichkeit*)

   Beweis: Da $p \vee \neg p$ sicher ist, gilt nach Axiom 2: $P(p \vee \neg p) = 1$. Da p und $\neg p$ sich ausschließen, kann man Axiom 3 anwenden:

   $$P(p) + P(\neg p) = P(p \vee \neg p) = 1$$

   Daraus folgt unmittelbar: $P(\neg p) = 1 - P(p)$

2. Wenn q unmöglich, dann $P(q) = 0$ $\qquad$ (*Null-Wahrscheinlichkeit*)

   Beweis: Wenn q unmöglich ist, dann ist $\neg q$ sicher. Damit ergibt sich aus dem vorhergehenden und Axiom 2:

   $$P(q) = 1 - P(\neg q) = 1 - 1 = 0$$

3. Wenn p aus q folgt, dann $P(q) \leq P(p)$ $\qquad$ (*Monotonie*)

   Beweis: Wenn $p \leftarrow q$, dann gilt $p \Leftrightarrow q \vee (\neg q \wedge p)$. Da aber auch gilt, dass q und $(\neg q \wedge p)$ sich ausschließen, ist die Voraussetzung von Axiom 3 erfüllt und wir können folgern, dass:

   $$P(p) = P(q) + P(\neg q \wedge p)$$

   Da wegen Axiom 1 sowohl $P(q) \geq 0$ als auch $P(\neg q \wedge p) \geq 0$, können wir daraus folgern, dass $P(q) \leq P(p)$. (Da es nicht strikt ausgeschlossen ist, dass $\neg q \wedge p$ wahr ist, kann es in der Tat auch Fälle geben in denen $<$ also *echt kleiner* gilt.)

4. $P(p) \leq 1$ $\qquad$ (*obere Grenze der Wahrscheinlichkeit*)

   Beweis: Logisch betrachtet folgt ein sicheres Ereignis q aus jedem Ereignis p. (Da q als sicheres Ereignis immer gilt, gilt es insbesondere auch wenn p gilt.) Für jedes Ereignis p gilt also $P(p) \leq P(q)$, wenn q sicher ist. Da nach Axiom 2 $P(q) = 1$ folgt die Behauptung.

5. $P(q \vee p) = P(q) + P(p) - P(q \wedge p)$ $\qquad$ (*oder-verknüpfte Ereignisse*)

   Beweis: Da $q \vee p$ äquivalent ist mit $q \vee (\neg q \wedge p)$ und q und $\neg q \wedge p$ sich ausschließen, gilt nach Axiom 3:

   $$P(q \vee p) = P(q \vee (\neg q \wedge p)) = P(q) + P(\neg q \wedge p)$$

Da aber weiterhin $p \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (\neg q \wedge p)$ und auch $q \wedge p$ und $\neg q \wedge p$ sich ausschließen, gilt wiederum nach Axiom 3:

$$P(p) = P((q \wedge p) \vee (\neg q \wedge p)) = P(q \wedge p) + P(\neg q \wedge p)$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$P(\neg q \wedge p) = P(p) - P(q \wedge p)$$

Indem wir den Term $P(\neg q \wedge p)$ in der ersten Gleichung durch diesen Ausdruck ersetzen erhalten wir die Behauptung.

Der „Sinn“ der meisten dieser Corrolarien drüfte relativ einleuchtend sein. Etwas verblüffend könnte höchstens die Monotoniebedingung (3.) erscheinen. Wenn p aus q folgt ($q \rightarrow p$), warum gilt dann, dass die Wahrscheinlichkeit von q kleiner ist als die von p ($P(q) \leq P(p)$) und nicht umgekehrt? Man kann sich das folgendermaßen klar machen: q ist eine *hinreichende*, aber keine notwendige Voraussetzung von p. Immer wenn q gegeben ist, ist damit auch p gegeben. Aber umgekehrt kann p auch gegeben sein, ohne dass q gegeben ist. So gesehen ist p wahrscheinlicher als q.

Alles oben aufgeführten Gesetzmäßigkeiten betreffen unbedingte Wahrscheinlichkeiten. Als nächstes ist der Begriff der bedingen Wahrscheinlichkeit einzuführen. Mit

$$P(p|q)$$

bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses p unter der Bedingungen, dass das Ereignis q eingetreten ist.

Mathematisch kann die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(p|q)$ durch folgende Definition eingeführt werden:

$$P(p|q) := \frac{P(p \wedge q)}{P(q)} \qquad P(q) > 0$$

In Umgangssprache übertragen bedeutet dies, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit ist als die Wahrscheinlichkeit definiert ist, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedingung eintritt. Für den Fall, dass $P(q) = 0$, setzt man üblicherweise $P(p|q) := 0$. Mit dieser Festsetzung ist dann immer noch das unten angegebene Multiplikationsgesetz erfüllt.

Wenn es sich dabei um die „Definition“ bedingter Wahrscheinlichkeit handelt, dann könnte man die Frage aufwerfen, warum man die bedingte Wahrscheinlichkeit gerade so definieren muss und ob man sie nicht auch anders definieren könnte. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht allein als eine rein mathematische Disziplin, in welchem Falle die Definition in der Tat willkürlich wäre, solange sie nicht den voher (ebenso willkürlich) festgelegten Axiomen widerspricht, dann muss der Rechtfertigungsgrund für diese Definition genauso wie für die vorhergehenden Kolmogorowschen Axiome in letzter Instanz ein empirischer sein: Die Axiome und Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind gültig, insofern sich damit Gesetzmäßigkeiten empirischer Wahrscheinlichkeitsphänomene richtig erfassen lassen. Andernfalls wären sie nicht mathematisch falsch aber empirisch unanwendbar. (Dasselbe gilt übrigens für alle Bereiche der Mathematik, sogar für das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Empirisch betrachtet, ist 2+2=4 weil zwei Äpfel und noch zwei Äpfel vier Äpfel sind und weil zwei Häuser und noch zwei Häuser vier Häuser sind, usf. Gäbe es irgendeinen Planeten auf dem zwei Äpfel und noch zwei Äpfel fünf statt vier Äpfel sind, dann wäre damit nicht die Mathematik natürlicher Zahlen widerlegt, aber sie wäre auf diesem Planeten unanwendbar.)

Um nun aber die oben aufgeführte Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit noch etwas besser zu motivieren, kann man darauf hinweisen, dass sich aus ihr unmittelbar, dass uns schon zuvor bekannte (oder wie man riskanterweise auch manchmal behauptet: das uns intuitiv einleuchtende) Gesetz für die *Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten* von und-verknüpften Ereignissen ergibt:

$$P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q|p)$$

Wegen der Kommutativität des logischen und-Operators $\wedge$ ergibt sich daraus unmittelbar auch:

$$P(p \wedge q) = P(q \wedge p) = P(q) \cdot P(p|q)$$

Beim Gesetz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten ist zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit des einen Ereignisses die unbedingte Wahrscheinlichkeit ist, die des anderen Ereignisses aber stets die Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung, dass das eine Ereignis eingetreten ist.

Dieser Zusammenhang wird bei empirischen Beispielen manchmal verdeckt. Berechnet man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass man bei zwei Münzwürfen beidemale hintereinander Zahl erhält, so würde man 1/2 mal 1/2 rechnen, also scheinbar $P(p) \cdot P(q)$ rechnen, wenn mit p die Aussage „Beim ersten Wurf lag die Zahl oben“ und mit q die Aussage „Beim zweiten Wurf lag die Zahl oben“ gemeint ist. Aber auch hier muss man Korrekterweise $P(p) \cdot P(q|p)$ rechnen, nur sind beim Münzwurf die Ereignisse p und q unabhängig, so dass – wiederum per Definition für unabhängige Ereignisse (siehe unten) – gilt $P(q|p) = P(q)$, womit die Rechnung $P(p) \cdot P(q|p)$, wenn man Zahlen einsetzt, eben genauso aussieht wie die Rechnung $P(p) \cdot P(q)$. In Wirklichkeit ist es aber eine andere Rechnung.

Deutlicher wird dies an einem zweiten Beispiel: Zu berechnen sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unternehmen U eine Gewinnwarnung ausgibt *und* der Aktienkurs von U dennoch steigt. Wenn q die Aussage ist „U gibt eine Gewinnwarnung aus“ und p die Aussage „Der Aktienkurs von U steigt“ und p|q die Aussage „Der Aktienkurs von U steigt nachdem eine Gewinnwarnung ausgegeben wurde“, dann ist recht offensichtlich, dass man, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass eine Gewinnwarnung ausgegeben wird *und* der Aktienkurs steigt, rechnen muss $P(p \wedge q) = P(q) \cdot P(p|q)$. Denn wenn schon einmal eine Gewinnwarnung ausgegeben wurde, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs trotzdem steigt natürlich eine ganz andere als die, dass der Aktienkurs einfach so steigt.

Aus dem Gesetz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten undverknüpfter Ereignisse ergibt sich eine naheliegende Definition für die Unabhängigkeit von Ereignissen. Zwei Ereignisse p und q sind *statistisch unabhängig*, wenn:

$$P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q)$$

Da das Gesetz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten bereits besagt, dass $P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q|p) = P(q) \cdot P(p|q)$, so folgt unmittelbar:

$$P(p|q) = P(p) \qquad \text{und} \qquad P(q|p) = P(q)$$

In Worte gefasst sind zwei Ereignisse also dann statistisch unabhängig voneinander, wenn sie als Bedingung des anderen keinen Einfluss auf die Größe von dessen Wahrscheinlichkeit ausüben. Wenn man mit p|q das Ereignis p unter der Bedingung von q darstellt, so ist damit noch nicht ausgeschlossen, dass das Ereignis p unabhängig von der Bedingung q ist. (Umgangssprachlich würden wir freilich nur von den Bedingungen eines Ereignisses sprechen, wenn das Ereignis gerade nicht unabhängig davon ist. Andernfalls würden wir den Ausdruck „Bedingung“ wahrscheinlich nicht verwenden. Die Fachsprache deckt sich hier, wie so oft, nicht mit der Umgangssprache!)

Sind p und q statistisch unabhängig von einander, dann gilt auch, dass p und $\neg q$ statistisch unabhängig sind.

Beweis:

$$p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Da $(p \wedge q)$ und $(p \wedge \neg q)$ einander ausschließen, gilt nach Axiom 3:

$$P(p) = P((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) = P(p \wedge q) + P(p \wedge \neg q)$$

Das lässt sich umformen zu:

$$P(p \wedge \neg q) = P(p) - P(p \wedge q)$$

Da nach Voraussetzung p und q statistisch unabhängig sind, gilt: $P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q)$. In der vorhergehenden Gleichung dürfen wir also $P(p \wedge q)$ durch $P(p)P(q)$ ersetzen und erhalten:

$$P(p \wedge \neg q) = P(p) - P(p)P(q) = P(p) \cdot (1 - P(q))$$

Nach Corrolar 1 ist aber $1 - P(q) = P(\neg q)$. Somit erhalten wir:

$$P(p \wedge \neg q) = P(p)P(\neg q)$$

Also sind nach der Definition der statistischen Unabhängigkeit auch p und $\neg q$ voneinander unabhängig. q.e.d.

Dementsprechend gilt: Wenn p statistisch unabhängig von q ist, dann ist nicht nur $P(p|q) = P(p)$ sondern auch $P(p|\neg q) = P(p)$. Kurz, wenn p unabhängig von q ist, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit von p nicht durch irgendwelche Informationen hinsichtlich der Frage, ob q eingetreten ist oder nicht. (Aber genauso würden wir es von unabhängigen Ereignissen ja auch erwarten.)

Bei mehr als zwei Ereignissen legt man wie bei der Unvereinbarkeit üblicherweise die *paarweise* Unabhängigkeit zu Grunde. Ähnlich wie sich bei bei paarweise *unvereinbaren* Ereignissen die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins davon eintritt (oder-Verknüpfung) der *Summe* der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse entspricht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ereignisse einer Menge von paarweise *unabhängigen* Ereignissen eintritt, gleich dem *Produkt* der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse.

Der Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ist nicht immer vollkommen intuitiv. Einige Dinge sollte man im Auge behalten: Durch das Hinzufügen von Bedingungen kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses - sofern das Ereignis nicht statistisch unabhängig von der Bedingung ist - größer oder auch kleiner werden. (Es ist also nicht wahr, dass irgendein Grundsatz der Art: „Je mehr Bedingungen, desto unwahrscheinlicher ein Ereignis“ gelten würde). Beispiel: Angenommen, auf Grund historischer Erfahrungswerte weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktienkurse eines großen Gartenbauunternehmens im Frühjahr mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit w steigen. Dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass sie steigen, wenn das Gartenbauunternehmen im ersten Quartal Gewinne ausweisen konnte, sicher größer sein als w, während sie unter der Bedingung, dass es Verluste melden musste, wahrscheinlich kleiner sein wird.

Schließlich ist noch auf eine Verwechselungsmöglichkeit aufmerksam zu machen. Die Wahrscheinlichkeit, dass „q unter der Bedingung, dass p“ eintritt (P(q|p)) ist nicht zu verwechseln mit der Wahrscheinlichkeit von „q wenn p“ ($P(p \rightarrow q)$). Ein Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit aus einem Stapel von

Karten eine Karte mit Herz zu ziehen (q) beträgt 1/4. Unter der Bedingung, dass vorher alle schwarzen Karten entfernt wurden (p), beträgt sie P(q|p) = 1/2. Andererseits aber beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass es wahr ist, dass „wenn eine rote Karte gezogen wird, dann ist es eine Herz-Karte“ $P(p \rightarrow q) = 3/4$, denn die Aussage ist auch dann wahr wenn überhaupt keine rote Karte gezogen wird, was bereits in der Hälfte aller Fälle gilt. Die Bedingungsaussage q|p ist also nicht zu verwechseln mit der Implikationsaussage $p \rightarrow q$. Der Unterschied ist der zwischen der bedingten Behauptung des Folgeglieds einer Implikation und der Behauptung der Gültigkeit einer Implikationsbeziehung selbst, einer subtiler, aber wichtiger Unterschied.

5.2 Der Bayes'sche Lehrsatz

Aus dem Gesetz für die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten

$$P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q|p) = P(q) \cdot P(p|q)$$

lässt sich durch Division von P(p) bzw. P(q) die Regel ableiten:

$$P(p|q) = \frac{P(q|p) \cdot P(p)}{P(q)} \qquad \text{wenn} \qquad P(q) > 0$$

Um den eigentlichen Bayes'schen Lehrsatz abzuleiten, ist es notwendig, den Ausdruck P(q) im Nenner durch einen Ausdruck zu ersetzen, der die absolute Wahrscheinlichkeit von q nicht mehr enthält. (Man kann an dieser Stelle durchaus die Frage stellen, warum das tun sollte, wenn doch dadurch, wie gleich zu sehen ist, die Formel nur sehr viel komplizierter ist. Aber wie das eingangs zu dieser Vorlesung angeführte Beispiel vielleicht verdeutlicht hat – wir werden gleich darauf zurück kommen – gibt es viele Situationen, in denen wir die unbedingten Wahrscheinlichkeiten irgendeines Vorgangs nicht kennen, wohl aber die bedingten Wahrscheinlichkeiten.) Dazu erinnern wir uns der aus der Logik (bzw. der Mengentheorie) bekannten Zerlegung von $q = (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$. Da $q \wedge p$ und $q \wedge \neg p$ einander ausschließen gilt:

$$P(q) = P(q \wedge p) + P(q \wedge \neg p)$$

Mit Hilfe des Multiplikationsgesetzes ergibt sich daraus:

$$P(q) = P(q|p) \cdot P(p) + P(q|\neg p) \cdot P(\neg p)$$

Durch Einsetzen in die oben angegebene Regel ergibt sich damit der berühmte Bays'sche Lehrsatz:

$$P(p|q) = \frac{P(q|p) \cdot P(p)}{P(q|p)P(p) + P(q|\neg p)P(\neg p)}$$

Wie in aller Welt soll man sich dieses Formel-Ungetüm merken und wozu ist es überhaupt gut? Man kann sich die Bedeutung dieser Formel mit Hilfe folgender, in vielen Zusammenhängen nützlichen Interpretation merken: Was uns die Formel auf der linken Seite als Ergebnis liefert ist die Gültigkeit einer Annahme p unter der Bedingung, dass irgendeine Probe bzw. ein Test q erfolgreich durchgeführt worden ist, der geeignet ist, die Annahme p zu stützen. Auf der rechten Seite kommen nur drei verschiedene Terme vor. Einige davon allerdings mehrfach, nämlich:

1. Die *Basisrate* P(p), d.i. die Wahrscheinlichkeit, unter der die Annahme p normalerweise stimmt, sowie die inverse Basisrate $P(\neg p) = 1 - P(p)$

2. Die *positiv-positiv Rate* P(q|p), d.i. die Wahrscheinlichkeit, dass die Probe q (wie sie es sollte) positiv ausfällt, wenn p gegeben ist.

3. Die *positiv-negativ Rate* $P(q|\neg p)$, d.i. die Wahrscheinlichkeit, dass die Probe q positiv aus fällt obwohl p nicht gegeben ist (was die Probe eigentlich nicht tun sollte)

Die letzten beiden Wahrscheinlichkeiten beschreiben Fehlerwahrscheinlichkeiten des Testverfahrens q, und zwar unterschiedliche Fehlerwahrscheinlichkeiten! Die *negativ-positiv* und *negativ-negativ* Raten sind dagegen die Inversen der entsprechenden positiv-* Raten und berechenen damit nach: $P(\neg q|p) = 1 - P(q|p)$ bzw. $P(\neg q|\neg p) = 1 - P(q|\neg p)$. Mit der Bayes'schen Formel berechnet man also die Wahrscheinlichkeit, dass p zutrifft, wenn ein Testverfahren q positiv ausfällt. Die Unvollkommenheiten des Testverfahrens werden dabei durch die positiv-positiv und die positiv-negativ Raten charakterisiert. Die Wahrscheinlichkeit von p, wenn der Test positiv ausgefallen ist, berechnet sich, wenn man die Formel in Worte fasst nach: Basisrate mal positiv-positiv Rate *geteilt durch* Basisrate mal positiv-positiv Rate plus inverse Basisrate mal positiv-negativ Rate.

5.2.1 Ein „Anwendungsbeispiel“: Bayes in der medizinischen Diagnostik

Mit diesem Wissen können wir nun auch die Aufgabe zu Beginn der Vorlesung lösen:

> Ca. 3% aller 70-jährigen haben Alzheimer. Auch wenn Alzheimer bisher nicht geheilt werden kann, ist die Früherkennung eine wichtige Voraussetzung für vorbeugende, den Krankheitsverlauf evtl. mildernde Maßnahmen. Leider lässt sich Alzheimer nur

> schwer präzise diagnostizieren. (Erst durch Gewebeuntersuchungen am verstorbenen Patienten lässt sich mit Sicherheit feststellen, ob eine Alzheimererkrankung vorlag.) Angenommen einmal, die Forschung hätte einen Gedächtnistest entwickelt, durch den eine vorliegende Alzheimererkrankung mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar ist, an dem im Durchschnitt aber auch 2% der älteren Menschen scheitern, selbst wenn sie nicht an Alzheimer erkrankt sind.
>
> Angenommen, Sie sind Ärztin oder Arzt und untersuchen einen 70-jährigen Patienten mit Hilfe des Gedächnistests. Es zeigt sich, dass der Patient nicht mehr in der Lage ist, die Aufgaben des Tests zu lösen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient an Alzheimer erkrankt ist?

Bei diesem Beispiel, gilt offenbar:

1. Basisrate P(p) = 3% (Anteil der Alzheimerkranken unter den 70-jährigen)
2. positiv-positiv Rate P(q|p) = 95% (eine vorliegende Alzheimererkrankung ist mit Hilfe des Tests mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar)
3. positiv-negativ Rate $P(q|\neg p) = 2\%$ (in 2% der Fälle löst der Test „Fehlalarm“ aus)

In die Bayes'sche Formel eingesetzt ergibt dies:

$$\frac{0,03 \cdot 0,095}{0,03 \cdot 0,095 + 0,097 \cdot 0,02} = 0,59\%$$

Mit 59%-iger Wahrscheinlichkeit ist der Patient also an Alzheimer erkrankt. Wie kann das sein, mag man sich fragen, dass der Wert nur 59% beträgt, wenn ein Test, der die Krankheit doch zu 95% diagnostiziert, positiv ausgefallen. Der Grund ist, dass die Krankheit unter den 70-jährigen überhaupt nur selten vorkommt und dass damit die *Basisrate* recht niedrig ist.

Wie nützlich der Bayes'sche Lehrsatz ist, tritt so recht dann zu Tage, wenn man ihn mehrfach hintereinander anwendet. Stellen Sie sich unsere Geschichte folgendermaßen fortgesetzt vor:

> Als Arzt oder Ärztin sind Sie nicht damit zufrieden, dass Sie die Alzheimererkrankung des Patienten bisher nur mit 59%-iger Wahrscheinlichkeit diagnostizieren konnten. Also wenden Sie

noch einen zweiten Test, diesmal einen Test mit Rechenaufgaben an, um ihre Diagnose ggf. zu erhärten. Der zweite Test ist etwas weniger zuverlässig als der erste, indem eine vorliegende Krankheit nur in 90% aller Fäller richtig erkannt wird, aber auch in 10% Fehlalarm gegeben wird, obwohl gar keine Erkrankung vorliegt.

Angenommen, Ihr Patient scheitert an den Rechenaufgaben dieses zweiten Tests. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie nun davon ausgehen, dass er tatsächlich an Alzheimer erkrankt ist?

Um die Aufgabe zu lösen, wendet man wiederum den Bayes'schen Lehrsatz an, nur dass man diesmal als Basisrate dass Ergebnis des ersten Tests einsetzt. Wir wissen ja schon, dass der Patient zu 59% erkrankt ist. Die Rechnung liefert dann ein Ergebnis von:

$$\frac{0,59 \cdot 0,9}{0,59 \cdot 0,9 + 0,41 \cdot 0,1} = 0,93$$

Durch die kombinierte Anwendung beider Tests ist die Erkrankung nun also mit ca. 93%-iger Sicherheit festgestellt. Eine wichtige Voraussetzung für die verkettete Anwendung des Bayes'schen Lehrsatzes besteht darin, dass die einzelnen Testverfahren statistisch voneinander unabhängig sind, d.h. wenn die Testperson krank ist, darf die Wahrscheinlichkeit, dass der der zweite Test die Krankheit korrekt diagnostiziert (positiv-positiv Rate) nicht davon abhängen, ob auch der erste Test unter dieser Bedingung die Krankheit richtig diagnostiziert hat. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die positiv-negativ Rate. Wäre der zweite Test in unserem Beispiel wiederum ein Gedächnistest gewesen, so hätte man Anlass zu der Annahme, dass die beiden Tests nicht statistisch unabhängig voneinander sind. (Für den Rechentest wollen wir einmal gutgläubig vermuten, dass er unabhängig vom Gedächnistest ist.)

5.2.2 Wieviel Geld sind Informationen wert?

Der Bayes'sche Lehrsatz lässt sich auch einsetzten, wenn es darum geht, den Wert von unsicheren Informationen zu beurteilen. Dazu muss man allerdings zunächst klären, wie hoch man den Wert von Informationen überhaupt zu veranschlagen hat. Resnik führt dazu folgendes gedachte Beispiel an [23, S. 57]:

Jemand steht vor der Entscheidung, € 50.000 in eine Firma zu investieren oder lieber in Sparbriefen anzulegen. Die Investition in die Firma würde im

Laufe eines Jahres 5% Zinsen einbringen, die in Sparbriefe 10%. Was die Investition in die Firma dennoch interessant macht ist, dass sie möglicherweise noch im Laufe desselben Jahres an die Börse geht. Dann nämlich würden sich die investierten € 50.000 verdoppeln. Als Entscheidungstabelle dargestellt, sieht die Situation also folgendermaßen aus:

	Börsengang	Kein Börsengang
Investiere	€ 100.000	€ 52.500
Kaufe Sparbriefe	€ 55.000	€ 55.000

Angenommen, die Person, die vor dieser Entscheidung steht, hält sich an das Indifferenzprinzip und geht davon aus, dass eine 50% Chance besteht, dass die Firma an die Börse geht. In diesem Fall hätte die Entscheidung zu investieren einen Erwartungswert von € 100.000·0.5 + € 52.500·0.5 = € 76.250 und wäre damit dem Kauf von Sparbriefen vorzuziehen. Nun nehmen wir weiterhin an, es gäbe in der Firma einen Insider, der mit Sicherheit sagen könnte, ob die Firma im Laufe des Jahres an die Börse geht oder nicht, und dieser Insider wäre bereit seine Information zu verkaufen. Wieviel Geld sollte einem diese Information Wert sein. Das hängt wiederum davon ab, welche subjektive Einschätzung man über die Wahrscheinlichkeit hat, dass die Information dahingehend lautet, dass die Firma an die Börse geht. Nehmen wir an, dass in Ermangelung näheren Wissens wiederum von einer 50% Chance ausgegangen wird. Welchen Erwartungswert erzielt man mit dieser Information? In diesem Fall lautet die Rechnung € 100.000·0.5 + € 55.500·0.5 = € 77.500, weil in dem Fall, dass man erfährt, dass die Firma doch nicht an die Börse geht, Sparbriefe kaufen wird. Die Information sollte einem also höchstens € 1.250 Wert sein.

Um nun die Bayes'sche Formel ins Spiel zu bringen, gehen wir von der etwas realistischeren Annahme aus, dass die Information des Insiders nicht völlig zuverlässig ist. Wir nehmen vielmehr an, dass sie einem internen Bericht entnommen ist, von dem nicht sicher ist, wie zuverlässig er ist. Angenommen aus vergleichbaren Fällen ist bekannt, dass wenn ein Börsengang geplant ist, dies mit einer 90%-igen Wahrscheinlichkeit in dem Bericht korrekt mitgeteilt wird, mit einer 10%-igen Wahrscheinlichkeit aber das Gegenteil behauptet wird. Angenommen weiterhin, wir hätten Grund zu der Annahme, dass wenn kein Börsengang stattfinden wird, dennoch mit einer 50%-igen Wahrscheinlichkeit in dem Bericht behauptet wird, es würde ein Börsengang statt finden. Welche Überlegung muss die Person, die vor der Frage steht, ob es sich lohnt, Geld in die Bestechung eines Informanden zu investieren, nun anstellen? Zunächst müsste sie die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit der die Firma an die Börse geht, falls dies in dem Bericht behauptet wird. Und ebenso müsste die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, falls dies in dem Bericht bestritten wird.

Für beide Rechnungen muss man die Bayes'sche Formel heranziehen. In beiden Fällen ist die Basisrate wiederum die subjektive Wahrscheinlichkeit, die für einen Börsengang spricht, von 50%. Im ersten Fall beträgt die positiv-positiv Rate 90% und die positiv-negativ Rate 50%. Wenn b das Ereignis ist, dass die Firma an die Börse geht und j das Ereignis, dass im Bericht behauptet wird, dass sie es tut und n das Ereignis, dass im Bericht behauptet wird, dass sie es nicht tut, dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(b|j) = \frac{P(b)P(j|b)}{P(b)P(j|b) + P(\neg b)P(j|\neg b)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,5} = 0,643$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Firma nicht an die Börse geht, im Bericht behauptet wird, dass sie es tut $P(\neg b|j)$, ist natürlich genau die inverse Wahrscheinlichkeit, also $P(\neg b|j) = 1 - P(b|j) = 0,357$.

Im zweiten Fall, d.h. in dem Fall, dass der Bericht einen Börsengang dementiert, betragen die entsprechenden Raten 10% und 50%. Die Rechnung sieht wie folgt aus:

$$P(b|n) = \frac{P(b)P(n|b)}{P(b)P(n|b) + P(\neg b)P(n|\neg b)} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{0,5 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5} = 0,167$$

Die entsprechende inverse Wahrscheinlichkeit $P(\neg b|n)$ beträgt 0,833.

Für die Beantwortung der Frage, welchen Wert eine entsprechend (un-)zuverlässige Information hat, müssen nun die Erwartungswerte berechnet werden, 1) für den Fall, dass die Information dahingehend lautet, dass das Unternehmen an die Börse geht, und 2) für den Fall, dass die Information anders lautet, wobei der durch die eben berechneten Wahrscheinlichkeiten umschriebene Zuverlässigkeitsgrad der Information zu berücksichtigen ist. Es ergibt sich in dem ersten Fall (Börsengang wird behauptet) ein Erwartungswert von:

$$0,643 \cdot € \text{ } 100.000 + 0,357 \cdot € \text{ } 52.500 = € \text{ } 83.035{,}71$$

Und für den zweiten Fall:

$$0,167 \cdot € \text{ } 100.000 + 0,833 \cdot € \text{ } 52.500 = € \text{ } 60.416{,}67$$

Das bedeutet aber, dass egal wie die Information ausfällt, es auf jeden Fall besser wäre, in die Firma zu investieren. Die Information selbst ist also wertlos!

(Nun könnte man noch die Frage anschließen, wie der Fall zu beurteilen wäre, wenn – bei anderen Wahrscheinlichkeiten – im zweiten Fall ein Wert herausgekommen wäre, der niedriger wäre als € 55.000. Dann müsste man, wie zuvor, den Erwartungswert, mit dem man in dem Fall rechnet, dass die Information positiv ausfällt, zu den € 55.000 addieren, die man in dem Fall erhält, dass die Information negativ ausfällt und man Sparbriefe kaufen wird. Beide Summanden müssten mit den subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen dafür, wie die Information ausfällt, gewichtet werden (wofür wir eine gleichverteilte Wahrscheinlichkeit von 50% veranschlagt hatten). Das Ergebnis wäre mit dem Erwartungswert ohne jede Information von € 76.250 zu vergleichen, und entsprechend der Differenz der Wert der Information zu veranschlagen.)

Bei diesem Beispiel ist zu beachten, dass die mit Hilfe des Bayes'schen Lehrsatzes berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten davon abhängen, welche subjektive Wahrscheinlichkeitseinschätzung man bezüglich der in die Bayes'sche Formel eingesetzten Basisrate vornimmt. Es handelt sich um (rationale) subjektive Wahrscheinlichkeitseinschätzungen, nicht um „objektiv berechnete Wahrscheinlichkeiten".

Damit sind wir wieder bei dem Problem der Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen, d.h. bei Frage, ob es sich um Aussagen über Häufigkeiten, subjektive Einschätzungen oder objektive „Propensitäten" handelt. Mit diesem Problem werden wir uns in der nächsten Woche beschäftigen.

5.3 Aufgaben 4 (6. Mai)

1. Ca. 3% aller 70-jährigen haben Alzheimer. Auch wenn Alzheimer bisher nicht geheilt werden kann, ist die Früherkennung eine wichtige Voraussetzung für vorbeugende, den Krankheitsverlauf evtl. mildernde Maßnahmen. Leider lässt sich Alzheimer nur schwer präzise diagnostizieren. (Erst durch Gewebeuntersuchungen am verstorbenen Patienten lässt sich mit Sicherheit feststellen, ob eine Alzheimererkrankung vorlag.) Angenommen einmal, die Forschung hätte einen Gedächtnistest entwickelt, durch den eine vorliegende Alzheimererkrankung mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar ist, an dem im Durchschnitt aber auch 2% der älteren Menschen scheitern, selbst wenn sie nicht an Alzheimer erkrankt sind.

   Durch einen zweiten Test, der etwas weniger zuverlässig ist als der erste, wird eine Vorliegende Krankheit in 90% aller Fälle richtig erkannt und mit 10% Wahrscheinlichkeit wird Fehlalarm gegeben, obwohl gar keine Erkrankung vorliegt.

   Aufgabe: Angenommen beide Tests fallen positiv aus. Zeigen Sie durch Rechnung oder, wenn Sie können, durch einen mathematischen Beweis: Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Tests durchgeführt werden.

2. Angenommen bei der vorhergehenden Aufgabe würde mindestens einer der Tests negativ ausfallen, können Sie dann auch eine präzise Aussage über die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung machen?

3. Zeigen Sie, dass die Bayes'sche Formel für das inverse Ereignis, dass der Patient nicht krank ist, obwohl der Test positiv ausgefallen ist (nicht zu verwechseln mit dem Ereignis, dass er nicht krank ist, wenn der Test negativ ausgefallen ist!) wie wir es erwarten würden gleich 1 minus dem ursprünglichen Ereignis ist, also $P(\neg p|q) = 1 - P(p|q)$. Zeigen Sie dies entweder durch eine Rechnung für das Beispiel oder, besser noch, durch einen mathematischen Beweis.

4. Eine Menge von Ereignissen $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ heisst paarweise unvereinbar, wenn für jedes Paar p_i, p_k gilt, dass p_i und p_k miteinander unvereinbar sind. Dagegen nennt man eine Menge $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ von Ereignissen vollständig unvereinbar, wenn niemals alle Ereignisse aus der Menge eintreten können. Zeigen Sie: Paarweise Unvereinbarkeit ist *stärker* als vollständige Unvereinbarkeit, indem eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse immer auch vollständig unvereinbar ist, aber nicht umgekehrt.

5. a) Zeigen Sie, aus dem 3. kolmogorowschen Axiom (wenn p und q unvereinbar, dann $P(p \vee q) = P(p) + P(q)$) folgt: Für jede endliche Menge von paarweise unvereinbaren Ereignissen p_i mit $0 \leq i < n, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P(\bigvee_{0 \leq i < n} p_i) = P(p_1 \vee p_2 \vee \ldots) = P(p_1) + P(p_2) + \ldots = \sum_{0 \leq i < n} P(p_i)$$

Warum kann man nicht in gleicher Weise das Axiom 3' ($P(\sum_{i=0}^{\infty} p_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(p_i)$) aus Axiom 3 ableiten? (Bemerkung: Wäre eine solche Ableitung möglich, dann müsste man Axiom 3' auch nicht als Axiom einführen.)

6. Leiten Sie eine Formel für $P(q_1 \vee q_2 \vee q_3)$ analog zum Corollar 5 aus der Vorlesung her. Können Sie auch eine entsprechende Vorschrift für $P(\bigvee_{i=1}^{n} q_i)$ formulieren?

7. Bonferroni's Ungleichung besagt:

$$P(p \wedge q) \geq P(p) + P(q) - 1$$

Beweisen Sie Bonferroni's Ungleichung.

8. In der Vorlesung wurde für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und-verknüpfter Ereignisse das Beispiel eines Aktienunternehmens U angeführt, das eine Gewinnwarnung ausgibt. Dabei war:

   - q die Aussage „U gibt eine Gewinnwarnung aus“
   - p die Aussage „Der Aktienkurs von U“ steigt

   Die Wahrscheinlichkeit, dass U eine Gewinnwarnung ausgibt *und* der Aktienkurs von U steigt, wurde berechnet nach:

$$P(p \wedge q) = P(q) \cdot P(p|q)$$

   Wegen der Kommutativität des und-Operators $\wedge$ hätte man, rein mathematisch betrachtet, aber auch

$$P(p \wedge q) = p(p) \cdot P(q|p)$$

   rechnen dürfen. Wie müsste man die zweite Formel in Worten wiedergeben? Führt dies zu einer sinnvollen Interpretation? Wonach richtet sich, welche der beiden Formeln man verwenden wird?

9. Zeigen Sie: a) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von einer Menge von paarweise unvereinbaren Ereignissen eintritt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

   b) Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ereignisse einer Menge von paarweise unabhängigen Ereignissen eintreten, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

   c) Wenn die Ereignisse nicht paarweise unvereinbar bzw. unabhängig sind, wird die entsprechende Wahrscheinlichkeit dann größer oder kleiner?

10. Sei $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine Menge von Ereignissen, die paarweise unvereinbar sind, von denen aber ein Ereignis auf jeden Fall eintreten muss. Sei q weiterhin ein Ereignis dessen Wahrscheinlichkeit nicht 0 ist. a) Zeige, dass dann folgende erweiterte Form des Bayes'schen Lehrsatzes gilt:

$$P(p_i|q) = \frac{P(q|p_i)P(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(q|p_i)P(p_i)}$$

   (*Hinweis:* Der Beweis kann ganz analog zu dem Beweis des Bayes'schen Lehrsatzes aus der Vorlesung geführt werden.)

6 Wahrscheinlichkeiten II: Interpretationsfragen

Diese Vorlesung setzt zwar keine besonders tiefgehenden Mathekenntnisse voraus, dürfte für mathematisch Ungeübte aber trotzdem streckenweise schwer zu verstehen sein! Wer sie nicht oder nicht ganz versteht, sollte darüber hinweg lesen. Die folgenden Vorlesungen setzen zwar die Kenntnisse der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der letzten Vorlseung voraus, aber nicht unbedingt das Verständnis der diese Woche besprochenen philosophischen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

In der letzten Vorlesungsstunde haben wir uns mit dem mathematischen Wahrscheinlichkeitskalkül und den grundlegenden Rechentechniken der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut gemacht. Wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet wissen wir also nun. Eine ganz andere Frage ist die, was Wahrscheinlichkeiten eigentlich sind. Während die mathematische Theorie der der Wahrscheinlichkeiten spätestens seit der Axiomatisierung durch Kolmogorow in ihren Grundlagen feststeht, ist die philosophische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wie zu erwarten, ein äußerst umstrittenes Feld. In der letzten Stunde wurde bereits erwähnt, dass es grundsätzlich drei unterschiedliche Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gibt:

1. *Häufigkeitstheorie*: Die Wahrscheinlichkeit bezeichnet die Häufigkeit des Vorkommens eines Merkmals in einer Gesamtheit.

2. *Glaubensgrad* (subjektive Wahrscheinlichkeit): Die Wahrscheinlichkeit bezeichnet den Grad des Glaubens an das Eintreten eines Ereignisses, z.B. wenn man eine Wette abschließt.

3. *Propensitäten* (objektive Wahrscheinlichkeit): Die Wahrscheinlichkeit bezeichnet die „Neigung“ mit der Ereignisse in der äußeren Welt eintreten, z.B. die Neigung, mit der bei starkem Neuschnee in einem bestimmten Gebiet Lawinen ausgelöst werden.

Andere Einteilungen sind wie immer möglich (Schurz beispielsweise unterscheidet lediglich die „statistische (objektive) Wahrscheinlichkeit“ von der „subjektive[n] (epistemischen) Wahrscheinlichkeit“ [24, S.99]]).

Diese unterschiedlichen Interpretationen der Warscheinlichkeitstheorie wollen wir in dieser Vorlesungsstunde genauer betrachten. Am wichtigsten sind dabei die subjektiven Wahrscheinlichkeiten, weil sich die Nutzen- und Entscheidungstheorie sehr wesentlich auf subjektive Wahrscheinlichkeiten stützt. Wir werden sie daher ausführlich zum Schluss der Vorlesung besprechen. Zunächst soll kurz auf die Häufigkeitstheorie und die objektiven Wahrscheinlichkeiten eingegangen werden.

Bevor wir die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffe im Einzelnen untersuchen, kann man wiederum die Frage stellen, was ein gültiger Wahrscheinlichkeitsbegriff ist, d.h. welche Bedingungen ein Wahrscheinlichkeitsbegriff überhaupt erfüllen muss, damit wir ihn als Begriff von Wahrscheinlichkeit anerkennen. Da die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie einigermaßen feststehen, können wir vereinbaren solche Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als gültig zu erachten, von denen wir zeigen können, dass sie die kolmogorwschen Axiome erfüllen. Im Folgenden werden wir daher bei allen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zeigen, dass für das entsprechende Wahrscheinlichkeitskonzept die kolmogorwschen Axiome gelten.

Man kann natürlich weiterhin die Frage stellen, was passiert, wenn wir eine Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegiffs finden, die uns zwar nach dem Maßstab unseres Sprachgefühls als Ausdruck von „Wahrscheinlichkeit“ erscheint, die aber nicht die kolmogorowschen Axiome erfüllt. In diesem Fall hätten wir die Wahl, sie entweder doch nicht als Wahrscheinlichkeitsbegriff gelten zu lassen, oder so etwas wie „nicht-komogorowsche Wahrscheinlichkeiten“ zuzulassen. Aber das eher theoretische Überlegungen, die nur die innere Logik von Definitionen und Begriffsbildungen vor Augen führen sollen und außerdem als Hinweis dienen können, dass die hier besprochenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe selbstverständlich nicht für alle Zukunft fest stehen müssen. Für die im Folgenden zu untersuchenden Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs lässt sich jeweils zeigen, dass sie die Kolmogorowschen Axiome erfüllen.

6.1 Objektive Wahrscheinlichkeit

6.1.1 Klassische Wahrscheinlichkeit

Den Begriff der „klassischen“ oder auch „Laplaceschen“ Wahrscheinlichkeit kann man als eine Art Vorläufer der Häufigkeitstheorie betrachten. Der klassischen Wahrscheinlichkeit merkt man die Herkunft der Wahrscheinlichkeitstheorie aus dem Glücksspiel am deutlichsten an, denn sie definiert die Wahrscheinlichkeit als:

$$Wahrscheinlichkeit = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ der\ möglichen\ Fälle}$$

Wobei unter „günstigen“ Fällen diejenigen Fälle aus einer nicht-leeren Grundgesamtheit von *gleichartigen* möglichen Fällen zu verstehen sind, die

– aus welchem Grund auch immer – von Interesse sind. Typische Fälle sind z.B. die Wahrscheinlichkeit aus einem Stapel von 52 Spielkarten (mögliche Fälle) ein As zu ziehen (günstige Fälle), oder im Roulette unter allen möglichen Zahlen (einschließlich der Null 37 mögliche Fälle) eine gerade Zahl zu bekommen (18 günstige Fälle). Zu den wesentlichen Eigenschaften der klassischen Wahrscheinlichkeit gehört, dass sie ähnlich wie die etwas weiter unten besprochenen Propensitäten eine Wahrscheinlichkeit für den *Einzelfall* beschreibt. Auch wenn der Begriff der Wahrscheinlichkeit auf eine Gesamtheit von mehreren möglichen Fällen bezogen ist, ist es keineswegs erforderlich, dass der Vorgang, um den es geht (also z.B. das Ziehen einer Karte), mehrfach wiederholt wird oder wiederholbar ist, damit der klassische Begriff der Wahrscheinlichkeit Sinn hat. Denn auch, wenn man nur ein einziges Mal Roulette spielt, hat es Sinn zu sagen, dass es 37 mögliche und, wenn man z.B. auf Zahl setzt, einen günstigen Fall gibt.

Die möglichen Fälle, aus denen sich die Grundgesamtheit zusammensetzt, müssen sich wechselseitig ausschließen, wobei aber sicher ist, dass irgendeiner der Fälle eintritt, und sie müssen in einem gewissen Sinne „gleichartig“ sein. Diese „Gleichartigkeit“ lässt sich zwar im Einzelfall näher beschreiben (etwa bei einem Würfel die gleichmäßige Form und Masseverteilung), aber nicht leicht allgemein charakterisieren, denn die naheliegende Charakterisierung, dass die Fälle der Grundgesamtheit gleichartig sind, wenn sie alle gleichwahrscheinlich sind, fällt aus, weil sonst die Definition der (klassischen) Wahrscheinlichkeit zirkulär werden würde.

Ereignisse kann man in der klassischen Wahrscheinlichkeit in naheliegender Weise als Mengen möglichen Fäller und damit Teilmengen der Grundgesamtheit auffassen. Das Ereignis, aus einem Kartenspiel ein As zu ziehen umfasst beispielsweise die vier möglichen Fälle: Kreuz-As, Pik-As, Herz-As, Karo-As. (Daher bietet sich für die klassische Wahrscheinlichkeit auch in besonderer Weise die mengentheoretische Darstellung der mathematischen Wahrscheinlichkeit an, aber man kann ebensogut – der aussagenbasierten Darstellung in der letzten Vorlesung folgend – davon sprechen, dass das Ereignis, dass ein As gezogen wird, eingetreten, wenn die Aussage, „es wurde ein As gezogen“, wahr ist. Aussagen über Ereignisse kann man dabei immer mittels und-Verknüpfung aus Aussagen über Fälle der Grundgesamtheit zusammensetzen.)

Eine weitere Frage wäre die, ob man die klassische Definition eher als logisch-theoretische oder als empirische Definition auffassen will. Grundsätzlich ist die Definition eher logisch-theoretischer Natur und nur in dem weitläufigen Sinn empirisch als die Begriffe „günstige Fälle“, „mögliche Fälle“ und „Anzahl“ in einer unbestimmt großen (und nicht einmal zwangsläufig nicht-leeren) Menge von empirischen Anwendungskontexten einen konkreten

Sinn haben. Bezieht man diesen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf einen bestimmten Anwendungskontext, so geht man davon aus, dass die Eigenschaften der Gleichartigkeit und der wechselseitigen Ausschließlichkeit in diesem Kontext gegeben sind, was sich aber immer auch als empirisch falsch herausstellen kann.

Zu zeigen ist nun, dass die so definierte Wahrscheinlichkeit die kolmogorowschen Axiome erfüllt. Wir gehen dazu die Axiom einzeln durch:

1. *Axiom* ($0 \leq P(p)$): Da die Anzahlen von günstigen oder möglichen Fällen niemals kleiner 0 sind, ist diese Bedingung offensichtliche gegeben

2. *Axiom* ($P(p) = 1$ wenn p sicher ist): Da ein Ereignis genau dann sicher ist, wenn es alle möglichen Fälle der Grundgesamtheit enthält, und schon aufgrund der Definition keine Fälle enthalten kann, die nicht in der Grundgesamtheit enthalten sind, ergibt der definierende Qutient der klassischen Wahrscheinlichkeit für das[12] sichere Ereignis einen Wert von 1.

3. *Axiom* ($P(p \vee q) = P(p) + P(q)$ wenn p und q sich ausschließen): Zwei Ereignisse schließen sich dann aus, wenn jeder möglich Fall (der Grundgesamtheit), durch den das eine Ereignis eintritt, kein Fall ist, in dem das andere Ereignis eintritt. (Fassen wir Ereignisse als Mengen von möglichen Fällen auf, dann kann man auch sagen: Zwei Ereignisse schließen sich aus, wenn ihre Schnittmenge leer ist.) Dann tritt dasjenige Ereignis, das eintritt, wenn das eine Ereignis oder das andere Ereignis eintritt ($p \vee q$), aber in genauso vielen Fällen ein wie beide Ereignisse zusammen.

Die kolmogorowschen Axiome werden also durch den Begriff der klassischen Wahrscheinlichkeit erfüllt. Aber wie verhält es sich mit der bedingten Wahrscheinlichkeit? Da es für die bedingte Wahrscheinlichkeit eine mathematische Definition gibt ($P(p|q) := P(p \wedge q)/P(q)$), könnten wir uns eigentlich dabei beruhigen. Allerdings bliebe die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit sehr unbefriedigend, wenn man nicht auch die bedingte Wahrscheinlichkeit in Bezug mögliche und günstige Fälle (also in Bezug auf das „Modell" der klassischen Wahrscheinlichkeit) definieren würde. Tut man das aber, dann muss man zeigen, dass diese Definition mit dem mathematischen Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit übereinstimmt.

[12] Da „jedes" sichere Ereignis alle Fälle der Grundgesamtheit enthalten muss, gibt es nur noch ein sicheres Ereignis.

Für die klassische Wahrscheinlichkeit lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit in naheliegender Weise folgendermaßen definieren: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(p|q)$ ist die Anzahl der Fälle, in denen sowohl das Ereignis p als auch das Ereignis q eintritt, geteilt durch die Anzahl der Fälle, in denen nur q eintritt. Wenn q unmöglich ist, dann setzen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit auf 0 fest. Für $P(q) = 0$ entspricht die Definition dann bereits unmittelbar der Standarddefinition von $P(p|q) := 0 \Leftarrow P(q) = 0$. Andernfalls gilt:

$$\begin{aligned} P(p|q) &= \frac{\text{Anzahl } p \wedge q\text{-Fälle}}{\text{Anzahl } q\text{-Fälle}} \\ &= \frac{\text{Anzahl } p \wedge q\text{-Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}} \quad / \quad \frac{\text{Anzahl } q\text{-Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} \\ &= \frac{P(p \wedge q)}{P(q)} \end{aligned}$$

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in Bezug auf mögliche und günstige Fälle entspricht also genau der mathematischen Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit ist sicherlich die verständlichste und naheliegendste Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Sie wirft aber auch eine Reihe von mehr oder minder gravierenden Problemen auf:

1. Sie lässt sich nur dort anwenden, wo wir die Anzahl der möglichen Fälle feststellen können, d.h. wo eine endliche und wohlumrissene Grundgesamtheit vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit etwa, mit der es zu einem Börsencrash kommt, ließe sich mit der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit nicht mehr ohne Weiteres ausdrücken.

2. Die Fälle zu bestimmten, aus denen sich die Grundgesamtheit zusammensetzt, kann unter Umständen ein nicht-triviales Problem darstellen. Will man z.B. die Frage beantworten, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei zwei Münzwürfen zweimal Kopf zu erhalten, dann besteht die Grundgesamtheit aus den *vier* möglichen Kombinationen: Kopf-Kopf, Kopf-Zahl, Zahl-Kopf, Zahl-Zahl. Aber warum besteht sie nicht aus den *drei* möglichen Kombinationen: Beidemale Kopf, Beidemale Zahl, Einmal Kopf und einmal Zahl? Die Frage ist gar nicht so leicht zu beantworten, vor allem wenn man sich Situationen vorstellt, in denen die richtige Lösung nicht so offensichtlich ist.

3. Schließlich stellt sich das Problem, was zu tun ist, wenn die Fälle der Grundgesamtheit nicht gleichartig sind. Wenn wir uns beispielsweise

> einen Holzwürfel vorstellen, in dessen Innerem ein Stück Blei direkt unter der Eins angebracht ist, wie sollten wir die nun nicht mehr gleichverteilten Fälle von Würfen von eins bis sechs auf eine Grundgesamtheit gleichverteilter Fälle herunterbrechen? Was wären die Fälle der Grundgesamtheit, wenn es nicht mehr die möglichen Würfelergebnisse sein können?

Eine Antwort auf die letzte Frage gibt insbesondere die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit, der wir uns nun zuwenden.

6.1.2 Häufigkeitstheorie

Das Problem, das die Fälle der Grundgesamtheit nicht „gleichartig“ sind, und ebenso die Frage, wie man ggf. feststellen kann, ob sie es sind, wird in sehr naheliegender Weise durch die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit beantwortet. Nach der Häufigkeitstheorie besteht die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses darin, wie häufig es innerhalb einer Menge oder Folge von möglichen Ereignissen vorkommt. Präziser müsste man von der Häufigkeit eines Ereignistyps in einer Menge von Möglichkeiten, dem „Individuenbereich“ sprechen, denn bei der Häufigkeitstheorie bezieht sich die Wahrscheinlichkeit nicht mehr auf ein einzelnes Ereignis sondern auf mehrfach vorkommende bzw. wiederkehrende Ereignisse derselben Art. Nach der Häufigkeitstheorie würde man unter der Wahrscheinlichkeit, mit der es zu einem Flugzeugunglück auf der Strecke von Frankfurt nach New York kommt, die Häufigkeit verstehen, mit der dieses Ereignis bezogen auf alle Flüge von Frankfurt nach New York eintritt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit wäre dann die beispielsweise Häufigkeit, mit der Flugzeuge auf dem Flug von Frankfurt nach New York bei schlechtem Wetter abstürzen, wenn man in diesem Beispiel das schlechte Wetter einmal als Bedingung nimmt.

Entscheidend im Unterschied zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist, dass die Häufigkeitstheorie keine Grundgesamtheit gleichartiger im Sinne von „gleichmöglicher“ Fälle mehr voraussetzt, und daher auch auf einen wesentlichen breiteren Bereich von Phänomenen passt. Eine zweite wichtige Eigenschaft der Häufigkeitstheorie besteht darin, dass sie sich auf Ereignisfolgen unbestimmter Größe beziehen lässt. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit von „Kopf- oder Zahl“ bei einem Münzerwurf im Sinne der Häufigkeitstheorie verstehen, dann ist die Menge der Eriegnisse, auf die sich die Häufigkeit bezieht, d.h. die Menge der Münzwürfe überhaupt, unbestimmt groß. Wenn von Häufigkeit die Rede ist, so muss die relative Häufigkeit von der absoluten Häufigkeit unterschieden werden. Unter der absoluten Häufigkeit ist zu verstehen, wie oft ein bestimmtes Merkmal (z.B. Kopf beim Münzwurf) in einer Folge von Ereignissen (Münzwürfe überhaupt) auftritt. Die relative Häufigkeit ist dann durch den Quotienten definiert:

$$\text{relative Häufigkeit} := \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Größe der Ereignisfolge}}$$

Eine Schwierigkeit entsteht nun, wenn die Ereignisfolge unbestimmt groß ist: Wie soll man die relative Häufigkeit in diesem Fall bestimmen. Greift man nur eine bestimmte Teilfolge heraus, dann besteht die Gefahr, dass die relative Häufigkeit des Merkmals in dieser Teilfolge eine andere ist als die einer größeren Folge. Die relative Häufigkeit bezogen auf die Gesamtfolge lässt sich wegen der Unbestimmtheit ihrer Größe ja nicht feststellen. (Es ist praktisch unmöglich alle Münzwürfe, die jemals auf der Welt durchgeführt werden, zu registrieren.) Häufigkeitstheoretiker antworten darauf mit einer empirischen Hypothese, dem

> *Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten*: Bei Massenphänomenen (Münzwürfe, Würfel u.a.) stabilisiert sich die relative Häufigkeit bestimmter Merkmale mit zunehmender Zahl der Beobachtungen.[11, S. 92]

Wenn man etwas vorsichtiger ist, wird man das Gesetz nicht auf alle Massenphänomene schlechthin, sondern nur auf jeweils bestimmte Massenphänomene beziehen und damit die Möglichkeit zulassen, dass es Massenphänomene gibt, die nicht statistisch erfassbar sind. Akzeptiert man das Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten aber erst einmal, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitstheorie im Prinzip sehr einfach messen, indem man empirische Beobachtungen oder Experimente anstellt. Ab welcher Zahl von Beobachtungen die relative Häufigkeit bei einem Massenphänomen hinreichend stabil ist, damit wir zuverlässige statistische Aussagen darüber treffen können, ist keine Frage mehr, die die philosophischen Grundlagen der Häufigkeitstheorie betrifft, sondern die der Kunstlehre der Statistik überlassen bleibt. Für die Rechtfertigung der Häufigkeitstheorie muss diese Frage nicht entschieden werden.

Das empirische Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten motiviert eine bestimmte Art der Axiomatisierung speziell des *häufigkeitstheoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs*. Da der häufigkeitstheoretische Wahrscheinlichkeitsbegriff sich auf das Auftreten von Merkmalen in einer Ereignisfolge bezieht, wird dafür zunächst der Begriff eines *Kollektivs* definiert. Unter einem Kollektiv $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ versteht man unendliche Folgen von Merkmalen ω_n eines Merkmalsraumes Ω. Dass man in der mathematischen Darstellung der *unbestimmt großen* empirischen Ereignisfolgen *unendliche* Merkmalsfolgen verwendet, kann dabei – vergleichbar den „ausdehnungslosen Punkten“ in der Geometrie – als eine der Idealisierungen gerechtfertigt werden, deren man sich bei der mathematischen Repräsentation empirischer Sachverhalte stets bedient. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Merkmals wird dabei immer auf ein solches Kollektiv bezogen. Die Häufigkeitstheorie definiert die Wahrscheinlichkeiten also von vornherein als bedingte Wahrscheinlichkeiten. Von diesen „Kollektive“ genannten Merkmalsfolgen wird nun verlangt, dass sie die folgenden beiden Axiome erfüllen (Vgl. [11, S.97, 105]):

1. Axiom (*Axiom der Konvergenz*): Sei A eine beliebige Menge von Merkmalen des Kollektivs $\mathcal{C}$ und $m(A)$ die Häufigkeit, mit der Merkmale dieser Menge unter den ersten n Folgegliedern des Kollektivs auftreten, dann *existiert* der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} m(A)/n$ und es gilt per Definition $P(A|\mathcal{C}) := \lim_{n\to\infty} m(A)/n$

2. Axiom (*Axiom der Zufälligkeit*): Für jedes *zufällig* ausgewählte Teilkollektiv $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$ gilt: $P(A|\mathcal{C}') = P(A|\mathcal{C})$, d.h. der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Teilkollektivs $\mathcal{C}'$ muss derselbe sein wie der Grenzwert des relativen Häufigkeit des Kollektivs $\mathcal{C}$ selbst.

Bezüglich dieser Axiome stellen sich nun drei Fragen: 1. Ist die Axiomatisierung sinnvoll, d.h. was sagen die beiden Axiome eigentlich aus und warum werden beide gebraucht? 2. Ist mit diesen Axiomen *eine* Wahrscheinlichkeit im Kolmogorowschen Sinne definiert? 3. Gibt es Einwände gegen die Axiome und insbesondere, gibt es Wahrscheinlichkeiten, die von diesen Axiomen nicht erfasst werden?

1. Erläuterung. Zunächst zur Erläuterung dieser Axiome. Das erste Axiom verlangt, dass in jedem Kollektiv der Grenzwert der relativen Häufigkeit jeden darin vorkommenden Merkmals existiert. Kann man dergleichen überhaupt per Axiom fordern? Was ist mit Folgen (weiter unten werden wir eine kennen lernen), bei denen dies nicht der Fall ist? Die Antwort ist: Da die Axiome *implizite Definitionen* der darin vorkommenden Begriffe sind, sind Merkmalsfolgen, bei denen für mindestens ein Merkmal der Grenzwert der relativen Häufigkeit nicht definiert ist, keine Kollektive im Sinne der Haufigkeitstheorie. Für solche Folgen sind dementsprechend auch keine Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Häufigkeitstheorie definiert.

Das zweite Axiom fordert, dass auch jede *zufällig*(!) ausgewählte Teilfolge für alle Merkmale denselben Grenzwert der relativen Häufigkeit aufweist. Das zweite Axiom ist deshalb notwendig, weil nur so sichergestellt ist, dass sich Sitchproben aus dem Kollektiv im Sinne des *Gesetzes der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* auf Lange Sicht auf denselben Grenzwert stabilisieren. Natürlich kann ein Axiom niemals sicherstellen, dass das empirisch tatsächlich der Fall ist, aber wenn man schon annimmt, dass das *Gesetzes der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* empirisch gilt, dann muss man es im Rahmen einer axiomatischen Theorie, die empirisch angewendet werden soll, in irgendeiner Form erfassen, entweder als Axiom oder als abgeleitetes Theorem.

Die Schwierigkeit von Axiom 2, die den Erfindern der Häufigkeitstheorie über viele Jahre Kopfzerbrechen bereitet hat [11, S. 105ff.], liegt in dem Ausdruck *zufällig* verborgen. Man kann sich leicht überlegen, dass, wenn die Auswahl der Teilfolge nicht zufällig getroffen wird, die Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitstheorie nur noch für triviale Kollektionen definiert wäre, in denen die Wahrscheinlichkeit jedes Merkmals entweder 0 oder 1 ist. Denn wenn die nach Axiom 1 definierte Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Merkmals A (oder präziser einer Menge von Merkmalen A) in einem Kollektiv $\mathcal{C}$ nicht 1 ist, dann müsste man nur diejenige Teilfolge $\mathcal{C}'$ auswählen, die aus genau den Folgegliedern des Kollektivs besteht, bei denen das Merkmal auftritt ($\omega_i \in A$). In dem Teilkollektiv $\mathcal{C}'$ beträgt der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Merkmals dann 1.

Die mathematisch genaue Definition von *Zufälligkeit* in diesem Zusammenhang erfordert etwas mehr Hintergrundwissen in der Mathematik und Informatik als an dieser Stelle vermittelt werden kann. In Kürze nur soviel: Zufällig im Sinne des Axioms ist eine Auswahl, wenn sie durch eine *rekursive Funktion* im Sinne von Alonso Church beschrieben werden kann. Eine *rekursive Funktion* ist eine Abildung der natürlichen Zahlen auf die natürlichen Zahlen, deren Funktionswerte in *endlich vielen Rechenschritten* ermittelt werden können. Es lässt sich zeigen, dass dann noch überabzählbar und damit sicherlich hinreichend viele nicht-triviale Kollektive beide Axiome erfüllen. Näheres dazu bei Donald Gillies [11, S. 108].

2. Nachweis der Erfüllung der Kolmogorowschen Axiome. Dass mit den beiden Axiomen der Häufigkeitstheorie eine Wahrscheinlichkeit im Sinne Kolmogorows definiert ist lässt sich leicht nachweisen:

1. Das erste Kolmogorowsche Axiom $0 \leq P(p)$ gilt (wenn man unter p die Aussage versteht, dass ein Merkmal aus der Menge von Merkmalen A auftritt) offensichtlich, da sowohl $m(A) \geq 0$ als auch $n \geq 0$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} m(A)/n \geq 0$.

2. Das zweite Axiom $P(\Omega) = 1$ gilt ebenfalls offensichtlich, da jedes Glied

der Kollektion $\omega_i \in \Omega$ und damit $m(A) = n$, so dass $\lim_{n\to\infty} m(A)/n = 1$

3. Das dritte Axiom, die Additivität der Wahrscheinlichkeit, die wir bezogen auf die Häufigkeitstheorie leicht umformulieren können als:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A) \qquad A \cap B = \emptyset$$

ergibt sich, wenn man sich klar macht, dass mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$\frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} = \frac{m(A \cup B)}{n}$$

woraus sich mit dem Axiom der Konvergenz und den bekannten Rechenregeln für Grenzwerte ergibt:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= \lim_{n\to\infty} \frac{m(A)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{m(B)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{m(A \cup B)}{n} \\ &= P(A \cup B) \end{aligned}$$

Etwas aufwendiger ist wieder die Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeiten. Zunächst muss die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ in Bezug auf den Häufigkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeit erklärt werden. Da die Häufigkeitstheorie die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Merkmals immer schon bedingt auf ein Kollektiv versteht ($P(A|\mathcal{C})$), stellt sich die Frage, wie die Wahrscheinlichkeit eines Merkmals unter der Bedingung, dass ein anderes Merkmal aufgetreten ist, zu verstehen ist. Dies ist aber leicht möglich: Wir schreiben für $P(A|B)$ einfach $P(A|B\&\mathcal{C})$, wobei unter $B\&\mathcal{C}$ diejenige Teilfolge von $\mathcal{C}$ zu verstehen ist, die durch die Auswahl derjenigen Folgeglieder von $\mathcal{C}$ zustande kommt, bei denen das Merkmal (bzw. die Merkmalsmenge) B auftritt. (Sollte B nur endlich oft in $\mathcal{C}$ auftauchen, also gar keine echte Teilfolge bilden können, dann gilt $P(B|\mathcal{C}) = 0$ und wir setzen $P(A|B\&\mathcal{C}) := 0$. Im folgenden nehmen wir weiterhin $P(B|\mathcal{C}) = 0$ an.[13]) Nun muss allerdings noch gezeigt werden, dass $B\&\mathcal{C}$ auch ein Kollektiv ist, d.h. das $B\&\mathcal{C}$ ebenfalls das Axiome der Konvergenz und das Axiom der Zufälligkeit erfüllt.

[13]Aus Gründen der Einfachheit wird hier auf die Behandlung dieses Sonderfalls verzichtet. Andernfalls müsste diese Möglichkeit im folgenden Beweis mit Hilfe einer Fallunterscheidung berücksichtigt werden!

Dass $B\&\mathcal{C}$ ebenfalls ein Kollektiv ist, kann bewiesen werden,[14] indem man zeigt, dass für jedes beliebige Merkmal A (bzw. jede beliebige Merkmalsmenge A) der Grenzwert der relativen Häufigkeit von A in $B\&\mathcal{C}$ existiert. Dass ist aber der Fall, denn:

1. Für jedes beliebige n gilt, dass B in $\mathcal{C}$ mit einer bestimmten Häufigkeit, nennen wir sie $n(B)$, vorkommt.

2. Da der Fall $P(B|C) = 0$ bereits behandelt und somit ausgeschlossen wurde, gilt weiterhin, dass mit $n \to \infty$ auch $n(B) \to \infty$.

3. Sei die absolute Häufigkeit, mit der A unter den ersten $n(B)$ Gliedern der Folge $B\&\mathcal{C}$ auftritt, mit $m(A)$ bezeichnet. Und sei weiterhin die Häufigkeit der Fälle, in denen A und gleichzeitig B unter den ersten n Folgegliedern von $\mathcal{C}$ auftreten, mit $n(A\&B)$ bezeichnet. Dann gilt offensichtlich: $m(A) = n(A\&B)$.

4. Dann lässt sich folgende Rechnung aufstellen:

$$\lim_{n(B)\to\infty} \frac{m(A)}{n(B)} = \lim_{n(B)\to\infty} \frac{n(A\&B)}{n(B)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A\&B)/n}{n(B)/n}$$

   Sowohl $A\&B$[15] als auch B sind Merkmale, die in dem Kollektiv $\mathcal{C}$ auftreten können. Nach dem Axiom der Konvergenz ist damit der Grenzwert sowohl für den Zähler als auch für den Nenner definiert. Aufgrund der Voraussetzung, dass $P(B|\mathcal{C}) \neq 0$ und damit nach der häufigkeitstheoretischen Definition von $P(B|\mathcal{C})$ auch $\lim_{n\to\infty} m(B)/n \neq 0$ gilt daher, dass der Grenzert

$$\lim_{n(B)\to\infty} \frac{m(A)}{n(B)} \qquad \text{existiert!}$$

   Damit und da der Quotient $m(A)/n(B) = m(A)/n'$ mit $n' := n(B)$ nach der Definition von $m(A)$ auch die relative Häufigkeit von A in der Folge $B\&\mathcal{C}$ beschreibt, ist implizit gezeigt, dass $B\&\mathcal{C}$ ebenfalls eine Kollektion ist und das Axiom der Konvergenz auch für bedingte Wahrscheinlichkeiten erfüllt ist.

[14] Da $B\&\mathcal{C}$ nicht unbedingt eine zufällige Auswahl aus C darstellt, kann man sich den Beweis *nicht* durch Anwendung des Axioms der Zufälligkeit ersparen!

[15] Anmerkung zur Nomenklatur: In streng mengentheoretischer Schreibweise müsste man $A \cap B$ schreiben. Bezieht man die Wahrscheinlichkeiten, wie in der letzten Vorlesung auf die Richtigkeit von Aussagen, dann müsste man für die Aussage, dass das Merkmal A und das Merkmal B eingetreten sind entsprechend den Gepflogenheiten der formalen Logik $A \wedge B$ schreiben.

Nach der Rechnung oben und der Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten, gilt nun:

$$P(A|B) = \lim_{n(B)\to\infty} \frac{m(A)}{n(B)} = \frac{P(A\&B)}{P(B)}$$

was genau der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit für Kolmogorowsche Wahrscheinlichkeiten entspricht. (Beweis nach D. Gillies [11, S. 111/112].)

Zu zeigen bleibt noch, dass bedingte Wahrscheinlichkeiten nach der Häufigkeitstheorie auch das zweite Axiom, das der Zufälligkeit, erfüllen. Es muss also gezeigt werden, dass der Grenzwert der relativen Häufigkeit jedes bliebigen Merkmals A in der Folge $B\&\mathcal{C}$ der gleiche ist wie in der zufällig ausgewählten Teilfolge $(B\&\mathcal{C})'$. Da wir den Begriff der *zufälligen Auswahl* im Rahmen dieser Vorlesung nicht mathematisch präzise eingeführt haben, kann der Beweis hier nur angedeutet werden:

Sei $(B\&\mathcal{C})'$ ein zufällig ausgewähltes Teilkollektiv von $B\&\mathcal{C}$. Dann kann man mit Hilfe dieser Zufallswauswahl eine Zufallsauswahl $\mathcal{C}'$ des Kollektivs $\mathcal{C}$ bilden, die sich bei allen Folgegliedern von $\mathcal{C}$, die in der Teilfolge $B\&\mathcal{C}$ auftauchen, mit der Auswahl $(B\&\mathcal{C})'$ deckt. Ist das aber der Fall, dann entspricht die Zufallsauswahl $(B\&\mathcal{C})'$ der Auswahl $B\&\mathcal{C}'$. Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass $B\&\mathcal{C}$ und $B\&\mathcal{C}'$ ebenfalls Kollektive sind. Auf Grund des Axioms der Zufälligkeit wissen wir, dass der Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} n(B)/n$ für $\mathcal{C}$ und für $\mathcal{C}'$ ein- und derselbe ist. Dass heisst aber auch, dass für jedes beliebige A der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A\&B)/n}{n(B)/n}$$

ein- und derselbe ist, ganz gleich welches der beiden Kollektive $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ man zugrunde legt. Damit ist aber gezeigt, dass die bedingte häufigkeitstheoretische Wahrscheinlichkeit ein- und dieselbe bleibt, unabhängig davon, welches Teilkollektiv man auswählt – ganz so, wie es das Axiom der Zufälligkeit fordert. (Vgl. [11, S. 112])

Die Häufigkeitstheorie erfüllt also die Axiome Kolmogorows und definiert damit, wie man sagen könnte, mathematisch korrekte Wahrscheinlichkeiten. Wenn es nur darum gegangen wäre, die Kolmogorowschen Axiome zu erfüllen, so hätte das erste Axiom der Häufigkeitstheorie (Konvergenzaxiom) bereits ausgereicht. Das zweite Axiom ist für die Erfüllung der kolmogorowschen Axiome nicht notwendig. Es bildet aus anderen Gründen einen wesentlichen Bestandteil der Häufigkeitstheorie. Das zweite Axiom bildet das *Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* auf die mathematische Häufigkeitstheorie ab, und stellt daher die für eine anwendungstaugliche Theorie notwendige Beziehung zur Empirie her. Ohne das Axiom der Zufälligkeit würde es Wahrscheinlichkeiten im häufigkeitstheoretischen Sinne geben können, für die man sich nicht auf das *Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* verlassen kann.

3. Einwände und Diskussion Welche Einwände gibt es gegen die Häufigkeitstheorie? Die Häufigkeitstheorie ist wie alle Wahrscheinlichkeitstheorien, die „unterhalb“ der Kolmogorwschen Axiome ansetzen, keineswegs unumstritten. Manche Autoren lehnen sie sogar grundsätzlich ab [5]. Welche Argumente könnte man dafür anführen?

Denjenigen, die sich bereits etwas mit der Statistik auskennen, düfte vielleicht schon aufgefallen sein, dass das Konvergenzaxiom in einem eigentümlichen Gegensatz zu dem sogenannten „Gesetz der großen Zahlen“ steht. Das Gesetz der großen Zahlen besagt sinngemäß, dass wenn irgendein Merkmal A eine bestimmte Wahrscheinlichkeit r hat, dass dann die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit vom Wahrscheinlichkeitswert r abweicht, gegen 0 geht. Das Konvergenzaxiom fordert aber, dass die relative Häufigkeit gegen r geht. Widerspricht das nicht dem Gesetz der großen Zahlen, da es nach dem Gesetz der großen Zahlen doch Fälle geben kann, in denen der Häufigkeitsgrenzwert nicht erreicht wird? Die Antwort ist Folgende: Die Häufigkeitstheorie definiert einen engeren Wahrscheinlichkeitsbegriff als das Gesetz der großen Zahlen. Jede Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitstheorie erfüllt selbstverständlich das Gesetz der großen Zahlen, aber nicht umgekehrt. (Das Gesetz der großen Zahlen könnte im Rahmen der Häufigkeitstheorie sogar überflüssig erscheinen, da mit dem Konvergenzaxiom ja bereits ein „strengeres“ Gesetz existiert.) Anders als das Konvergenzaxiom taugt das Gesetz der großen Zahlen nicht, wie die naive statistische Theorie manchmal annimt, zur Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, da das Definiendum dann im Definiens auftreten würde, womit die Definition zirkulär wäre [24, S. 113]. Der Einwand verweist aber darauf, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff der Häufigkeitstheorie nicht als erschöpfend angesehen werden kann. Die Häufigkeitstheorie kann aus diesem Grund unnötig restriktiv erscheinen.

Andere Einwände gegen die Häufigkeitstheorie sind eher empirischer Natur, etwa dergestalt, dass es ohnehin keine beliebig großen Folgen völlig gleichartiger Ereignisse gäbe (etwa: „Jeder Würfel nützt sich irgendwann ab! Zwei unterschiedliche Münzen sind niemals ganz gleich!“ etc.) und schon gar keine unendlich großen. Die entscheidende Frage besteht darin, ob man bereit ist, die Axiome der Häufigkeitstheorie als idealisierende Abstraktion eines empirischen Sachverhalts bzw. einer Vielzahl empirischer Sachverhalte (nämlich, dass wir die Wahrscheinlichkeiten statistischer Vorgänge mit zunehmend größeren Stichproben zunehmend zuverlässig messen können) zu akzeptieren. Anlässlich der vielfältigen Einsatzmöglichkeiten statistischer Methoden enthält die Häufigkeitstheorie in empirischer Hinsicht weit weniger starke Zumutungen als die im Folgenden zu besprechende Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten.

6.1.3 Ein Wort zu Propensitäten

Wenn der Wahrscheinlichkeitsbegriff der Häufigkeitstheorie nicht erschöpfend ist, dann ist zumindest Raum für weitere Wahrscheinlichkeitsbegriffe. Eine weitere wichtige Klasse von *objektiven* Wahrscheinlichkeiten wird durch die verschiedenen Propensitätstheorien definiert. Da die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbegriffe aber für die Spiel- und Entscheidungstheorie keine zentrale Rolle spielen, und die Propensitätstheorien zudem noch wenig kanonisiert sind, werden sie hier nur erwähnt. Für Interessierte sei auf die Fachliteratur, insbesondere auf die sehr lesbare Darstellung von Donald Gillies [11] verwiesen. Wir werden uns statt dessen gleich den subjektiven Wahrscheinlichkeiten zuwenden, die die Grundlage der modernen Nutzentheorie bilden.

6.2 Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Die im Zusammenhang mit der Entscheidungs- und Spieltheorie wichtigste Theorie der Wahrscheinlichkeit ist die Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeit, wie sie ursprünglich von Ramsey und De Finetti entwickelt wurde [23, p. 68ff.]. Subjektive Wahrscheinlichkeiten kommen im täglichen Leben u.a. dann vor, wenn wir Wetten abschließen. Daran knüpft die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie an. Natürlich kann die Theorie nicht vorschreiben, wie hoch wir auf etwas wetten sollen, oder mit welcher Wahrscheinlichkeit wir davon ausgehen sollen, dass diese oder jene Fussballmanschaft gewinnt, oder dieses oder jenes Pferd ein Rennen gewinnt etc., denn diese Einschätzungen sind ja gerade subjektiv. Was uns die Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten aber zeigen kann, das ist, ob unsere Wahrscheinlichkeitseinschätzungen in sich konsistent sind, wenn sie sich auf mehrere, mit einander verbundene Sachverhalte beziehen.

Dazu ein einfaches Beispiel: Jemand behauptet, dass die Chancen, dass beim Bundesligaspiel Nürnberg gegen Bayern München die Chancen für einen Sieg von Nürnberg 90% betragen. Dann muss er, um konsequent zu sein, auch zugleich der Ansicht sein, dass ein Sieg für Bayern München zu 10% wahrscheinlich ist. Was wäre, wenn das nicht der Fall ist? Wenn z.B. jemand der Ansicht ist, dass ein Sieg Nürnbergs zu 90% wahrscheinlich ist, eine Sieg Bayerns aber zugleich zu 50% für wahrscheinlich hält. Dann könnte ein Buchmacher mit diesem mathematisch unkundigen Fussballfan eine sehr vorteilhafte Wette abschließen. Er würde z.B. vorschlagen: „Lass uns auf beides 100 € wetten, d.h. da Du den Sieg von Nürnberg zu 90% für wahrscheinlich hälst, zahlst Du 90 € ein und ich 10 €. Und für die Wette auf Bayern zahlen wir beide 50 € ein. Wer die Wette gewinnt, bekommt in dem einen, wie in dem anderen Fall die gesamten Einzahlungen.“ Geht der Fussballfan auf dieses Wettverfahren ein, dann hat der Buchmacher in jedem Fall einen Gewinn von 40 € sicher. Denn, wenn Nürnberg gewinnt, hat er in der ersten Wette 10 € verloren und in der zweiten 50 € gewonnen und, wenn Bayern gewinnt, hat er bei der zweiten Wette 50 € verloren aber bei der der ersten 90 € gewonnen. Man sagt auch (in der englischen Fachliteratur), er habe ein „*Dutch Book*“ gegen den unachtsamen Wettfreund gemacht.

Vor allem zeigt das Beispiel, dass unsere subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen, sollen sie konsistent sein, nicht vollkommen willkürlich sein dürfen. Sobald wir nämlich der Richtigkeit irgendwelcher Aussagen (oder dem Eintreten irgendwelcher Ereignisse) bestimmte Wahrscheinlichkeiten zuweisen, ergeben sich daraus implizit die Wahrscheinlichkeiten, die wir den logischen Verknüpfungen dieser Aussagen mit *und*, *oder* und *nicht* und den bedingten Aussagen zuweisen müssen, wenn wir vermeiden wollen, das jemand ein „Dutch Book“, d.h. eine „todsichere Wette“ gegen uns abschließen kann.

Die Menge aller Aussagen, die man durch logische Verknüpfung oder Bedingungsbildung aus einer Grundmenge von Aussagen bilden kann, nennt man auch den *De Finetti-Abschluss* dieser Grundmenge von Aussagen. Die Frage ist nun, welche Wahrscheinlichkeiten wir den verküpften und bedingten Aussagen zuweisen müssen, damit sie konsistent in dem Sinne sind, dass man keine „todsichere Wette“ gegen sie abschließen kann? Das zentrale Theorem der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie besagt, dass dies *genau dann* der Fall ist, wenn die dem System dieser Aussagen (i.e. dem *De Finetti-Abschluss*) zugewiesenen Wahrscheinlichkeitswerte den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehorchen, d.h. wenn sie die kolmogorowschen Axiome erfüllen.

> *Ramsey-De Finetti Theorem:* Die einer Menge von Aussagen zugewiesenen subjektiven Wahrscheinlichkeiten sind genau dann in sich konsistent (in dem Sinne, dass keine „todsicheren Wetten“ möglich sind), wenn sie den kolmogorowschen Axiomen gehorchen.

Dieses Theorem stellt eine Beziehung her zwischen einer grob an den empirischen Phänomenen des Wettens orientierten Konsistenzbedingung und den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir werden zunächst den Beweis des Theorems führen und dann, wie schon bei den anderen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auch, die Argumente untersuchen, die für oder gegen die Annahme subjektiver Wahrscheinlichkeiten sprechen.

Beweis des Ramsey-De Finetti Theorems Für den Beweis müssen wir präzisieren, was wir unter einer Wette verstehen. Dazu sind zunächst die Rollen des Wettenden und des Buchmachers zu unterscheiden. Der Wettende darf festlegen welche Wahrscheinlichkeiten er allen Aussagen bzw. Ereignissen zuweist. Der Buchmacher darf anschließend entscheiden, ob er dafür oder dagegen wettet, d.h. er legt einen positiven oder negativen Wettbetrag S („S“ wie „stakes“) für die Wette fest. Die Wette spielt sicht dann immer folgendermaßen ab, zunächst muss der Wettende den Betrag qS (bei einem Treuhänder) einzahlen. Gewinnt er die Wette, d.h. tritt das Ereignis ein, dann bekommt er den Betrag S zurück. Verliert er die Wette, so verliert er seine Einzahlung. Legt der Buchmacher den Wettbetrag auf einen negativen Wert S fest, dann sind auch die Ein- und Auszahlungen entsprechend negiert. Dann muss zunächst der Buchmacher einen Betrag von $q \cdot |S|$ einzahlen, und bekommt $|S|$ ausgezahlt, wenn das Ereignis eintritt. Es mag etwas sonderbar erscheinen, dass der Buchmacher entscheiden darf, ob er „dafür“ oder „dagegen“ wettet, aber andernfalls hätte die Zuweisung eines Wettquotienten durch den Wettenden wenig Sinn, da er ihn schon aus taktischen Gründen entweder möglichst hoch oder möglichst niedrig ansetzen würde, je nachdem, ob der Buchmacher gezwungen ist, dafür oder dagegen zu wetten. Nur wenn der Wettende nicht weiß, ob der Buchmacher dafür oder dagegen wettet, wird er seinen Wettquotienten exakt so wählen, wie es seiner Wahrscheinlichkeitseinschätzung entspricht.

Um den Beweis zu führen, zeigen wir zunächst, dass aus der Konsistenzannahme die kolmogorowschen Axiome folgen, und dann in einem zweiten Schritt, dass aus den Komogorwschen Axiomen die Konsistenz der Wahrscheinlichkeitszuweisungen folgt. Wir nehmen also an, dass wir eine Menge von Aussagen oder Ereignissen haben, denen konsistente Wahrscheinlichkeiten in dem oben beschriebenen Sinne zugewiesen worden sind. Dann gilt (Beweis nach Gillies [11, S. 60ff.]):

1. *kolmogorowsches Axiom* (indirekter Beweis): Angenommen jemand weist irgendeinem Ereignis e eine Wahrscheinlichkeit $q < 0$ zu, dann wird der Buchmacher immer gewinnen, wenn er S $<$ 0 wählt. (Da der Buchmacher S $<$ 0 gewählt hat, muss er $q \cdot |S|$ „einzahlen“. Da aber $q < 0$ heisst das in Wirklichkeit, dass er $|q| \cdot |S|$ bekommt. Den Betrag hat der Buchmacher auf jeden Fall sicher. Gewinnt er dann noch die

Wette, dann bekommt er sogar noch $|S|$ oben drauf. Der Buchmacher hat also eine „todsichere Wette“ abgeschlossen.)

Wenn also das 1. kolmogorowsche Axiom verletzt wird, dann war die Wahrscheinlichkeitszuweisung auch inkonsistent im Sinne des Wettkriteriums. Da wir die Konsistenz aber voraussetzen, muss das 1. kolmogorowsche Axiom erfüllt sein.

2. *kolmogorowsches Axiom* (indirekter Beweis): Angenommen einem beliebigen Ereignis e wurde eine Wahrscheinlichkeit $q > 1$ zugewiesen, dann gewinnt der Buchmacher immer, wenn er S > 0 wählt. (Der Wettende zahlt $q \cdot S > S$ ein bekommt aber höchstens S zurück.) Um konsistent zu sein, darf also keinem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit größer 1 zugewiesen werden. Insbesondere gilt dies auch für ein Ereignis, dessen Eintreten sicher ist.

   Angenommen der Wettende weist einem *sicheren* Ereignis Ω eine Wahrscheinlichkeit $q < 1$ zu, dann gewinnt der Buchmacher immer, wenn er S < 0 wählt. (Dadurch wettet der Buchmacher für das Ereignis Ω. Da das Ereignis sicher ist, bekommt der Buchmacher mit Sicherheit $|S|$ für seine Einzahlung von $q|S| < |S|$ zurück.) Um konsistent im Sinne des Wettkriteriums zu bleiben, darf also einem sicheren Ereignis auch niemals eine Wahrscheinlichkeit kleiner 1 zugewiesen werden.

3. *kolmogorowsches Axiom* (indirekter Beweis): Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt, dass aus den Konsistenz der Wahrscheinlichkeitszuweisungen folgt, dass für Wahrscheinlichkeiten einer beliebigen Menge sich (paarweise) wechselseitg ausschließender Ereignisse $e_1, \dots, e_n$, die zugleich ausschöpfend sind (d.h. eins davon tritt auf jeden Fall ein), gilt, dass $P(e_1) + \dots + P(e_n) = 1$. Dann wird gezeigt, dass daraus das 3. kolmogorowsche Axiom folgt.

   Angenommen jemand weist einer Menge sich wechselseitg ausschließender, aber ausschöpfender Ereignisse $e_1, \dots, e_n$ die Wahrscheinlichkeiten $q_1, \dots, q_n$ zu. und der Buchmacher setzt für alle Wetten denselben Wettbetrag S an. Dann beträgt der Gewinn des Buchmachers, wenn das Ereignis E_i eintritt:

   $$G = q_1 S + \dots + q_n S - S = S(q_1 + \dots + q_n - 1)$$

   Wählt der Wettende die Wahrscheinlichkeiten so, dass $q_1 + \dots + q_n > 1$, dann gewinnt der Buchmacher immer, wenn er $S > 0$ ansetzt. Wählt der Wettende die Wahrscheinlichkeiten so, dass $q_1 + \dots + q_n < 1$, so gewinnt der Buchmacher immer, wenn er $S < 0$ wählt.

Also muss der Wettende, um konsistent zu bleiben $q_1 + \ldots + q_n = 1$ wählen. Hat er das aber (für jede Menge paarweise unvereinbarer und vollständig ausschöpfender Ereignisse) getan, dann erfüllen seine Wahrscheinlichkeitszuweisungen auch das 3. kolmogorowsche Axiom, denn: Seien e und f zwei beliebige, sich wechselseitig ausschließende Ereignisse, dann gilt nach Voraussetzung für die Wahrscheinlichkeitszuweisung des Wettenden:

$$P(e) + P(f) + P(\neg(e \vee f)) = 1$$

Da $e \vee f$ und $\neg(e \vee f)$ sich aber ebenfalls ausschließen, eins von beiden Ereignissen aber eintreten muss, gilt ebenfalls:

$$P(e \vee f) + P(\neg(e \vee f)) = 1$$

Subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, so folgt das 3. kolmogorowsche Axiom:

$$\begin{aligned} P(e) + P(f) - P(e \vee f) &= 0 \qquad \Leftrightarrow \\ P(e) + P(f) &= P(e \vee f) \end{aligned}$$

4. *Bedingte Wahrscheinlichkeit.* Zunächst ist zu erklären, was unter einer bedingten Wahrscheinlichkeit zu verstehen ist, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten als Wettquotienten verstehen. $P(e|f)$ ist zu verstehen als der Wettquotient, mit dem auf das Ereignis e gewettet wird, sofern f eintritt. Tritt f nicht ein, so findet keine Wette statt. Es handelt sich also um eine Art „Optionswette". Zu zeigen ist nun, dass bei einer konsistenten Festlegung aller bedingten Wettquotienten, die bedingte Wahrscheinlichkeit im Sinne der Theorie subjektivier Wahrscheinlichkeiten der bedingten Wahrscheinlichkeit wie sie im Zusammenhang mit den kolmogorowschen Axiomen definiert wurde (64) entspricht. Dazu beweisen wir, dass bei konsistenter Zuweisung von Wettquotienten das Multiplikationsgesetz für bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(e \wedge f) = P(e|f) \cdot P(f)$ erfüllt ist. Es sei zunächst für zwei beliebige Ereignisse e und f:

   (a) a der Wettquotient des Ereignisses $e \wedge f$.

   (b) b der Wettquotient des Ereignisses $e|f$.

   (c) c der Wettquotient des Ereignisses f.

   Seien weiterhin S_1, S_2, S_3 die den entsprechenden Ereignissen vom Buchmacher zugewiesenen Wettbeträge, dann ergeben sich folgende

Gewinnrechnungen für jeden der drei möglichen Fälle 1. e und f treten ein, 2. f tritt ein, aber nicht e, 3. f tritt nicht ein.[16]:

(a) $G_1 = (a-1) \cdot S_1 + (b-1) \cdot S_2 + (c-1) \cdot S_3$

(b) $G_2 = a \cdot S_1 + b \cdot S_2 + (c-1) \cdot S_3$

(c) $G_3 = a \cdot S_1 + c \cdot S_3$

(Was hier vorliegt ist ein Gleichungssystem mit drei unbekannten (S_1, S_2, S_3). Zu zeigen ist also, dass die einzige Bedingung unter der dieses Gleichungssystem keine Lösung für $G_1, G_2, G_3 > 0$[17] hat, die ist, dass $a = bc$. Gäbe es nämlich eine solche Lösung, dann hätte der Buchmacher für die entsprechenden Werte von S_1, S_2, S_3 seinen sicheren Gewinn.) Wenn der Buchmacher nun $S_1 := 1$, $S_2 := -1$ und $S_3 := -b$ wählt, dann ergibt sich daraus für den Buchmacher folgende Gewinnrechnung:

(a) $G_1 = (a-1) + (1-b) + b - b \cdot c = a - b \cdot c$

(b) $G_2 = a - b - b \cdot c + b = a - b \cdot c$

(c) $G_3 = a - b \cdot c$

D.h. der Buchmacher hat einen sicheren Gewinn, sofern für die Wahrscheinlichkeitszuweisungen nicht gilt $a \leq b \cdot c$. Wählt er aber $S_1 := -1$, $S_2 := 1$ und $S_3 := b$, dann hat er einen sicheren Gewinnt, sofern für die Wahrscheinlichkeitszuweisungen nicht gilt $a \geq b \cdot c$. Das bedeutet aber, dass die Wettquotienten, um konstitent zu sein sowohl $a \leq b \cdot c$ als auch $a \geq b \cdot c$ erfüllen müssen. Das ist aber nur möglich, wenn:

$$a = b \cdot c \qquad \Leftrightarrow \qquad P(e \wedge f) = P(e|f) \cdot P(f)$$

Also muss für die in dem oben erklärten Sinne bedingten Wettquotienten das Multiplikationsgesetz gelten, wenn sie konstistent sein sollen.

Damit wäre die eine Richtung des Äquivalenzbeweises zwischen der Wettkonsistenz und der kolmogorowschen Wahrscheinlichkeit abgeschlossen. Was noch aussteht, ist die andere Richtung des Beweises, d.h. dass aus der Erfüllung der kolmogorowschen Axiome durch eine Zuweisung von Wettquotienten zu Ereignissen auch die Konsistenz der Wettquotienten in dem Sinne folgt, dass ein gedachter Gegenspieler keine „todsicheren Wetten“ abschließen

[16] Zwischen den Fällen $\neg f \wedge e$ und $\neg f \wedge \neg e$ braucht nicht unterschieden werden, da die Gewinnrechnung in beiden Fällen dieselbe ist: $G_3 = a \cdot S_2 + c \cdot S_3$

[17] G_1, G_2, G_3 decken alle drei möglichen Fälle ab, also müssen alle größer Null sein. Sonst wäre der Gewinn nicht mehr sicher, da ein Fall eintreten könnte, indem $G \leq 0$

kann. Was wir zeigen müssen ist, dass der De Finetti Abschluss einer beliebigen Menge von Aussagen (bzw. Ereignissen) konsistent ist, sofern die kolmogorowschen Axiome erfüllt sind.

Wir betrachten zunächst die im De Finetti-Abschluss vorkommenden Aussagen als jeweils einzelne Aussagen. Erfüllen die Aussagen die Kolmogorowschen Axiome, dann gilt für jede Aussage, dass ihre Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegt. Dann ist es aber unmöglich für die Wette auf eine einzelne Aussage den Wettbetrag so zu festzulegen, dass der Buchhalter zwangsläufig gewinnt. (Auch wenn er in den Extremfällen, dass der Wettquotient q auf 0 oder 1 festgelegt worden ist, den Wettbetrag S so wählen kann, dass er nicht mehr verlieren kann, bedeutet dies noch nicht, dass ihm der Gewinn sicher ist. Insofern ist dann auch die Wette nicht „todsicher".)

Als nächstes zeigen wir, dass auch die Wahrscheinlichkeiten von beliebigen oder-verknüpften Aussagen, soweit sie einander paarweise ausschließen und erschöpfend sind, konsistent sein müssen. Dazu leiten wir zunächst aus dem 3. kolmogorowschen Axiom ab, dass sich die Wahrscheinlichkeiten einer Menge von Aussagen (bzw. Ereignissen) $e_1, \dots, e_n$, die sich paarweise ausschließen und ausschöpfend sind zu eins aufsummieren müssen. Durch entsprechende Klammerung kann man das, was im 3. kolmogorowschen Axiom für zwei unvereinbare Aussagen ausgesagt wird, leicht auf n paarweise unvereinbare Aussagen übertragen, d.h. es gilt:

$$P(e_1 \vee \ldots \vee e_n) = P(e_1) + \ldots + P(e_n)$$

Wenn die Ereignisse $e_1, \dots, e_n$ aber ausschöpfend sind, dann gilt, dass $e_1 \vee \ldots \vee e_n$ sicher ist und damit $P(e_1 \vee \ldots \vee e_n) = 1$. Dann gilt aber auch:

$$P(e_1) + \ldots + P(e_n) = P(e_1 \vee \ldots \vee e_n) = 1$$

Zur Vereinfachung schreiben wir für die Wahrscheinlichkeiten $P(e_1), \dots, P(e_n)$ im folgenden $q_1, \dots, q_n$. Aus der Gleichung ergibt sich, dass mindestens ein $q_i \geq 0$. Wenn der Buchmacher den Wetten auf die Ereignisse $e_1, \dots, e_n$ die Wettbeträge $S_1, \dots, S_n$ zuweist, dann berechnet sich der Gewinn, den er erhält, falls das i-te Ereignis eintritt nach:

$$G_i = q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n - S_i$$

Da wir für jedes i (im Bereich $1 \leq i \leq n$) eine solche Gleichung aufstellen, verfügen wir über n derartige Gleichungen. Jede dieser Gleichungen können wir auf beiden Seiten mit dem entsprechenden q_i noch einmal multiplizieren.

Wir erhalten dann eine Schar von Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} q_1 G_1 &= q_1(q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n) - q_1 S_1 \\ &\vdots \\ q_n G_n &= q_n(q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n) - q_n S_n \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen aufaddieren, dann erhalten wir folgende Bedingung für die Gewinne, die der Buchmacher erzielen kann:

$$q_1 G_1 + q_2 G_2 + \ldots + q_n G_n = 0$$

Inhaltlich entspricht die rechte Seite der Gleichung übrigens dem Erwartungsnutzen des Buchmachers unter Zugrundelegung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten des Wettenden, d.h. die Bedingung besagt, dass der Erwartungsnutzen des Buchmachers 0 sein muss. Wenn der Erwartungsnutzen des Buchmachers 0 ist, dann kann er aber keine „todsichere Wette“ mehr abschließen, denn: Für ihn ist nur dann ein sicherer Gewinn möglich, wenn *alle* G_i positiv, d.h. echt größer 0 sind. (Andernfalls hätte er, wenn irgend ein $G_k \leq 0$, dann keinen Gewinn, wenn das k-te Ereignis eintritt, damit wäre seine Wette aber nicht mehr „todsicher“.) Es können aber nicht alle G_i positiv sein, da wegen $q_i \geq 0 \forall_i$ (1. kolmogorowsches Axiom) und $\exists_k i q_k > 0$ (wg. $\sum q_i = 1$) die Summe auf der linken Seite der Gleichung sonst nicht 0 werden könnte.

Damit ist gezeigt, dass auch die oder-Verknüpfung von paarweise unvereinbaren aber den Ereignisraum ausschöpfenden Aussagen konsistent ist, sofern die zugewiesenen Wettquotienten den kolmogorowschen Axiomen gehorchen. So wie der Beweis geführt wurde, war es dem Buchmacher dabei sogar gestattet, den Wettbetrag nicht nur für die Gesamtaussage sondern für jedes Teilglied festzulegen. Dennoch ist keine „todsichere Wette“ möglich. Daraus folgt aber unmittelbar, dass wenn für jede oder-Verknüpfte Gesamtaussage (bestehend aus wechselweise unvereinbaren und ausschöpfenden Teilaussagen) schon keine „todsichere Wette“ möglich ist, dann auch für keine der Teilaussagen, denn sonst bräuchte der Buchmacher nur für die Teilaussage, für die eine „todsichere Wette“ möglich ist, den Wettbetrag entsprechend festzulegen und für alle weiteren Teilaussagen den Wettbetrag auf Null zu setzen, um eine todsichere Wette auf die Gesamtaussage abzuschließen.

Daraus ergibt sich wiederum unmittelbar, dass der Buchmacher auch auf wechselseitig unvereinbare aber nicht ausschöpfende oder-verknüpfte Aussagen keine „todsichere Wette“ abschließen kann. Denn angenommen a sei eine solche Aussage, dann kann er auf $a \vee \neg a$ keine „todsichere Wette“ abschließen, dann nach dem eben gesagten aber auch nicht auf a. In einem letzten Schritt kann nun gezeigt werden, dass der Buchmacher in der Tat auf überhaupt keine oder-verknüpfte Aussage eine todsichere Wette abschließen kann (also auch ohne die Voraussetzung paarweiser Ausschließlichkeit). Denn seien a und b zwei nicht ausschließliche Aussagen, dann ist die Aussage $a \vee b$ äquivalent zu der Aussage $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b)$. Diese drei Aussagen sind wechselweise unvereinbar. Da auf sie keine „todsichere Wette“ abgeschlossen werden kann, kann auch auf die äquivalente Aussage $a \vee b$ keine „todsichere Wette“ abgeschlossen werden.

Schließlich ist zu zeigen, dass auch bei und-verknüpften Aussagen keine „todsichere Wette“ möglich ist, sofern die kolmogorowschen Axiome erfüllt sind. Seien e und f zwei mögliche Ereignisse. Aus den kolmogorowschen Axiomen und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ergitb sich bekanntlich das Multiplikationsgesetz $P(e \wedge f) = P(e|f) \cdot P(f)$. Wie schon zuvor legen wir zur Vereinfachung folgende abkürzende Bezeichnungen fest.

1. $a = P(e \wedge f)$
2. $b = P(e|f)$
3. $c = P(f)$

Seien weiterhin S_1, S_2, S_3 die den enstprechenden Ereignissen vom Buchmacher zugewiesenen Wettbeträge. Wiederum sind dann vier Fälle zu unterscheiden, von allerdings zwei zusammen fallen, so dass sich hinsichtlich des Gewinns des Buchmachers drei Fälle ergeben:

1. $e \wedge f$: $G_1 = (a-1) \cdot S_1 + (b-1) \cdot S_2 + (c-1) \cdot S_3$
2. $\neg e \wedge f$: $G_2 = a \cdot S_1 + b \cdot S_2 + (c-1) \cdot S_3$
3. $\neg f$: $G_3 = a \cdot S_2 + c \cdot S_3$

Zu zeigen ist, dass, wenn wir gemäß dem Multiplikationsgesetz $a = b \cdot c$ voraussetzen, die Gewinne nicht alle positiv sein können. Es genügt zu zeigen, dass der Erwartungsnutzen des Buchmachers (bezüglich der Wahrscheinlichkeiten des Wettenden) gleich 0 ist (siehe Seite 98). Der Erwartungsnutzen des Buchmachers berechnet sich nach:

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$$

mit:

$$\lambda_1 = b \cdot c, \qquad \lambda_2 = (1-b) \cdot c, \qquad \lambda_3 = 1 - c$$

(wovon man sich überzeugen kann, wenn man sich überlegt, in welchen Fällen welches λ herangezogen werden muss).

Durch Einsetzen der obigen Gleichungen und Ausklammern von S_1, S_2 und S_3 erhält man:

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3$$

wobei:

$$\alpha = bc(a-1) + (1-b)ca + (1-c)a$$
$$\beta = bc(b-1) + (1-b)cb$$
$$\gamma = bc(c-1) + (1-b)c(c-1) + (1-c)c$$

Durch Ausrechnen und Subsitution mit Hilfe der Voraussetzung $a = b \cdot c$ lässt sich zeigen, dass $\alpha = \beta = \gamma = 0$ Da wenigstens ein $\lambda > 0$ ist (die durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ angegebenen Wahrscheinlichkeiten decken alle möglichen Fälle ab, summieren sich also zu 1) folgt, dass keine „todsichere Wette“ für den Buchmacher möglich ist. Das betrifft sowohl und-verknüpfte Aussagen als auch bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Dass aus der Erfüllung der kolmogorowschen Axiome wiederum die Konsistenz der Wahrscheinlichkeiten (im Sinne des Wettkriteriumgs) folgt, hat eine wichtige Konsequenz in Fällen, in denen neue Informationen bekannt werden, die geeignet sind, die Wahrscheinlichkeiten, die wir bestimmten Ereignissen zuweisen, zu ändern. Da wir wissen, dass Wahrscheinlichkeiten, die wir durch „Bedingungsbildung“ (*conditionalization*) erhalten, wiederum die kolmogorowschen Axiome erfüllen, können wir auch davon ausgehen, dass wir durch die Ersetzung sämtlicher Wahrscheinlichkeiten mit den durch die Information „bedingten“ Wahrscheinlichkeiten, wieder ein System (genauer einen „De Finetti-Abschluss“) konsistenter subjektiver Wahrscheinlichkeiten erhalten. Die Bedingungsbildung geht dabei immer so vor sich, dass wir $P(a)$ durch $P(a|I)$ ersetzen und $P(a|b)$ durch $P(a|(b \wedge I))$, wobei a eine beliebige Aussage bzw. ein beliebiges Ereignis unseres Systems ist, und I die neu hinzugekommene Information. (Da bei Aussagen, die unabhängig von I sind, sowieso $P(a|I) = P(a)$ gilt, können wir die Bedingungsbildung unbedenklich auf alle Aussagen des Systems anwenden.)

Diskussion Der zuvor geführte Beweis hat gezeigt, dass die Konsistenz subjektiver Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Absicherung gegen „todsichere Wetten“ und die Erfüllung der kolmogorwschen Axiome ein- und dasselbe sind. Anders als bei der Häufigkeitstheorie handelt es sich dabei um einen Äquivalenzbeweis, der in beide Richtungen funktioniert. Dies verleiht der Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten von einem mathematischen Blickwinkel aus gesehen von vorn herein eine größere Plausibilität. Ein solches Problem, wie dasjenige, dass das „Gesetz der großen Zahlen“ durch den eingeführten konkreten Wahrscheinlichkeitsbegriff unterboten wird, wie im Falle der Häufigkeitstheorie geschehen, kann also nicht auftreten.

Eine andere Frage ist allerdings die, inwieweit die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie an empirische Wahrscheinlichkeitsphänomene anknüpfen kann. Hier konnte die Häufigkeitstheorie, die sich ziemlich nahtlos an die Statistik anknüpfen lässt punkten. Befürworter der subjektiven Wahrscheinlichkeiten können ihren Wahrscheinlichkeitsbegriff freilich auch in diesem Zusammenhang verteidigen. Denn sofern die subjektiven Wahrscheinlichkeiten durch neue Informationen über statistische Stichproben erneuert („updated") werden, so konvergieren die subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf lange Sicht gegen den statistischen Häufigkeitswert. Die entsprechenden Konvergenztheoreme bilden einen wichtigen Teil der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie und eine Stütze des sogenannten Baysianismus, d.i. – vereinfacht ausgedrückt – die Meinung, dass der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff der einzige ist, den wir benötigen. Im Einzelnen darauf einzugehen, würde an dieser Stelle zu weit führen. Näheres dazu bei Gillies [11]. Zur Veranschaulichung hilft es sich an das Beispiel medizinischer Tests aus der letzten Vorlesung zu erinnern. Je mehr Tests durchgeführt werden, um so mehr nährt sich das Resultat dem tatsächlichen Wert (in diesem Fall entweder krank oder nicht krank) an. Ähnlich funktioniert das „updating", wie es der Baysianismus versteht. Es sollte jedoch erwähnt werden, dass es sich dabei um eine durchaus umstrittene Auffassung handelt. Ein möglicher Einwand läuft darauf hinaus, dass auch die Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten, sofern ihre Anwendbarkeit auf statistische Phänomene behauptet wird, implizizt objektive Wahrscheinlichkeiten voraussetzt, nur dass sie diese nicht mehr erklärt – anders als die Häufigkeitstheorie.

In diesem Zusammenhang ist auch darauf hinzuweisen, dass das Messbarkeitsproblem bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten kein zu unterschätzendes Problem darstellt. Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff ist, anders als zumeist behauptet bzw. naiv vorausgesetzt wird [11, p. 69], meist nicht ohne Weiteres operationalisierbar. (*Operationalisierbar* ist ein Begriff dann, wenn man ihn auf messbare Größen zurückführen kann.) Denn das durch die Theorie suggerierte Messverfahren zur Bestimmung von Wettquotienten ist alles andere als zuverlässig. Es genügt nicht, irgendein (gewaltsames) Bestimmungsverfahren für eine Größe zu haben, sondern die damit gemessene Größe muss auch einigermaßen genau und stabil sein. Die damit verbundenen Schwierigkeit schränken die empirische Anwendbarkeit dieses Konzepts ein, sie schließen aber nicht aus, dass man das Konsistenzkriterium in normativer Absicht anwendet. Denn dass man sich beim Treffen von Entscheidungen konsequent verhalten *soll* erscheint nur plausibel. Das Konsistenzkriterium und die Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten liefert die Mittel dazu.

6.3 Aufgaben 5 (20. Mai)

1. Das „Gesetz der großen Zahlen“ besagt, dass in allen Zufallsfolgen der Häufigkeitsgrenzwert eines Merkmals A mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 gleich dem Wahrscheinlichkeitswert r von A ist. Um einzusehen, dass dies nicht ein- und dasselbe ist, wie zu sagen, der Häufigkeitsgrenzwert beträgt r, muss man sich klar machen, dass eine Wahrscheinlichkeit von 1 noch nicht bedeutet, dass irgendein Ereignis mit Sicherheit eintritt. (Zur Erinnerung: Die Kolmogorowschen Axiome fordern lediglich, dass ein sicheres Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1 hat, aber nicht umgekehrt.) Finden Sie Beispiele für:

   (a) Eine Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit 0 ist, das aber trotzdem möglich ist.

   (b) Eine Ereignisfolge, innerhalb derer ein Merkmal unendlich oft auftritt, aber trotzdem die Wahrscheinlichkeit 0 hat.

2. Das dritte kolmogorowsche Axiom besagt, dass für Ereignisse, die sich ausschließen gilt:

$$P(p \vee q) = P(p) + P(q)$$

   Zeige, dass das dritte Axiom *äquivalent* ist zu dem Axiom 3*: Seien $q_1, \dots q_n$ Ereignisse, die sich paarweise ausschließen (Exklusivität), von denen aber eins eintreten muss (Vollständigkeit), dann gilt:

$$P(q_1) + \ldots + P(q_n) = 1$$

3. Zeige, dass man durch aufsummieren der Gleichungen:

$$q_i G_i = q_i(q_i S_i + \ldots + q_n S_n) - q_i S_i \qquad \text{mit} \qquad 1 \leq i \leq n$$

   über den index i das Ergebnis:

$$q_1 G_1 + q_2 G_2 + \ldots + q_n G_n = 0$$

   erhält, sofern $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

4. Zeige durch Ausrechnen und unter Verwendung von $a = b \cdot c, 0 \leq a, b, c \leq 1$, dass in den folgenden drei Gleichungen sowohl α als auch β und γ Null sind werden.

$$\alpha = bc(a-1) + (1-b)ca + (1-c)a$$

$$\beta = bc(b-1) + (1-b)cb$$

$$\gamma = bc(c-1) + (1-b)c(c-1) + (1-c)c$$

5. Wenn ein Wettender über eine Informationen I verfügt, die für die Ereignisse, auf die gewettet werden kann, relevant ist, dann muss er seine Wahrscheinlichkeiten entsprechend $P_{neu}(a) = P_{alt}(a|I)$ anpassen. Zeige: Wenn der Wettende für irgendeine Aussage a die Wahrscheinlichkeit $P_{neu}(a) \neq P_{alt}(a|I)$ wählt, dann ist es für einen geschickten Buchmacher möglich eine „todsichere Wette" abzuschließen. *Hinweis*: Der Buchmacher muss dazu sowohl auf a als auch auf I eine Wette abschließen und die Wettbeträge entsprechend aufeinander abstimmen. Dabei weiß er, ob $P_{neu}(a) < P_{alt}(a|I)$ oder $P_{neu}(a) > P_{alt}(a|I)$.

7 Entscheidungen unter Risiko I: Grundlagen

In dieser Vorlesung werden wir eingehend das Konzept des „Erwartungsnutzens“ untersuchen. In diesem Zusammenhang werden wir ausführlich auf die Grundlagen des sogenannten „Neumann-Morgensternschen“ Nutzenbegriffs eingehen, der schon früher als „kardinale Nutzenfunktion“ eingeführt wurde (siehe Kapitel 4.1).

7.1 Die Berechnung des Erwartungsnutzens

Das zentrale Gesetz des Erwartungsnutzens ist die sogenannte Erwartungsnutzenhypothese. Sie besagt, dass der Erwartungsnutzen eines unsicheren Ereignisses gleich dem erwarteten Nutzen multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Ereignisses ist. Unter dem „Erwartungsnutzen“ ist dabei der Nutzen des noch *unsicheren* Ereignisses zu verstehen. Während mit dem „erwarteten Nutzen“ der Nutzen des Ereignisses (für einen bestimmten Akteur) gemeint ist, wenn dass Ereignis eingetreten ist. „Erwartungsnutzen“ und „erwarteter Nutzen“ dürfen also nicht verwechselt werden! Der Zusammenhang kann also mathematisch folgendermaßen formuliert werden:

$$E_w U = p \cdot U \tag{7.1}$$

EU	Erwartungsnutzen eines bestimmten Ereignisses
p	Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses
U	Der Nutzen des eingetretenen Ereignisses („erwarteter Nutzen“)

Wird der Zusammenhang so wie in Gleichung 7.1 ausgedrückt, dann wird dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass der erwartete Nutzen, wenn das Ereignis nicht eintritt, Null beträgt. In etwas präziserer und allgemeinerer Form müsste man den Zusammenhang so darstellen:

Sei $e_1, \dots, e_n$ eine *Partition* von Ereignissen, d.h. eine Menge von Ereignissen, die sich wechselseitig ausschließen, von denen eins aber eintreten muss. Seien weiterhin die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Ereignisse eintreten können: $p_1, \dots, p_n$ und ihre erwarteten Nutzenwerte $U_1, \dots, U_n$. Dann berechnet sich der Erwartungsnutzen nach:

$$E_w U = p_1 \cdot U_1 + p_2 \cdot U_2 + \dots p_n \cdot U_n \tag{7.2}$$

Die Berechnung des Erwartungsnutzen hat aber nur dann Sinn, wenn wir eine *kardinale Nutzenfunktion* (siehe Kapitel 4.1) voraussetzen dürfen. Sie ist insbesondere dann unproblematisch, wenn es sich bei dem Nutzen um Geldwerte handelt. Dass unter der Voraussetzung kardinaler Nutzenwerte die Verwendung der Ewartungsnutzens zur Bewertung unterschiedlicher Handlungsalternativen unbedenklich ist, ergibt sich daraus, dass der Erwartungsnutzen von positiv linear transformierten Nutzenwerten gleich dem positiv linear transformierten Erwartungsnutzen der Nutzenwerte ist. Mathematisch gesprochen: Seien u und v zwei äquivalente Nutzenskalen, d.h. es gilt: $v = au + b$ mit $a > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
E_w V &= p_1 \cdot V_1 + \ldots + p_n \cdot V_n \\
&= p_1 \cdot (aU_1 + b) + \ldots + p_n \cdot (aU_n + b) \\
&= ap_1 \cdot U_1 + \ldots + ap_n \cdot U_n + \sum_{i=1}^{n} p_i b \\
&= a(p_1 \cdot U_1 + \ldots + p_n \cdot U_n) + b \\
&= aE_w U + b \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

(*Hinweis*: Da $p_1 + \ldots + p_n = 1$ (es handelt sich um eine Partition von Ereignissen, d.h. ein Ereignis tritt auf jeden Fall ein) durften wir im vorletzten Schritt $\sum_{i=1}^{n} p_i b = b \sum_{i=1}^{n} p_i = b \cdot 1 = b$ verwenden.)

Bewertet man den Wert unterschiedlicher Handlungsalternativen einer Entscheidung unter Risiko (d.i. einer Entscheidung bei der die Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Zufallsereignisse bekannt sind) mit Hilfe des Erwartungsnutzens, so ist damit sichergestellt, dass die Rangfolge der Alternativen dieselbe bleibt, wenn wir unsere Nutzenfunktion durch eine äquivalente kardinale Nutzenfunktion ersetzen. Denn sei $E_w U_A$ der einer Handlungsalternative A zugeordnete Erwartungsnutzen und $E_w U_B$ der einer Handlungsalternative B zugeordnete Erwartungsnutzen und gelte:

$$E_w V_A = aE_w U_A + b$$

$$E_w V_B = aE_w U_B + b$$

Dann folgt aus aus $E_w U_A > E_w U_B$ für positive a offensichtlich, dass auch $E_w V_A > E_w U_B$ und aus $E_w U_A = E_w U_B$, dass $E_w V_A = E_w U_B$

Aus dem Erwartungsnutzen ergibt sich eine sehr einfache Entscheidungsregel für Entscheidungen unter Risiko, sofern die erwarteten Werte mindestens auf einer kardinalen Nutzenskala eingetragen werden können, nämlich die Regel:

Entscheidungsregel für Entscheidungen unter Risiko: Wähle diejenige Entscheidung, bei der der Erwartungsnutzen am größten ist.

Dass diese Regel bei Entscheidungen unter Risiko tatsächlich die beste ist, werden wir gleich noch ausführlicher begründen. Wenn sie aber die beste ist, dann ergibt sich für Unterscheidungen unter Risiko, dass wir nicht – wie bei Entscheidungen unter Unwissenheit – mit dem Problem zu kämpfen haben, dass es eine Reihe unterschiedlicher Entscheidungsregeln gibt, die alle sinnvoll begründet werden können, die aber unter Umständen unterschiedliche Ergebnisse liefern. (Inwiefern dies ein ernstzunehmendes Problem ist, sei dahin gestellt. Man könnte es auch so interpretieren, dass es bei Entscheidungen unter Unwissenheit eben keine generell beste Entscheidungsregel gibt, sondern nur situationsspezifisch angemessene, wenn man voraussetzt, dass die Auswahl der richtigen Entscheidungsregel unter Berücksichtigung der näheren situtationsspezifischen Bedingungen und Umstände leichter fällt.)

7.1.1 Beispiele

Wie kann man mit Hilfe dieser Entscheidungsregel Entscheidungen unter Risiko treffen. Dazu ein Beispiel. Eine Computerfirma hat erfahren, dass die Konkurrenz dabei ist, eine neue Art von sehr preiswerten Kleinstlaptops zu entwickeln. Sie steht nun vor der Wahl, ob sie ebenfalls in die Entwicklung derartiger Laptops investieren soll. Es steht nicht fest, ob diese Art Laptops vom Markt akzeptiert wird. Auch hängt der zu erwartende Gewinn davon ab, ob es der Konkurrenz gelingt, noch in diesem Jahr ihr Produkt auf den Markt zu werfen, in welchem Fall man die Eigenentwicklung zu einem deutlich niedrigeren Preis mit entsprechend reduzierten Gewinnerwartungen anbieten müsste. Andererseits ist zu berücksichtigen, dass eine erfolgreiche Konkurrenz durch Kleinstlaptops die Firma auch Marktanteile in ihren Kernbereichen kosten könnte. Daraus ergibt sich folgendes Entscheidungsproblem:

	S_1 $(p = 0.3)$	S_2 $(p = 0.2)$	S_3 $(p = 0.5)$	
A_1	-100.000 €	-50.000	€ 60.000	$EU = -10.000$ €
A_2	0 €	-80.000	€ 0	$EU = -16.000$ €

A_1: Investiere in die rasche Entwicklung eines Kleinstlaptops.
A_2: Investiere nicht in die Entwicklung eines Kleinstlaptops.

S_1: Kleinstlaptops bleiben auf dem Markt erfolglos.
S_2: Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Konkurrenz ist ebenfalls frühzeitig auf dem Markt präsent.
S_3: Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Entwicklung der Konkurrenz verzögert sich.

Der Erwartungsnutzen der jeweiligen Handlungen wurde dabei folgendermaßen errechnet:

$$\begin{aligned} EU_{A1} &= -100.000 \cdot 0.3 - 50.000 \cdot 0.2 + 60.000 \cdot 0.5 = -10.000 \\ EU_{A2} &= 0 \cdot 0.3 - 80.000 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 = -16.000 \end{aligned}$$

Wie man an dem berechneten Erwartungsnutzen sieht, lohnt sich die Investition in die Entwicklung eines Kleinstlaptops, obwohl auch in diesem Fall ein Verlust zu erwarten ist. Es kann Entscheidungsprobleme geben, bei denen nicht nur die Nutzenwerte, sondern auch die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis eintritt, davon abhängt, welche Handlungsalternative man wählt. In diesem Fall müssen die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse in jeder Zeile separat mit angegeben werden. Für die Berechnung des Erwartungsnutzens müssen dann natürlich die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Zeile herangezogen werden. Ein Beispiel: Ein großes Softwareunternehmen möchte im Laufe der nächsten Monate ein kleines Softwareunternehmen aufkaufen. Es besteht die Möglichkeit, dass der Aktienkurs des Kleinunternehmens in den folgenden Monaten sinkt, steigt oder gleich bleibt, worüber die Experten des Großunternehmens relativ zuverlässige Schätzungen abgeben können. Das Großunternehmen kann seine Kaufabsicht vorher ankündigen oder auch nicht. Kündigt es die Kaufabsicht vorher an, so erhöht das die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktionkurs und damit der Preis des Kleinunternehmens steigt. Zugleich führt dies aber dazu, dass das Kleinunternehmen, das bisher ein direkter Konkurrent des Großunternehmens ist, bis zum Verkauf kaum noch Lizenzen absetzen kann, woraus sich in diesem Fall ein fixer Gewinn für das Großunternehmen ergibt. Das Entscheidungsproblem sieht als Tabelle folgendermaßen aus (Die eingetragenen Werte repräsentieren dabei die Gesamtkosten, die sich aus dem zu erwartenden Kaufpreis minus dem fixen Gewinn aus zusätzlichen Lizenzverkäufen nach Wegfall einer effektiven Konkurrenz in Folge der Ankündigung ergeben):

	Kurs steigt	Kurs fällt	bleibt gleich	EU
A_1:	5.000.000 € (p=0.1)	2.000.000 € (p=0.6)	4.000.000 € (p=0.3)	2.900.000 €
A_2:	4.500.000 € (p=0.7)	1.500.000 € (p=0.1)	3.500.000 € (p=0.2)	4.000.000 €

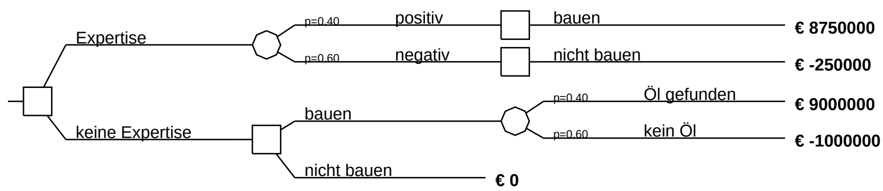
A_1 Kündige die Aquise *nicht* vorher an.
A_2 Kündige die Aquise vorher an.

Dies mal sieht die Berechnung des Erwartungsnutzens folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
EU_{A1} &= 5.000.000 \cdot 0.1 + 2.000.000 \cdot 0.6 + 4.000.000 \cdot 0.3 = 2.900.000 \\
EU_{A2} &= 4.500.000 \cdot 0.7 + 1.500.000 \cdot 0.1 + 3.500.000 \cdot 0.2 = 4.000.000
\end{aligned}$$

Da es sich bei den eingetragenen Werten um Kosten handelt, sollte das Unternehmen tunlichst vermeiden, die Aquiseabsichten vorher anzukündigen.

Schließlich wollen wir noch an einem Beispiel betrachten, wie man den Erwartungsnutzen einsetzt, um Entscheidungsbäume aufzulösen. Eine Ölfirma erwägt an einer bestimmten Stelle in der Nordsee nach Öl zu bohren. Es ist nicht absolut sicher, ob sich an dem entsprechenden Ort tatsächlich Öl befindet. Um dies mit Sicherheit festzustellen, kann die Firma eine Probebohrung durchführen lassen. Der Bau einer Bohrinsel kostet € 1.000.000. Liefert die Bohrinsel tatsächlich Öl, so gewinnt die Ölfirma abzüglich der Betriebskosten € 10.000.000. Die Durchführung einer Expertise mit Hilfe einer Probebohrung kostet € 250.000. Wir gehen der Einfachheit davon aus, dass die Probebohrung absolut zuverlässig darüber Auskunft gibt, ob Öl vorhanden ist. Weiterhin sei angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Öl vorhanden ist 60% beträgt. Um einen entsprechenden Entscheidungsbaum für Entscheidungen unter Risiko zu zeichnen, werden die Wahrscheinlichkeiten für Zufallsereignisse jeweils auf den entsprechenden Zweigen nach dem Ereignisknoten eingetragen. Der Entscheidungsbaum sieht dann folgendermaßen aus:



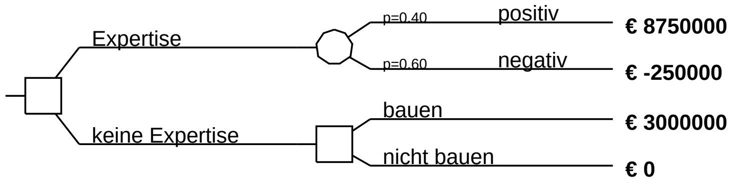
Wie kann man nun die Frage klären, ob es sich lohnt eine Expertise durchführen zu lassen oder nicht? Dazu muss man den Entscheidungsbaum von rechts nach links schrittweise nach folgenden Regeln auflösen:

1. Ersetze jeden *Ereignisknoten* (der letzten Ebene) durch den Erwartungsnutzen des entsprechenden Ereignisses.

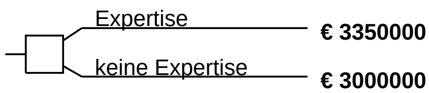
2. Ersetze jeden *Entscheidungsknoten* (der letzten Ebene) durch den (Erwartungs-)Wert der besseren Alternative.

3. Führe das Verfahren fort bis die gesuchte (Teil-)Entscheidung erreicht ist.

In unserem Fall ist die gesuchte Entscheidung die Anfangsentscheidung, ob eine Expertise durchgeführt werden soll. Wenn man den Baum nach dem entsprechenden Verfahren reduziert, dann sieht der Entscheidungsbaum nach dem ersten Schritt so aus:



Der Erwartungswert, den man erhält, wenn man die Bohrinsel baut, ohne eine Expertise durchzuführen beträgt € 3.000.000 (= € $0.4 \cdot 9.000.000 - 0.6 \cdot 1.000.000$). Dieser Erwartungswert wurde an die Stelle des entsprechenden Ereignisknotens gesetzt. Da im anderen Fall die Entscheidung zum Bau mit dem Ausgang der Expertise schon feststeht, wurden hier einfach die entsprechenden Werte übertragen. Da der Bau der Ölplattform auch ohne vorherige Probebohrung einen höheren Erwartungswert als 0 € liefert, muss für den letzten Schritt nur noch der Erwartungsnutzen berechnet werden, der sich ergibt, wenn man sich dazu entscheidet, die Expertise durchzuführen. Der nochmals reduzierte Entscheidungsbaum sieht dann folgendermaßen aus:



Es ist nun unmittelbar ersichtlich, dass es besser ist, vorher eine Expertise in Auftrag zu geben, da der daraus resultierende Erwartungswert der größere ist.

7.2 Die Rechtfertigung des Erwartungsnutzens

Soeben wurde gezeigt, wie man mit Hilfe des Erwartungsnutzens auf einfache Weise Entscheidungsprobleme lösen kann. Zugleich wurde behauptet, dass der Ewartungsnutzen bei Entscheidungen unter Risiko im Grunde die einzig sinnvolle Entscheidungsregel darstellt. Aber warum ist das so?

Eine Antwort auf diese Frage ist die, dass man, wenn man bei Entscheidungen unter Risiko den Erwartungsnutzen zu Grunde legt, *auf lange Sicht* den größten Gewinn erzielen kann. Um sich das klar zu machen nehme man eine Entscheidungssituation an, in der man entweder einen festen Geldbetrag erhalten kann, oder mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit einen höheren Geldbetrag. Z.B. könnte eine Person vor der Entscheidung stehen, ob sie mit 5 € Einsatz an einer Lotterie teilnehmen will, bei der sie mit 3% Wahrscheinlichkeit 100 € gewinnen kann, oder ob sie das Geld lieber behält. Behält sie das Geld, so entspricht das einem sicheren Gewinn von 5€. Wird diese Entscheidungssituation viele Male wiederholt, besagt das Gesetz der Großen Zahlen aus der Statistik, dass der Grenzwert der Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis eintritt (in diesem Fall der Gewinn der Lotterie) mit der Wahrscheinlichkeit 1 der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses entspricht. Handelt es sich bei der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses um eine empirisch-statistische Wahrscheinlichkeit und legt man die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit zu Grunde (siehe Kapitel 6.1.2), so gilt sogar, dass der Grenzwert der Häufigkeit mit Sicherheit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses entspricht. Einfach ausgedrückt bedeutet dies: Wir können bei hinreichend häufiger Wiederholung getrost davon ausgehen, dass das Ereignis genau so oft eintritt, wie es seiner Wahrscheinlichkeit entspricht. In diesem Fall hieße das, dass drei Prozent der Lotterien gewonnen werden. Bei einem Gewinn von 100 € wird man auf lange Sicht 3 € pro Lotterie eingenommen haben, was genau dem Erwartungswert der Lotterie $EU = 0.03 \cdot 100$ € entspricht. Damit ist die Lotterie aber deutlich weniger wert als der Einsatz von 5 €. Nimmt man nun statt der 5€ einen beliebigen Teilnahmepreis bzw. Einsatz $c > 3$ € an, so kann man sich leicht klar machen, dass man nur dann die richtige (d.h. nutzenmaximierende) Entscheidung trifft, nicht an der Lotterie teilzunehmen, wenn man die Lotterie höchstens mit ihrem Erwartungswert bewertet. Nimmt man umgekehrt einen beliebigen Einsatz $c < 3$ €, so würde man nur dann die auf lange Sicht richtige Entscheidung treffen, an der Lotterie teilzunehmen, wenn man die Lotterie mindestens mit ihrem Erwartungswert bewertet. Insgesamt ergibt sich, dass man auf lange Sicht immer den Erwartungswert (= Wahrscheinlichkeit mal erwarteter Wert) für die Bewertung von Zufallsereignissen zu Grunde legen sollte. Etwas einfacher formuliert, könnte man auch sagen, man soll Zufallsereignisse weder zu optimistisch noch zu pessimistisch bewerten, sondern genau entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit.

Dieselbe Argumentation lässt sich auch auf beliebie kardinale Nutzenwerte übertragen, sofern man die Geldwerte durch Nutzenwerte ersetzt und statt des Erwartungs*wertes* mit dem Erwartungs*nutzen* rechnet.

Die Argumentation weist zwei Schwierigkeiten auf: Erstens gilt sie nur auf lange Sicht, und es stellt sich zumindest die Frage, ob man das, was auf lange Sicht gilt auch auf einzelne Zufallsereignisse, die sich in derselben Form nicht wiederholen, übertragen darf. Zweitens lässt sie sich nur bei kardinalen Nutzenwerten anwenden, da wir sonst den Erwartungsnutzen nicht einmal bestimmen können. Für beide Probleme versucht die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie eine Lösung anzubieten. Für das erste Problem, indem sie zeigt, dass der Erwartungsnutzen aus bestimmten Konsistenzbedingungen hervorgeht, die verletzt werden, wenn man ihn nicht richtig als das Produkt aus erwartetem Nutzen und Wahrscheinlichkeit berechnet – ähnlich wie subjektive Wahrscheinlichkeiten inkonsistent werden, sobald man die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung verletzt (siehe 6.2). Für das zweite Problem, indem sie aus einer beliebigen Präferenzrelation – sofern man, was allerdings äußerst fragwürdig ist, annimmt, dass sie in dem Sinne universell ist, dass sie sich auf beliebige auch gedachte Güter in Form sogenannter „Lotterien" beziehen lässt – durch trickreiche Vergleiche eine kardinale Nutzenfunktion konstruiert. Diese Theorie werden wir uns im Folgenden genauer anschauen.

7.3 Die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie

Die Grundidee der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie besteht darin, neben den bestehenden Gütern (bzw. den Ergebnissen von Entscheidungsprozessen) „Lotterien" als gedachte Güter einzuführen und durch den Vergleich (hinsichtlich der Präferenzrelation) von Lotterien und Gütern bzw. Lotterien untereinander sowie mit Hilfe von als selbst-evident angesehenen Konsistenzbedingungen eine eine kardinale Nutzenfunktion und das Prinzip des Erwartungsnutzen abzuleiten. (Für das Folgende vgl. [23, S. 88-98]) Wie sehen diese „Lotterien" aus und wie kommen sie zu Stande?

Angenommen jemand ordnet seine Präferenzen bezüglich der drei Güter „Eiscreme", „Joghurt" und „Trockenes Brot" auf diese Weise:

$$\text{Eiscreme} \succ \text{Joghurt} \succ \text{Trockenes Brot}$$

Nun postulieren John von Neumann und Oskar Morgenstern, dass es eine Lotterie mit zwei möglichen Preisen, nämlich „Eiscreme" als Hauptgewinn und „Trockenes Brot" als Niete gibt (wobei man den Hauptgewinn mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit a erhält und die Niete dementsprechend mit der inversen Wahrscheinlichkeit $1 - a$), so dass zwischen dieser Lotterie und dem in der Mitte eingeordneten Gut „Joghurt" Indifferenz herrscht. Angenommen eine Person speist gerne Jogurt, so dass dieser Indifferenzpunkt bei einer Gewinnwahrscheinlichkeit von $a = 80\%$ erreicht wird. Dann gilt, wenn wir unsere gedachte Lotterie mit „Lotterie (a=0.8, Eiscreme, Trockenes Brot)" bezeichnen:

$$\text{Lotterie (a=0.8, Eiscreme, Trockenes Brot)} \sim \text{Joghurt}$$

Wozu in aller Welt soll das gut sein? Und woher soll nun einer wissen, ob er zwischen Jogurt und einer 80%-igen Gewinnchance auf Eiscreme (bei Strafe von trockenem Brot) indifferent ist und nicht etwa einer 70%-igen oder 60%-igen etc.? Die Antwort auf die erste Frage ist, dass sich damit eine raffinierte, und unter einer großen Gruppe von Ökonomen und einer kleinen Gruppe von Philosophen überaus populäre Nutzentheorie aufbauen lässt, die wir gleich kennen lernen werden. Die Antwort auf die zweite Frage stellt eine etwas schwierige Angelegenheit dar, die man lange diskutieren müsste. So recht überzeugend lässt sie sich offen gestanden nicht beantworten, so dass wir an dieser Stelle – um der schönen Theorie willen! – eine gehörige Portion dessen mitbringen müssen, was man in der Ästhetik als „willing suspension of disbelief“[18] bezeichnet.

Ist man dazu bereit, sich die Theorie trotz ihrer zweifelhaften Voraussetzungen anzuhören, so wird man Lotterien der Einfachheit halber in der Form darstellen:

$$L(a, x, y)$$

Dabei sind x und y zwei beliebige Güter. a ist die Wahrscheinlichkeit, mit der der Gewinn x herauskommt, und $1 - a$ ist dementsprechend die Wahrscheinlichkeit mit der die „Niete“ y gezogen wird. An dieser Stelle wird auch deutlich, warum es mit dem Hilfsmittel der Lotterien immer möglich ist, aus beliebigen wohlgeformten Präferenzen eine kardinale Nutzenfunktion zu erzeugen: Indem wir unserem Akteur nämlich eine definitive Wahrscheinlichkeitsangabe abnötigen, zwingen wir ihn zu genau der Zahlenangabe, die wir brauchen, um eine Intervallskala zu konstruieren, und die uns beim bloß ordinalen Nutzen fehlt.

Wenn man schon zulässt, dass Güter mit dieser Art von Lotterien darauf hin verglichen werden können, ob irgendein Akteur indifferent zwischen ihnen ist, dann ist es nur ein kleiner Schritt auch noch Lotterien mit Lotterien zu vergleichen. D.h. wenn $L_1(a_1, x_1, y_1)$ eine Lotterie ist und $L(a_2, x_2, y_2)$ eine weitere, dann kann man für jedes Gut oder jede Lotterie die bezüglich der Präferenzen des Akteurs zwischen L_1 und L_2 eingeordnet ist eine Lotterie $L(b, L_1, L_2)$ konstruieren, so dass der Akteur zwischen dieser Lotterie und dem mittleren Gut (oder der mittleren Lotterie) indifferent ist.

Auf diese Weise kann man nach folgenden drei Regeln eine „vollständige Menge“ [19] von Lotterien konstruieren (vgl. [23, S. 91]):

[18] Soll heißen: Wenn wir ins Theater gehen und uns ein bekanntes Stück wie z.B. „Hamlet“ anschauen, dann wissen wir natürlich schon, wie es ausgeht, aber wir tun eben so, als wüssten wir es nicht („willing suspension of disbelief“) und fiebern trotzdem mit unserem Helden mit! (Der Ausdruck geht angeblich auf Coleridge (Anfang 19.Jh.) zurück.)

[19] Dieses Verfahren, aus einer Grundmenge mit Hilfe bestimmter „Produktionsregeln“ einen Abschluss zu erzeugen, ist uns schon bei dem *De Finetti-Abschluss* in der letzten Vorlesung begegnet (siehe Seite 92).

1. Jedes *Grundgut* („basic prize“) ist eine Lotterie. (Im Zweifelsfall kann man für ein Gut x ja immer die Lotterie $L(1, x, x)$ nehmen.) Es wird weiterhin angenommen, dass es ein oder mehrere beste bzw. schlechteste Grundgüter gibt (was immer gegeben ist, wenn die Menge der Güter endlich ist).

2. Wenn L_1 und L_2 Lotterien sind, dann auch $L(a, L_1, L_2)$ für jedes beliebige a mit $0 \leq a \leq 1$.

3. Es gibt keine Lotterien außer den nach den ersten beiden Regeln konstruierten.

Weiterhin wird verlangt, dass für die Lotterien folgende Bedingungen gelten (vgl: [23, S. 90-92]) :

1. *Ordnungsbedingung*: Auf der vollständigen Menge der Lotterien ist eine Präferenzrelation definiert, (die bezüglich der ursprünglichen Güter mit der auf der Menge dieser Güter definierten Präferenzrelation übereinstimmen sollte.)

2. *Kontinuitätsbedingung*: Für beliebige Lotterien x,y und z gilt: Wenn $x \succ y$ und $y \succ z$, dann gibt es eine Lotterie $L(a, x, z)$, so dass $y \sim L(a, x, z)$.

3. *Bedingung der höheren Gewinne*: Für beliebige Lotterien x,y und z und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt: $x \succ y$ genau dann wenn $L(a, x, z) \succ L(a, y, z)$. (Einfach gesagt: Eine Lotterie wir dann vorgezogen, wenn man „höhere Preise“ gewinnen kann.)

4. *Bedingung der besseren Chancen*: Für jedes Paar von Lotterien x und y und beliebige Wahrscheinlichkeiten a und b gilt: Wenn $x \succ y$ dann ist $L(a, x, y) \succ L(b, x, y)$ genau dann wenn $a > b$. (Einfach gesagt: Bei gleichen Preisen wird die Lotterie mit den höheren Chancen bevorzugt.)

5. *Reduzierbarkeit zusammengesetzter Lotterien*: Für jede zusammengesetzte Lotterie der Form $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$ gilt $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y)) \sim L(d, x, y)$ mit $d := ab + (1 - a)c$. (Einfach ausgedrückt: Zusammengesetzte Lotterien können entsprechend den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einfachere reduziert werden.)

Wenigstens die zweite und dritte dieser Bedingungen kann man als selbstevident betrachten. Die anderen Bedingungen sind zumindest plausibel, wenn man sich überhaupt auf das Gedankenexperiment mit den „Lotterien“ einlässt. Was Neumann und Morgenstern nun bewiesen haben ist, dass man, wenn diese Bedingungen gegeben sind, eine Nutzenfunktion konstruieren kann, die die Erwartungsnutzeneigenschaft hat, und die zugleich eine kardinale Nutzenfunktion ist. Insgesamt muss die so konstruierte Nutzenfunktion u also die folgenden Eigenschaften haben:

1. $u(x) > u(y)$ genau dann wenn $x \succ y$
2. $u(x) = u(y)$ genau dann wenn $x \sim y$
3. $u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$ (*Erwartungsnutzeneigenschaft*)
4. Jede Nutzenfunktion u', welche die ersten drei Bedingungen erfüllt, kann durch positiv lineare Transformation in die Nutzenfunktion u überführt werden.

Wie kann man das beweisen? Resnik folgend kann der Beweis in zwei Schritten geführt werden, indem zuerst die *Existenz* einer Nutzenfunktion bewiesen wird, die die ersten drei Eigenschaften erfüllt, und dann die *Eindeutigkeit* dieser Nutzenfunktion bis auf positive lineare Transformation.

7.3.1 Vorbereitung des Beweises

Bevor wir diesen Beweis führen, sollen einige unmittelbare Corrolarien der Bedingung der höheren Gewinne und der Bedingung der besseren Chancen vorgestellt werden, die uns helfen, den folgenden Beweis besser zu verstehen. Für den Beweis dieser Corrolarien verwenden wir die Tatsache, dass die Lotterie $L(a, x, y)$ identisch ist mit der Lotterie $L(1 - a, y, x)$ und daher entsprechnd ersetzt werden kann.

1. *Corrolar zur Bedingung der besseren Chancen*:

   $$\forall_{x,y} \forall_{a,b} \qquad x \prec y \Rightarrow L(a, x, y) \prec L(b, x, y) \Leftrightarrow a > b$$

   Beweis: Sei $x \prec y$, dann ist $y \succ x$, dann gilt aber nach der Bedingung der besseren Chancen:

   $$\begin{aligned} L(1 - b, y, x) \succ L(1 - a, y, x) &\Leftrightarrow 1 - b > 1 - a \\ L(b, x, y) \succ L(a, x, y) &\Leftrightarrow b < a \\ L(a, x, y) \prec L(b, x, y) &\Leftrightarrow a > b \end{aligned}$$

2. *Corrolar zur Bedingung der besseren Chancen*:

$$\forall_{x,y}\forall_{a,b} \qquad x \not\sim y \Rightarrow L(a,x,y) \not\sim L(b,x,y) \Leftrightarrow a \neq b$$

Beweis: Wenn $x \not\sim y$, dann ist entweder $x \succ y$ oder $x \prec y$. Wenn $x \succ y$, dann ist nach der Bedingung der besseren Chancen entweder $L(a,x,y) \succ L(b,x,y) \Leftrightarrow a > b$ oder $L(b,x,y) \succ L(a,x,y) \Leftrightarrow b > a$, also in jedem Fall $L(a,x,y) \not\sim L(b,x,y) \Leftrightarrow a \neq b$. Wenn aber $x \prec y$, dann folgt aus dem vorherigen Korrolar auf dieselbe Weise, dass $L(a,x,y) \not\sim L(b,x,y) \Leftrightarrow a \neq b$. Da dieser Ausdruck sowohl für $x \succ y$ als auch für $x \prec y$ folgt, folgt er in jedem Fall für $x \not\sim y$.

3. *Corrolar zur Bedingung der höheren Gewinne*:

$$\forall_{x,y,z}\forall_{a} \qquad x \succ y \Leftrightarrow L(a,z,x) \succ L(a,z,y)$$

Inhaltlich bedeutet dies, dass die Bedinung der höheren Gewinne auf der zweiten Stelle der Lotterie ebenso gilt wie auf der ersten. Beweis: Da nach der Bedingung der höhren Gewinne $x \succ y \Leftrightarrow L(b,x,z) \succ L(b,y,z)$ für alle b, gilt für alle $1-b$ auch $x \succ y \Leftrightarrow L(1-b,z,x) \succ L(1-b,z,y)$. Mit $a := 1-b$ gilt dann aber auch („ohne Beschränknung der Allgemeinheit“ wie die Mathematiker sagen, da man für jedes $1-b$ ein entsprechendes $a := 1-b$ definieren kann) die Behauptung.

4. *Corrolar zur Bedingung der höheren Gewinne*:

$$\forall_{x,y,z}\forall_{a} \qquad x \not\sim y \Leftrightarrow L(a,z,x) \not\sim L(a,z,y) \wedge L(a,x,z) \not\sim L(a,y,z)$$

Beweisskizze: Wenn $x \not\sim y$, dann ist entweder $x \succ y$ oder $x \prec y$. In beiden Fällen ergibt sich die Implikation, dass $L(a,z,x) \not\sim L(a,z,y) \wedge L(a,x,z) \not\sim L(a,y,z)$ unmittelbar aus der Bedingung selbst. Zu zeigen ist nun noch, dass auch die Implikation gilt: Wenn $L(a,z,x) \not\sim L(a,z,y) \wedge L(a,x,z) \not\sim L(a,y,z)$ dann $x \not\sim y$. Wiederum sind zwei Fälle von $\not\sim$ zu unterscheiden, nämlich $\succ$ und $\prec$. Die Implikation ergibt sich dann wiederum unmittelbar aus der Bedingung selbst.

5. *Corrolar: Subsitutionsgesetz*:

$$\forall_{L^*} \qquad L^* \sim L(a,x,y) \Rightarrow L(b,L^*,z) \sim L(b,L(a,x,y),z)$$

Beweis: Aus dem vorhergehenden Corrolar ergibt sich, dass

$$L(b,L^*,z) \not\sim L(b,L(a,x,y),z) \Rightarrow L^* \not\sim L(a,x,y)$$

Im Umkehrschluss muss daher gelten:

$$L^* \sim L(a,x,y) \Rightarrow L(b,L^*,z) \sim L(b,L(a,x,y),z)$$

7.3.2 Existenz der Nutzenfunktion

Um den Beweis der *Existenz* einer Nutzenfunktion mit der Erwartungsnutzeneigenschaft zu führen, konstruieren wir eine solche Funktion u und zeigen, dass sie eine Nutzenfunktion ist (Eigenschaften 1 und 2) und dass sie die Erwartungsnutzeneigenschaft besitzt (Eigenschaft 3). Dazu bezeichnen wir zunächst entsprechend Resniks Darstellung [23, S. 94] das beste Gut als B („best“) und das schlechteste Gut als W („worst“). (In dem Fall, dass es mehrere beste oder schlechteste Güter gibt, bezeichnet B ein beliebiges bestes Gut und S ein beliebiges schlechtestes Gut.) Dann setzen wir fest:

$$u(B) := 1 \quad \text{und} \quad u(x) := 1 \quad \text{für jede Lotterie } x \text{ mit} \quad x \sim B$$

$$u(W) := 0 \quad \text{und} \quad u(x) := 0 \quad \text{für jede Lotterie } x \text{ mit} \quad x \sim W$$

Nun betrachten wir eine beliebige Lotterie x, die hinsichtlich der Präferenzrelation zwischen B und W eingeordnet ist (also: $B \succ x$ und $x \succ W$). Nach der *Kontinuitätsbedingung* gibt es dann auch eine Lotterie $L(a, B, W) \sim x$ mit einer Wahrscheinlichkeit a, $0 \leq a \leq 1$. Wir können nun

$$u(x) := a$$

setzen, falls die Wahrscheinlichkeit a eindeutig bestimmt ist. Das ist aber der Fall, weil für jedes $a' \neq a$ auf Grund der *Bedingung der besseren Chancen* gilt: $L(a', B, W) \not\sim L(a, B, W)$ Da die Indifferenzrelation $\sim$ transitiv ist („wohlgeformte Präferenzen“), muss dann auch gelten: $L(a', B, W) \not\sim x$.

Man beachte, dass aus der Definition $u(x) := a$ für alle Lotterien x unmittelbar folgt:

$$x \sim L(u(x), B, W)$$

Und insbesondere gilt auch für alle Lotterien L(a, x, y):

$$L(a, x, y) \sim L(u(L(a, x, y)), B, W)$$

Von diesem Zusammenhang werden wir weiter unten noch Gebrauch machen.

Mit $u(x) = a$ haben wir dann aber bereits eine Funktion definiert, die jeder Lotterie x einen eindeutigen Wahrscheinlichkeitswert a zuordnet. Zu zeigen ist noch, dass es sich dabei um eine Nutzenfunktion mit der Erwartungsnutzeneigenschaft handelt. Dazu müssen wir zunächst nachweisen, dass die ersten drei der oben aufgeführten Eigenschaften für die so definierte Funktion u gegeben sind.

Teilbeweis der Eigenschaft $u(x) > u(y)$ genau dann wenn $x \succ y$: Wenn $u(x) = a$ für dasjenige a, für welches gilt $L(a, B, W) \sim x$, dann ergibt sich durch Einsetzen unmittelbar $x \sim L(u(x), B, W)$. Aufgrund der *Bedingung der besseren Chancen* wissen wir, dass

$$L(u(x), B, W) \succ L(u(y), B, W) \qquad \Leftrightarrow \qquad u(x) > u(y)$$

Da jeweils gilt $x \sim L(u(x), B, W)$ und $y \sim L(u(y), B, W)$ können wir die Lotterien in der vorkommenden Äquivalenzaussage durch x und y ersetzen und erhalten das Gesuchte.

Teilbeweis der Eigenschaft $u(x) = u(y)$ genau dann wenn $x \sim y$: Aus der *Bedingung der besseren Chancen* ergibt sich dass

$$L(u(x), B, W) \sim L(u(y), B, W) \qquad \Leftrightarrow \qquad u(x) = u(y)$$

denn wäre $u(x) \neq u(y)$, dann ist entweder $u(x) > u(y)$ oder $u(x) < u(y)$, und in beiden Fällen besagt die Bedingung der besseren Chancen, dass dann auch für die entsprechenden Lotterien $\succ$ oder $\prec$ gelten muss, so dass $\sim$ nur noch gelten kann, wenn $u(x) = u(y)$. Durch Ersetzen analog zum Vorigen erhalten wir wiederum das Gesuchte.

Teilbeweis der Eigenschaft $u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$. Um den Beweis zu führen bedienen wir uns des zuvor als Corollar bewiesenen Substitutionsgesetzes (siehe Seite 115). Der Einfachheit halber soll dabei L^* für die Lotterie $L(a, x, y)$ stehen. Nach der Definition der Nutzenfunktion ($u(x) := b$ wenn $x \sim L(b, B, W)$), gilt:

$$x \sim L(u(x), B, W)$$

$$y \sim L(u(y), B, W)$$

Durch Substitution von x und y in der Lotterie L^* erhalten wir:

$$L^* \sim L(a, L(u(x), B, W), L(u(y), B, W))$$

Nach der *Reduzierbarkeitsbedingung* ergibt sich daraus:

$$L^* \sim L(a, L(u(x), B, W), L(u(y), B, W)) \sim L(d, B, W)$$

mit $d = au(x) + (1 - a)u(y)$. Da aber (nach unserer Definition von u) gilt: $L^* \sim L(u(L^*), B, W)$, so erhalten wir daraus:

$$L(u(L^*), B, W) \sim L(d, B, W)$$

Da auf Grund der Bedingung der besseren Chancen in diesem Falle $u(L^*) = d$ sein muss, folgt das Gesuchte. Damit ist der Beweis der Existenz einer Nutzenfunktion, der die Erwartungsnutzeneigenschaft zukommt, abgeschlossen.

7.3.3 Eindeutigkeit der Nutzenfunktion

Die *Eindeutigkeit* der eben definierten Nutzenfunktion ist so zu verstehen, dass wir keine Nutzenfunktion mit der Erwartungsnutzeneigenschaft aus den Bedingungen für Lotterien herleiten können, die sich nicht positiv linear in alle anderen daraus ableitbaren Nutzenfunktionen mit Erwartungsnutzeneigenschaft transformieren lässt.

Wir müssen also zeigen, dass jede beliebige Nutzenfunktion mit Erwatungsnutzeneigenschft u', die die auf der vollständigen Menge der Lotterien definierte Präferenzrelation wiedergibt, eine positiv linear transformierte der eben konstruierten Nutzenfunktion u ist, dass also gilt:

$$u'(x) = au(x) + b \qquad \text{mit} \qquad a > 0$$

Der Beweis folgt Resnik [23, S.97/98].

Angenommen, wir verfügen neben der oben konstruierten Nutzenfunktionen u noch über eine weitere Nutzenfunktion mit Erwartungsnutzeneigenschaft u', die die vollständige Menge der Lotterien auf eine andere Nutzenskala abbildet. Aus dem Erwartungsnutzenprinzip, ergibt sich, dass beide Abbildungen *surjektiv* sind (d.h. dass jeder Wert der Nutzenskala innerhalb des Intervalls zwischen dem größten und dem kleinsten Nutzenwert ein Nutzenwert irgendeiner Lotterie ist), denn (Beweisskizze) sei x eine Lotterie, die den höchsten möglichen Nutzenwert hat, und y eine Lotterie, die den kleinsten möglichen Nutzenwert hat, und sei j irgendein Nutzenwert dazwischen, dann hat mit $a := (j - u(y))/(u(x) - u(y))$ die Lotterie $L(a, x, y)$ genau den Nutzenwert j. Da dies für jedes beliebige j gilt, gehören alle reellen Zahlen auf der Skala innerhalb des Bereiches vom kleinsten bis zum größten Nutzenwert zum Wertebereich der Nutzenfunktion.

Wenn jede Zahl auf der Nutzenskalla vom kleinsten bis zum größten Nutzenwert, der Nutzenwert einer Lotterie ist, dann können wir eine Abbildung I definieren, die die Nutzenwerte der einen Skala auf die der anderen abbildet. Dazu definieren wir zunächst $u^{-1}(e)$ als eine Funktion, [20] die jedem Wert e der u-Skala eine (beliebig ausgewählte) Lotterie x zuordnet, für die gilt: $u(x) = e$. Für jede Zahl e auf die u-Skala gilt dann:

$$I(e) = u'(u^{-1}(e))$$

Im folgenden zeigen wir zunächst, dass für die Funktion I eine der Erwartungsnutzeneigenschaft von u und u' analoge Eigenschaft gilt, nämlich:

[20] Bei u^{-1} handelt es sich nicht um eine Umkehrfunktion im strengen Sinne, da die Funktion u nicht umkehrbar ist, weil sie unterschiedlichen Argumenten, nämlich verscheidenen Lotterien zwischen denen Indifferenz herrscht, den gleichen Funktionswert zuordnet.

$I(ak+(1-a)m) = aI(k)+(1-a)I(m)$ Daraus leiten wir dann das Gewünschte ab.

Für jedes beliebige Paar von Werten k und m auf der u-Skala gilt, dass sie erstens die Nutzenwerte irgendwelcher Lotterien sind, d.h. $\exists_{x,y} u(x) = k \wedge u(y) = m$, und dass zweitens für $0 \leq a \leq 1$ der Wert $ak + (1-a)m$ ebenfalls auf der Nutzenskala liegt. Weiterhin ergibt sich aus $u(x) = k$ und $u(y) = m$, dass $I(k) = u'(x)$ und $I(m) = u'(y)$. Schließlich folgt aus der Erwartungsnutzeneigenschaft für den Nutzen der Lotterie $L(a, x, y)$:

$$u(L(a,x,y)) \quad = \quad au(x) + (1-a)u(y) = ak + (1-a)m$$

Auf beiden Seiten der Gleichung steht ein Nutzenwert der u-Skala. Daher können wir nun auf beiden Seiten der Gleichung die Funktion I anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} I(u(L(a,x,y))) &= I(ak + (1-a)m) \qquad \Leftrightarrow \\ u'(L(a,x,y)) &= I(ak + (1-a)m) \end{aligned}$$

Indem wir uns die Erwartungsnutzeneigenschaft von u' zu Nutze machen und außerdem $I(k) = u'(x)$ und $I(m) = u'(y)$ (siehe oben) verwenden, erhalten wir:

$$I(ak+(1-a)m) = u'(L(a,x,y)) = au'(x)+(1-a)u'(y) = aI(k)+(1-a)I(m)$$

Mit diesem Wissen können wir folgende Rechnung aufstellen:

$$\begin{aligned} u'(x) &= I(u(x)) && \text{nach Definition von } I \\ &= I(u(x) \cdot 1 + (1-u(x)) \cdot 0) && \text{etwas Algebra ;)} \\ &= u(x)I(1) + (1-u(x))I(0) && \text{erwartungsnutzenanaloge Eigenschaft von } I \\ &= u(x)(I(1) - I(0)) + I(0) \end{aligned}$$

Wenn wir nun $a := I(1) - I(0)$ und $b := I(0)$ setzen, dann haben wir gezeigt, dass u' eine linear transformierte von u ist:

$$u'(x) = au(x) + b$$

Da $I(1) > I(0)$ sein muss (wg. der Monotonieeigenschaft von u (und damit auch von u^{-1}) und u'), ist $a > 0$, so dass es sich tatsächlich um eine *positive* lineare Transformation handelt. q.e.d.

7.3.4 Die Bedeutung der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie

Was ist damit gezeigt? Wir haben gezeigt, dass sich das Erwartungsnutzenprinzip (Seite 104) und die entsprechende Entscheidungsregel für Entscheidungen unter Risiko (siehe Seite 105) aus plausiblen Voraussetzungen von der Sorte „Bevorzuge eine Lotterie mit höheren Gewinnchancen gegenüber einer mit geringeren Gewinnchancen“ logisch ableiten lässt. Insofern die Voraussetzungen als selbstevident angesehen werden können, wird dies üblicherweise so interpretiert, dass eine Person, die Entscheidungen rational trifft, immer von dem Erwartungsnutzen ausgehen muss. Ein anderes Entscheidungsverhalten müsste dementsprechend als irrational eingestuft werden.

Interessanterweise verhalten sich die meisten Menschen in diesem Sinne aber irrational, indem sie je nach Situation, ihren Nutzen bei unsicheren Ereignissen entweder oberhalb des rechnerischen Erwartungsnutzens ansetzen („Riskofreude“) oder unterhalb („Risikoscheu“). Es ist daher Vorsicht geboten, wenn man die Theorie rationaler Entscheidungen zur Erklärung von empirisch beobachtbarem Entscheidungsverhalten heranziehen will. Es widerspricht aber noch nicht der Forderung z.B. betriebswirtschaftliche Entscheidungen an ihr zu orientieren. Aber auch in dieser Hinsicht gibt es eine Reihe von Einwänden, die gegen die Theorie erhoben worden sind. Oft werden diese Einwände in die Form (vermeintlicher) Paradoxien gekleidet, die sich aus der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie ableiten lassen. Mit diesen Einwänden werden wir uns in der nächsten Woche beschäftigen.

7.4 Aufgaben 6 (27. Mai)

1. Stelle das folgende Entscheidungsproblem aus der Vorlesung (Seite 106) als Entscheidungsbaum dar und löse den Entscheidungsbaum schrittweise auf.

	S_1 $(p = 0.3)$	S_2 $(p = 0.2)$	S_3 $(p = 0.5)$	
A_1	-100.000 €	-50.000	€ 60.000	$EU = -10.000$ €
A_2	0 €	-80.000	€ 0	$EU = -16.000$ €

A_1	Investiere in die rasche Entwicklung eines Kleinstlaptops.
A_2	Investiere nicht in die Entwicklung eines Kleinstlaptops.

S_1	Kleinstlaptops bleiben auf dem Markt erfolglos.
S_2	Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Konkurrenz ist ebenfalls frühzeitig auf dem Markt präsent.
S_3	Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Entwicklung der Konkurrenz verzögert sich.

2. Eine Ölfirma erwägt, an einer bestimmten Stelle in der Nordsee nach Öl zu bohren. Leider ist es keineswegs sicher, ob an der entsprechenden Stelle tatsächlich Ölvorkommen vorhanden sind. Das ist um so bedauerlicher als der Bau einer Ölplattform € 1.500.000 kostet, eine Investition, die verloren wäre, sollte dort tatsächlich kein Öl zu finden sein. Andererseits würde die Ölplattform € 30.000.000 einbringen, wenn Öl vorhanden ist. Anhand der geologischen Daten können die Fachleute der Ölfirma immerhin abschätzen, dass sich in dem fraglichen Gebiet mit 45%-iger Wahrscheinlichkeit Ölvorkommen befinden.

   Um eine genauere Abschätzung zu erhalten, könnte die Firma ein Expertenteam damit beauftragen, eine Probebohrung durchzuführen. Eine Probebohrung schlägt noch einmal mit € 400.000 zu Buche. Leider bieten auch derartige Expertisen keine absolute Sicherheit. Es ist bekannt, dass in 88% der Fälle vorhande Ölvorkommen durch die Expertise erkannt werden. Aber auch wenn kein Öl vorhanden ist, liefert eine Expertise in 3% der Fälle das falsche Ergebnis, es wäre Öl zu finden.

   Aufgabe:

   (a) Bestimmen Sie (mit Hilfe der Bayes'schen Formel) die bedingten Wahrscheinlichkeiten, mit denen Öl vorhanden ist bzw. nicht vorhanden ist, wenn die Expertise positiv bzw. negativ ausfällt.

(b) Stellen Sie den Entscheidungsbaum für das beschriebene Entscheidungsproblem auf. (Beachten Sie dabei an welcher Stelle welche bedingte Wahrscheinlichkeiten eingetragen werden müssen.)

(c) Lösen Sie den Entscheidungsbaum soweit auf, dass man eine Empfehlung geben kann, ob es sich für die Firma lohnt, eine Expertise in Auftrag zu geben.

3. $L'([0.5, 0.25, 0.25], A, B, C)$ sei eine Lotterie mit *drei* Preisen A, B, C, die jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $0.5, 0.25, 0.25$ gezogen werden. Zeige, dass man diese Lotterie aus Lotterien mit ausschließlich *zwei* Preisen zusammensetzen kann. (Resnik [23, S. 91])

4. Zeige: Jede Lotterie mit n Preisen ($n > 2$) lässt sich aus Lotterien mit zwei Preisen zusammensetzen.

5. Erkläre: Wenn eine Nutzenfunktion die Erwartungsnutzeneigenschaft ($u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$) hat, dann bedeutet dies, dass sie dem Nutzen einer Menge von unsicheren Ereignissen $E_1, \dots, E_n$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ den Erwartungsnutzen

$$EU = p_1 u(E_1) + \dots + p_n u(E_n)$$

zuordnet.

6. Zeige, dass bei einer zusammengesetzen Lotterie $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gewinn x gezogen wird: $ab + (1 - a)c$ ist, und die Wahrscheinlichkeit, dass y gezogen wird: $1 - (ab + (1 - a)c)$ beträgt. (Damit wird gezeigt, dass die Reduzierbarkeitsbedingung (Seite 113) im Einklang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung steht.)

7. Sei u eine beliebige Nutzenfunktion, die einer vollständigen Menge von Lotterien, die die Neumann-Morgensternschen Bedingungen (siehe Seite 113) erfüllt, Nutzenwerte zuweist und für die das Erwartungsnutzenprinzip $u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$ gilt. Zeige, dass für jede Zahl k auf der u-Skala eine Lotterie existiert mit $u(x) = k$.

   (Resnik [23, S. 98])

8. Das St. Petersburg-Spiel wird folgendermaßen gespielt: Es wird eine Münze geworfen. Zeigt sie Kopf, dann erhält der Spieler 2 € und das Spiel ist beendet. Andernfalls wird sie ein weiteres Mal geworfen. Zeigt sie diesmal Kopf, so erhält der Spieler 4 €. Wenn nicht wird die Münze ein weiteres Mal geworfen und bei Kopf 8 € ausgezahlt usw.

(a) Wie groß ist der Erwartungswert des Spiels, wenn das Spiel maximal 2 Runden gespielt wird?

(b) Wie groß ist der Erwartungswert, wenn das Spiel maximal n Runden gespielt wird?

(c) Wie groß ist der Erwartungswert des Spiels, wenn es mit unbeschränkter Rundenzahl gespielt wird?

(Resnik [23, S. 88])

8 Entscheidungen unter Risiko II: Vertiefung

In dieser Vorlesung soll die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie diskutiert werden und daran anknüpfend die Entscheidungstheorie zur „kausalen Entscheidungstheorie“ ausgebaut werden, d.h. zu einer Theorie von Entscheidungen, die systematisch auch diejenigen Fälle berücksichtigt, in denen die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Ereignissen auch von der gewählten Handlungsalternative abhängt.

8.1 Zur Diskussion der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie

Bei formalen Beweisführungen wie dem Beweis aus der letzten Vorlesung, dass man zu einer beliebigen Menge von Präferenzen mit Hilfe des Konstruktionsmittels der Lotterien eine kardinale Nutzenfunktion konstruieren und zugleich das Erwartungsnutzenprinzip herleiten kann, tut man gut daran sich Klarheit darüber zu verschaffen, was dabei inhaltlich bewiesen wurde und unter welchen Voraussetzungen es bewiesen wurde. Um diese Frage zu klären werden wir im Folgenden verschiedene Lesarten des Beweises diskutieren.

8.1.1 Unterschiedliche Lesarten der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie

NM als Beweis der Existenz kardinaler Nutzenfunktionen Eine mögliche Lesart wäre die, dass uns die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie zeigt, dass wir immer eine kardinale Nutzenskala verwenden dürfen. In dieser Hinsicht scheint der Beweis ein ebenso verblüffendes wie zwingendes Resultat zu liefern. Verblüffend erscheint das Resultat, weil wir ja keineswegs von vornherein die Existenz von „Präferenzintervallen“ angenommen haben, wie Resnik das zu Anfang des 4. Kapitels seines Buches in wenig plausibler Weise tut (vgl. Resnik [23, S. 82]). Vielmehr wurde für die Konstruktion der kardinalen Nutzenfunktion nach Naumann-Morgenstern zunächst nur die Existenz einer wohlgeformten Präferenzrelation vorausgesetzt, sowie die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die als solche noch nichts darüber aussagen, wie man mit Nutzenwerten umgehen kann. Die Konstruktion der kardinalen Nutzenfunktion erfolgte dann allein durch Indifferenzvergleiche zwischen Gütern, wobei zu der Menge der Güter allerdings auch die besondere Art von gedachten Lotterien gehören muss, von der Neumann und Morgenstern in ihrer Theorie Gebrauch machen.

Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass der Beweis, so wie ihn Resnik führt [23, S. 97], nicht ausschließt, dass wir auf der Menge der Lotterien eine Nutzenfunktion konstruieren können, die nicht die Erwartungsnutzeneigenschaft hat und die sich nicht positiv linear in die auf dieser Menge konstruierte Nutzenfunktionen mit Erwartungsnutzeneigenschaft transformieren lässt.

Aber selbst wenn sich dieses Problem noch irgenwie lösen ließe kommt hinzu, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie so voraussetzungsarm eben doch nicht ist. Wir können eine kardinale Nutzenfunktion konstruieren, aber nur wenn die Präferenzrelation „reich“ genug dafür ist, d.h. wenn ihr Gegenstandsbereich alle diejenigen Lotterien umfasst, die nicht weiter reduziert[21] werden können.

Lehnt man kardinale Nutzenfunktionen mit dem Argument ab, dass die Zuweisung von Nutzenwerten, die mehr ausdrücken als eine bloße Ordnungsrelation, willkürlich und empirisch nicht zu rechtfertigen ist, dann kann auch die Neuman-Morgensternsche Nutzentheorie kein überzeugendes Gegenargument liefern, denn anstelle der willkürlichen Zuweisung von Zahlenwerten werden jetzt nicht minder willkürlich Indifferenzbeziehungen zwischen einer neukonstruierten Klasse gedachter Güter (den Lotterien) und den Grundgütern angenommen. Das Rechtferigungsproblem der kardinaler Größen ist damit nur besser „versteckt“ aber nicht gelöst worden. Nach wie vor kann man also nur in solchen Kontexten von der Existenz kardinaler Nutzenfunktionen ausgehen, in denen sich die Zuweisung von Werten auf einer Intervallskala empirisch rechtfertigen lässt. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn wir es mit Geldwerten zu tun haben *und* wenn wir Grund zu der Annahme haben, dass die Geldwerte in dem ensprechenden Kontext einen konstanten Grenznutzen haben. Dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie den Bereich der Anwendbarkeit des kardinalen Nutzens nicht erweitern kann, sollte uns nicht verwundern. Es wäre im Gegenteil sehr sonderbar, wenn man das empirische Problem der Metrisierung und Messung von Präferenzen durch eine rein theoretische-mathematische Argumentation lösen könnte.

Erwartungsnutzen statt Erwartungswert Im Zusammenhang mit der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie wird oft eine Diskussion darüber geführt, wie sich Geldwerte zu Nutzenwerten verhalten (vgl. [23, S. 85ff.]). Der Vorteil von Geldwerten gegenüber bloß ordinalen Nutzenwerten besteht darin, dass man mit Geldwerten rechnen kann, was mit ordinalen Nutzenwerten nur sehr begrenzt möglich ist. Das bekannte Problem, wenn wir mit Geldwerten anstatt mit Nutzenwerten rechnen, besteht darin, dass der Grenznutzen des Geldes nicht immer konstant ist, so dass der Geldwert den Nutzen

[21] Siehe die Bedingung der Reduzierbarkeit auf Seite 113

nicht immer unmittelbar wiederspiegelt. Zudem sind viele Entscheidungssituationen denkbar, in denen die Ergebnisse nicht sinnvoll als monetäre Kosten oder Gewinne beziffert werden können. Sofern es überhaupt möglich ist eine kardinale Nutzenfunktion anzugeben, erscheint daher der Rückgriff auf Nutzenwerte anstelle von Geldwerten die entschieden sinnvollere Alternative zu sein. Dieser scheinbare Vorteil des kardinalen Nutzens gegenüber dem Geldwert wird jedoch in der Regel dadurch zunichte, dass sich kardinale Nutzenwerte sehr viel schlechter präzise messen lassen als Geldwerte. (Die theoretische Konstruktion des kardinalen Nutzens aus Lotterien, wie sie von Neumann und Morgenstern vorgenommen wird, kann kaum eine zuverlässige Grundlage für empirische Messungen abgeben.) Zudem ist dort, wo keine Geldwerte angegeben werden können auch ein kardinaler Nutzen oft schlicht nicht vorhanden. Auch wenn Geldwerte unter Umständen nur lose an den Nutzen geknüpft sind, den jemand aus einem bestimmten Geldbetrag beziehen kann, ist das Rechnen mit Geldbeträgen, wo dies möglich ist, daher in der Regel die sehr viel zuverlässigere Alternative. Nicht nur aus didaktischen Gründen stützt beispielsweise Kaplan daher (anders als Resnik) den Aufbau der Entscheidungstheorie von vornherein nur auf Lotterien über Geldwerte [17]. Alles in allem kann man festhalten: Welche konzeptionellen Probleme auch immer mit dem Geldwert bzw. dem erwarteten Geldwert verknüpft sind, sie können durch die Einführung von Nutzenwerten statt Geldwerten oft auch nicht befriedigender gelöst werden.

NM als Beweis des Erwartungsnutzens Eine weitere Lesart der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie besagt, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie uns die Gültigkeit des Erwartungsnutzenprinzips auch bezogen auf Einzelfälle beweist. Sie liefert damit eine stärkere Rechtfertigung des Erwartungsnutzens als der Hinweis auf das Gesetz der großen Zahlen und empirisch-statistische Überlegungen (siehe Kapitel 7.2). Auch hier gilt die Einschränkung, dass das Resultat nur unter den vorausgesetzten „Bedingungen“ (siehe Seite 113) bewiesen wurde. Anders als bei der ersten Lesart (Abschnitt 8.1.1), die die Konstruktion kardinaler Nutzenfunktionen hervorhebt, liefert die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie bei dieser Lesart auch mit dieser Einschränkung noch ein gehaltvolles Resultat. Denn die Rechtfertigung des Erwartungsnutzenprinzips (auch für den Einzelfall) erübrigt sich keineswegs von selbst in den Kontexten, in denen wir mit Geldwerten zu tun haben oder kardinalen Nutzen annehmen dürfen. Was die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie zeigt ist, dass die Verletzung des Erwartungsnutzenprinzips nicht nur (auf lange Sicht) zu einer Minderung des Gewinns führt, sondern auch Ausdruck inkonsequenten Verhaltens ist. Der Nachweis dieser Inkonsequenz funktioniert aber nur dort, wo wir genügend „reiche“ Präferenzen annehmen dürfen. Ist das aber nicht der Fall, dann können wir gegenüber Abweichungen vom Erwartungsnutzenprinzip auch nicht mit Hinweis auf Neumann-Morgenstern den Vorwurf der Inkonsequenz erheben.

Der Erwartungsnutzen in der Empirie Man kann die Entscheidungstheorie in zweierlei Weise verstehen: Als *empirische Theorie*, die mehr oder weniger genau beschreibt, wie sich Menschen in Entscheidungssituationen verhalten, und die zugleich erklärt, weshalb sie sich so entscheiden, wie sie es tun, nämlich, weil sie ihren Nutzen maximieren wollen. Oder als *normative Theorie* (im instrumentellen, nicht im moralischen Sinne[22]), die uns lehrt, wie wir richtige Entscheidungen treffen sollen, um einen vorgegebenen Zweck so gut wie möglich zu erreichen.

Die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie konkretisiert die Entscheidungstheorie in dem Sinne, dass sie uns zeigt, dass nutzenmaximierende Entscheidungen unter der Voraussetzung vorgegebener und genügend reicher Präferenzen dem Prinzip des Erwartungsnutzen folgen (sollten). Wenn man diese Theorie als empirisch-deskriptive Theorie auffassen will (oder größeren empirisch-deskriptiv verstandenen ökonomischen Theoriegebilden zur Grundlage geben will), dann stellt sich die Frage, ob sie menschliches Entscheidungsverhalten richtig oder falsch beschreibt.

Zu dieser Frage haben Daniel Kahneman und Amos Tversky eine Reihe von berühmten Experimenten durchgeführt. Eins läuft so ab: Die Probanden sollen ein Entscheidungsproblem mit folgender Hintergrundgeschichte lösen (zitiert nach Fritz [10, S. 43]):

> Sie sind Gesundheitsminister und wissen, dass eine unbekannte Grippewelle in unabsehbarer Zeit Ihr Land heimsuchen wird, die voraussichtlich 600 Menschen das Leben kosten wird. Gegen diese Krankheit sind zwei verschiedene Präventionsprogramme entwickelt worden, über deren Anwendung Sie entscheiden sollen. Ihnen werden folgende Präventionsprogramme vorgeschlagen.

Die Probanden sind bei diesem Experiment in zwei Gruppen unterteilt.

---

[22] Instrumentell-normative Theorien sind Theorien, die uns sagen, wie wir ein *gegebenes Ziel* am besten erreichen können, die aber nichts darüber aussagen, ob das Ziel es wert ist verfolgt zu werden. (In der Terminologie der Moralphilosophie Immanuel Kants könnte man sagen, sie befassen sich ausschließlich mit „hypothetischen Imperativen“.) Moralisch-normative Theorien sind dagegen philosophische Theorien, die etwas darüber aussagen, was wertvolle Ziele und Zwecke im Leben sind.

Die erste Gruppe erhält folgende Information über die Wirksamkeit der Präventionsprogramme (vgl. [10, S. 44]):

- Bei Anwendung des Präventionsprogramms A werden 200 Personen gerettet.
- Bei Anwendung von Programm B gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 1/3, dass 600 Menschen gerettet werden und eine Wahrscheinlichkeit von 2/3, dass niemand gerettet wird.

Der zweiten Gruppe wird dagegen genau dieselbe Information in der folgenden Form mitgeteilt:

- Bei Anwendung des Programms C werden 400 Menschen sterben.
- Bei Anwendung des Programms D gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 1/3, dass niemand sterben muss und eine Wahrscheinlichkeit von 2/3, dass 600 Menschen sterben müssen.

Nicht nur die Informationen sind für beide Gruppen diesselben, sondern auch der Erwartungsnutzen beider Programme ist derselbe, da sowohl bei Anwendung von Programm A als auch bei der Anwendung von Programm B nach dem Erwartungsnutzenprinzip der Tod von 200 Menschen zu erwarten ist. Würden sich die Probanden im Sinne der Erwartungsnutzenhypothese verhalten, dann müssten sie erstens zwischen beiden beiden Programmen indifferent sein, d.h. bei einer hinreichend großen Zahl von Probanden müssten sich ca. 50% für Programm A (bzw. C) und 50% für Programm B (bzw. D) entscheiden. Und zweitens dürfte es insbesondere keine Unterschiede zwischen der ersten und der zweiten Gruppe von Probanden geben.

Kahneman und Tversky stellten jedoch fest, dass in der ersten Gruppe von Probanden 72% das Programm A wählten, während sich in der zweiten Gruppe nur 22% für das entsprechende Programm C entschieden. Das Erwartungsnutzenprinzip ist damit als empirische Hypothese über menschliches Entscheidungsverhalten widerlegt. Andere Experimente bestätigen diesen Befund.

Man könnte einwenden, dass von diesem Experiment die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie als empirische Theorie nicht widerlegt ist, weil in diesem Fall eine der Bedingungen ihrer Anwendbarkeit (genügend reiche Präferenzstruktur) möglicherweise nicht gegeben ist. Dennoch kommt sie durch dieses Experiment in Schwierigkeiten, denn die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie setzt mit der Reduzierbarkeitsbedingung (siehe Seite 113) implizizt voraus, dass Menschen indifferent gegenüber unterschiedlichen Repräsentationen desselben Entscheidungsproblems sind. Genau das ist aber, wie Kahnman und Tversky eindrucksvoll zeigen konnten, nicht der Fall. Vielmehr hängt das menschliche Entscheidungsverhalten – wie es übrigens auch die Alltagserfahrung nahelegt – sehr wesentlich davon ab, wie ein Entscheidungsproblem dargestellt wird („Framing-Effekt").

Es ist denkbar, dass das Experiment anders ausgefallen wäre, wenn man auf Probanden zurückgegriffen hätte, die zuvor in der Entscheidungstheorie instruiert worden sind. Aber dann hieße das immer noch, dass die Entscheidungstheorie empirisch-deskriptiv nur auf solche Entscheidungssituationen anwendbar wäre, in denen „professionelle" Entscheider die Entscheidungen treffen, nicht aber generell auf alle Entscheidungssituationen.

NM als Rationalitätskriterium Wenn man die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie weniger als empirisch-deskriptive denn als normative Theorie liest, dann besagt sie, dass man, will man rationale Entscheidungen treffen, sich bei Entscheidungen unter Risiko an das Erwartungsnutzenprinzip halten sollte. Rationalität wird dabei wie immer in diesem Zusammenhang im Sinne der spärlichen Definition David Humes als „die Fähigkeit zu gegebenen Zwecken die geeigneten Mittel zu finden" verstanden. Dieser Rationalitätsbegriff ist nicht zu verwechseln mit dem in der kontinentalen Tradition üblichen, vor allem durch Kant geprägten umfassenden Vernunftbegriff, der auch eine Fähigkeit der Vernunft zur Erkenntnis des moralisch Richtigen unterstellt.

Aber auch im Sinne der rein instrumentell verstandenen Rationalität ist die Frage zu stellen, ob rationale Entscheidungen stets dem Prinzip der Erwartungsnutzens gehorchen müssen. In dieser Hinsicht ist es wichtig, sich darüber im Klaren zu sein, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie lediglich zeigt, dass *wenn* genügend reichhaltige und wohlgeformte Präferenzen vorhanden sind, rationale Entscheidungen nach Maßgabe des Erwartungsnutzens getroffen werden müssen. Was sie aber *nicht* beweist und auch nicht beweisen kann ist, dass man stets über eine entsprechend reiche Präferenzrelation verfügen sollte bzw. dass es, wenn man nicht darüber verfügt, rational wäre, sich gefälligst eine zuzulegen. Wenn die Konstruktion kardinaler Präferenzen nach Neumann-Morgenstern daran scheitert, dass die Präferenzen nicht reichhaltig genug sind (indem sie nicht auch alle denkbaren Lotterien einbeziehen), dann kann man nicht mit Berufung auf den Neumann-Morgensternschen Beweis den Vorwurf der Irrationalität erheben. Dieser Beweis zeigt nur, dass unter bestimmten und bestenfalls teilweise selbstverständlichen Voraussetzungen ein bestimmtes Verhalten rational ist. Er zeigt nicht, dass die Erfüllung der Voraussetzungen des Beweis selbst eine Forderung der Rationalität ist.

Nun könnte man aber fragen, ob es nicht andere Gründe dafür gibt, die Voraussetzungen für den Beweis, insbesondere die Möglichkeit der Ausdehnung der Präferenzordnung auf eine vollständige Menge von Lotterien (siehe Seite 112), als eine Forderung der Rationalität zu akzeptieren. Man könnte sich z.B. darauf berufen, dass es immer möglich sein muss, bei zwei Gütern zu entscheiden, welches man dem anderen vorzieht, oder ob man beide Güter gleich hoch schätzt. Kann man sich zwischen zwei Gütern nicht entscheiden, so bedeutet dies nichts anderes, als das man zwischen beiden Gütern indifferent ist. Also enthält die Annahme der Ausdehnbarkeit einer gegebenen Präferenzordnung auf die vollständige Menge der Lotterien über alle in der Präferenzordnung vorkommenden Güter keine ungewöhnlichen oder unzumutbaren Voraussetzungen.

Ein (noch relativ leicht ausräumbares) Problem kann jedoch dadurch entstehen, dass wir uns unter Umständen nur deshalb nicht zwischen zwei Gütern entscheiden können, weil wir nicht verstehen, was die Güter beinhalten. Wenn man diese Art von Unsicherheit oder Unentschlossenheit im Sinne des eben geführten Arguments als Indifferenz interpretiert, dann kann das zur Folge haben, dass wir Indifferenz zwischen zwei Gütern annehmen, die eindeutig unterschiedlichen Wert haben. Man könnte sich folgendes Beispiel vorstellen: Jemand wird vor die Wahl gestellt entweder einen Lottoschein auszufüllen, bei dem er eine Chance von ca. 1:14.000.000 hat, Rechs richtige zu bekommen, oder sich mit demselben Einsatz an einer Lotto-Tippgemeinschaft zu beteiligen, deren Gewinnchancen sich nach einem hochkomplizierten und kaum durchschaubaren Schema richten, das von einer kundigen Mathematikerin erfunden wurde, der die Tippgemeinschaft gehört. Angenommen unser Lotto-Spieler hat keine klare Vorstellung davon, wie gut seine Gewinnchancen bei der Beteiligung an der Tippgemeinschaft sind. Dann müssten wir nach der zuvor geführten Argumentation annehmen, dass der Spieler indifferent zwischen einem selbstausgefüllten Schein und der Tippgemeinschaft ist, auch wenn die Gewinnchancen bei der Tippgemeinschaft objektiv niedriger sind (da auch die Betreiber einer Tippgemeinschaft ja von irgendetwas leben müssen).

Das Beispiel führt auf schöne Weise vor Augen, dass Unsicherheit bzw. Unentschlossenheit eben doch nicht dasselbe ist, wie Indifferenz. Im Zusammenhang mit der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie stellt diese Art epistemischer Unsicherheit jedoch kein sehr gravierendes Problem dar, da man allzu komplizierte Lotterien in der Regel immer soweit umformen und vereinfachen kann, bis man die Chance für jeden in einer Verschachtelten Lotterie vorkommenden Gewinn mit einer ganz bestimmten Prozentzahl angeben kann, was verständlich genug sein dürfte.

Aber es gibt andere Beispiele, wo die Sache komplizierter wird. Nehmen wir an, jemand bekomme die Gelegenheit an einem Fussballtippspiel zur EM 2008 zu wetten, ob am 16. Juni Deutschland oder Österreich gewinnt. Gewinnt er die Wette, bekommt er € 100 Euro, sonst nichts. Nun nehmen wir weiterhin an, der wettende Fußballfan hat gute Gründe davon auszugehen, dass es wahrscheinlicher ist, dass Deutschland gewinnt, als dass Österreich gewinnt. Er wird also in jedem Fall auf Deutschland wetten. Wenn man die Wette als ein Gut betrachtet, dann stellt sich die Frage: Welche Neumann-Morgensternschen Lotterie der Form L(a, 100 €, 0 €) ist indifferent zu dieser Wette? Das Problem besteht darin, dass jede Lotterie mit $a > 0.5$ in Frage käme. Aber sobald wir uns für irgend eine bestimmte Lottie entscheiden, also z.B. $a = 0.8$ dann stellen wir implizit auch die Behauptung auf, dass die Fussballwette mehr wert ist als die Lotterie mit $a = 0.75$, eine Bahuptung für die jedoch keine hinreichenden Gründe vorhanden sind, da unser Fussballfan nur Gründe für die vergleichsweise vage Annahme hat, dass Deutschland besser als Österreich ist, aber nicht dafür, dass Deutschlands Gewinnchancen auch mehr als 75% betragen. Man könnte versuchen, dass Problem dadurch zu lösen, dass man a marginal größer als 0.5 wählt, also $a = 0.5 + \epsilon$. Aber dann haben wir implizit die Behauptung aufgestellt, dass die Fussballwette weniger wert ist als die Lotterie mit $a = 0.55$, obwohl wir dafür ebensowenig hinreichende Gründe haben. Mark Kaplan, von dem ich dieses Argument adaptiert habe, bezeichnet die dogmatische Forderung, in jedem Fall irgendeinen bestimmten Wahrscheinlichkeitswert zuzuweisen, deshalb auch recht treffend als „*the sin of false precision*“ [17, S. 23].

Akzeptiert man diese Einwände, dann bedeutet das, dass die Möglichkeit die Entscheidungstheorie normativ, d.h. als Anleitung zum richtigen Entscheiden bei gegebener Zielsetzung, einzusetzen, wesentlich davon abhängt, ob bestimmte empirische Voraussetzungen gegeben sind. Zu diesen Voraussetzungen gehört, dass wir uns einigermaßen über den Wert der erzielbaren Gewinne (resp. „Ereignisse“ oder „Güter“) im Klaren sind, und dass die vorkommenden Unsicherheiten von solcher Art sind, dass wir einigermaßen präzise Wahrscheinlichkeitswerte dafür angeben können. Dementsprechend gibt die formale Entscheidungstheorie selbst dann nicht das Modell für Rationalität oder rationales Handeln schlechthin an, wenn wir unter Rationalität allein die „instrumentelle Rationalität“ verstehen. Man kann lediglich sagen, dass die formale Entscheidungstheorie den Begriff „instrumenteller Rationalität“ in den Fällen konkretisiert, in denen die Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit gegeben sind.

Mögliche Auswege? Soeben wurde noch einmal verdeutlicht, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie ihre Resultate (Existenz einer kardinalen Nutzenfunktion, Erwartungsnutzenprinzips) nicht bloß aus selbstverständlichen Voraussetzungen ableitet von der Art, dass man Lotterien mit höheren Gewinnen oder besseren Gewinnchancen bevorzugen soll, sondern dass sie auch von recht anspruchsvollen empirischen Voraussetzungen abhängt. Diese Feststellung ist insofern ernüchternd, als damit der Anwendungsbereich der enstprechenden Entscheidungstheorie doch empfindlich eingeschränkt wird, was umso bedauerlicher ist als die Techniken der formalen Entscheidungstheorie dort, wo man sie anwenden kann, sehr leistungsfähig sind.

Will man den Anwendungsbereich der Entscheidungstheorie ausweiten, so kann man versuchen, die Entscheidungstheorie auf weniger anspruchsvolle Voraussetzungen zu gründen. Wenn es gelingt ähnlich starke Resultate aus vergleichsweise schwächeren Voraussetzungen abzuleiten, dann wäre das in jeder Hinsicht ein Gewinn für die Entscheidungstheorie. In der Tat ist ein großer Teil der wissenschaftlichen Diskussion der Konstruktion von Erweiterungen und alternativen Entscheidungstheorien gewidmet, die geeignet sind, ihren Anwendungsbereich auszuweiten. Hier soll nur an einem Einzelbeispiel angedeutet werden, wie das funktionieren kann. Das Beispiel betrifft nicht die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie im speziellen, sondern den Präferenzbegriff als Grundlage der Entscheidungstheorie.

Wir erinnern uns, dass eine der Bedingungen für wohlgeformte Präferenzen (siehe Seite 26) darin bestand, dass die Präferenzen *zusammenhängend* sein müssen, d.h. für jedes Paar x, y aus der Menge der möglichen Resultate einer Entscheidungssituation gilt entweder $x \succ y$ oder $y \succ x$ oder $x \sim y$. Damit ist ausgeschlossen, dass es jenseits der Indifferenz ($\sim$) so etwas wie Unentschlossenheit oder Unsicherheit bei Präferenzen gibt, was im Umkehrschluss wiederum heisst, die auf diesen Präferenzbegriff gegründete Entscheidungstheorie ist überhaupt nur dort anwendbar, wo diese axiomatische Voraussetzung empirisch geben ist, d.h. wo keine Unentschlossenheit in dem zuvor anhand einiger Beispiele diskutierten Sinn vorkommt. Kaplan unternimmt nun einen Versuch eine Präferenzrelation zu definieren, die die Möglichkeit dieser Art von Unentschlossenheit mit einbezieht (vgl. [17]). Wie muss er dabei vorgehen, und was muss er dafür leisten? Damit dieses Vorhaben gelingt, muss zweierlei geleistet werden: Zunächst muss ein Axiomensystem aufgestellt werden, in dem in irgendeiner Form auch so etwas wie „Untentschlossenheit“ enthalten ist. Dann muss gezeigt werden, dass man auch aus diesem Axiomensystem möglichst gehaltvolle Gesetze einer Entscheidungstheorie ableiten kann. Wir werden auf die Einzelheiten von Kaplans Konstruktion nicht eingehen, sondern nur zeigen, wie er das *Zusam-*

manhangsaxiom, das wohlgeformte Präferenzen erfüllen müssen, so abwandelt, dass es auch einen gewissen Grad von Unentschlossenheit zulässt. Kaplan baut seine Entscheidungstheorie etwas anders auf als Resnik, indem er – teils aus didaktischen Gründen und der Anschaulichkeit und Einfachheit halber – von vornherein von der Zuweisung von Geldwerten zu bestimmten Ergebnissen (die er „well mannered states of affaires“ nennt) ausgeht, aber dieses Detail ist in unserem Zusammenhang nicht wesentlich. Er definiert den „moderaten Zusammenhang“ von Präferenzen nun folgendermaßen:

> *Moderater Zusammenhang* (vgl. [17, S. 13]): Die Präferenzen sind charakterisiert durch eine nicht leere Menge von Zuweisungen von Geldwerten zu *allen* Ergebnissen, wobei gilt:
>
> 1. Es herrscht Indifferenz zwischen A und B ($A \sim B$), wenn jede der Zuweisungen A denselben Wert zuweist wie B.
> 2. A wird B vorgezogen ($A \succ B$), wenn keine der Zuweisungen B einen größeren Wert zuweist als A, und wenn wenigstens eine der Zuweisungen A einen größeren Wert zuweist als B.

Zu Erläuterung: Die Menge der Zuweisungen ist eine Menge von Abbildungen von Geldwerten zu Gütern. Jede dieser Abbildungen entspricht dabei einer Nutzenfunktion im Sinne der orthodoxen Entscheidungstheorie, wie wir sie in dieser Vorlesung kennen gelernt haben. Diese Konstruktion kann zunächst verblüffend erscheinen. Denn wenn wir „Unentschlossenheit“ modellieren wolllen, dann – so sollte man meinen – müssten wir doch eigentlich versuchen mit spärlicheren Präferenzrelationen anzusetzen, die nicht jedem Paar von Gütern bzw. Ereignissen A, B zwingend eine der Relationen $\sim, \succ, \prec$ zuweisen. Aber darin besteht gerade der Trick: Anstatt (auf welche Weise auch immer) eine spärlichere Präferenzrelation zu konstruieren, arbeit Kaplan mit einer Menge von einer Nutzenfunktion vergleichbaren Abbildungen („Zuweisungen“), die teilweise miteinander übereinstimmen, teilweise aber auch voneinander abweichen können. Diese Abweichungen zwischen den verschiedenen Quasi-Nutzenfunktionen erlauben es, so etwas wie Unentschlossenheit zu erfassen. Wollte man etwa die Präferenzen des Fussballfans erfassen, der überzeugt ist, dass Deutschland größere Gewinnchancen hat als Österreich, aber unentschlossen, wenn es darum geht, um wieviel die Gewinnchancen Deutschlands größer sind als die Österreichs, dann würde seine Menge der Zuweisungen alle solchen Zuweisungen enthalten, die der Fussballwette einen mindestens gleichgroßen Wert zuweisen, wie der Lotterie L(0.5, 100 €, 0 €). Damit gilt nach dem Axiom des „moderaten Zusammenhangs“, dass die Fußballwette der Lotterie L(0.5, 100 €, 0€) vorgezogen wird, was zum Ausdruck bringt, dass unser Fussballfan einen Gewinn seiner Wette für wahrscheinlicher hält als einen Verlust. Zugleich gilt aber auch, dass die Fussballwette zu keiner bestimmten Lotterie indifferent ist, was eben die Unsicherheit des Fans bezüglich der Frage zum Ausdruck bringt, um wieviel die Gewinnchancen größer als die Verlustchancen sind.

Wie Kaplan aus seinem Axiomensystem eine gehlatvolle Entscheidungstheorie ableitet, kann hier nicht mehr ausgeführt werden. Soviel sollte jedoch deutlich geworden sein, dass man dem Problem der eingeschränkten Anwendbarkeit bis zu einem gewissen Grade durch andere, möglicherweise liberalere Axiomatisierungen der Entscheidungstheorie begegnen kann. Allerdings bleibt auch bei alternativen Axiomatisierungen die Anwendbarkeit der Entscheidungstheorie immer auf diejenigen empirischen Entscheidungssituationen begrenzt, in denen wir die Gültigkeit der Axiome voraussetzen können. Es gibt keine Entscheidungstheorie, die schlechterdings alle Entscheidungssituationen erfassen könnte, so wie z.B. in den Naturwissenschaften die Kinemathik *alle* Bewegungen von Körpern im Raum erfassen kann. Es ist einer der Unterschiede von Natur- und Gesellschaftswissenschaften, dass die formalen Theorien in den letzteren immer nur einer mehr oder weniger begrenzte Reichweite haben, was vermutlich in der Natur des Gegenstandes liegt.

8.1.2 Paradoxien der Nutzentheorie

Wie wir eben gesehen haben, gibt es eine Reihe ernst zu nehmender Einwände gegen Entscheidungs- und Nutzentheorie, die jedoch nicht dazu führen, dass diese Theorie gänzlich verworfen werden müsste, die es aber sehr wohl erlauben ihren – manchmal uneingestandenen – Voraussetzungsreichtum herauszuarbeiten und ihren Anwendungsbereich auf diejenigen Entscheidungsprobleme einzuschränken, zu deren Behandlung sie sich tatsächlich eignet. In der Literatur wird aber im Zusammenhang mit der Nutzen- und Entscheidungstheorie viel häufiger eine Reihe sogenannter Paradoxien diskutiert. Eine Paradoxie im strengen Sinne ist eine Aussage, aus deren Wahrheit ihre Falschheit folgt, und aus deren Falschheit wiederum ihre Wahrheit folgt (wie z.B. das berühmte Lügnerparadox, das entsteht, wenn ein Athener sagt: „Alle Athener lügen“). (Ein Paradox ist damit zu unterscheiden von einem einfachen logischen Widerspruch, der nur zur Folge hat, dass eine Theorie oder eine Aussage falsch ist.) Ein Entscheidungsparadox ist eine Entscheidungssituation, in der man mit gleichem Recht widersprüchliche Entscheidungen fordern muss. Eine Entscheidungstheorie, die solche Paradoxien zulässt, hat, wie sich versteht, ein ernstes Problem. Alle im Folgenden diskutieren vermeintlichen Paradoxien lassen sich jedoch auflösen. Sie beruhen auf mehr oder weniger gewollten Missverständnissen der Entscheidungs- und Nutzentheorie. Ihre Diskussion kann aber ebenso wie die Diskussion von Beispielen dabei helfen, die Entscheidungstheorie besser zu verstehen.

Allai's Paradox Bei Allai's Paradox werden ähnlich wie in dem zuvor vorgestellten Experiment von Kahneman und Tversky zwei scheinbar unterschiedliche Entscheidungssituationen mit einander verglichen, in denen eine Person zwischen Alternativen mit unterschiedlichen Gewinnchancen wählen kann (vgl. [20]):

Situation A:

1. Alternative: 12 Mio € mit 10% Chance und 0 € mit 90%
2. Alternative: 1 Mio € mit 11% Chance und 0 € mit 89%

Situation B:

1. Alternative: 1 Mio € sicher
2. Alternative: 12 Mio € mit 10%, 1 Mio € mit 89% und 0 € mit 1%

Viele Menschen werden sowohl in Situation A als auch in Situation B die erste Alternative bevorzugen. Dabei erhöht in Wirklichkeit die Wahl der zweiten Alternative in Situation B den Nutzen in demselben Maße gegenüber der ersten Alternative wie die Wahl der ersten Alternative in Situation A gegenüber der zweiten. Durch die Berechnung des Erwartungswertes kann man sich leicht davon überzeugen, aber diese Feststellung gilt sogar unabhängig davon wie man die Geldwerte auf Nutzenwerte abbildet, sofern man – wie es die Nutzentheorie voraussetzt – denselben Geldwerten dieselben Nutzenwerten zuordnet.

In der Tat handelt es sich hierbei aber nicht wirklich um ein Paradox, sondern nur um das empirische Phänomen, welches schon in dem eben beschrieben Experiment von Kahneman und Tversky zu Tage getreten ist, dass Menschen sich oft nicht rational verhalten. Eine Entscheidungsregel der Art „Lieber den Spatz in der Hand als die Taube auf dem Dach", wie sie im Alltagsleben gebräuchlich ist, widerspricht schlicht den Regeln der rationalen Entscheidungstheorie. Die Theorie gerät dadurch insofern nicht in Probleme als sie eindeutig fordern, in Situation A die erste und in Situation B die zweite Alternative zu wählen. Der Widerspruch zu alltagspraktischen Entscheidungsverhalten, das ja oft auch seine guten Gründe hat, legt freilich die Frage nahe, warum sich im Alltag Entscheidungsregeln herausgebildet haben, die zu Entscheidungen führen, die der Theorie zufolge keineswegs optimal sind. Möglicherweise existieren dafür besondere Gründe, die von der

Theorie noch nicht erfasst worden sind. Denkbar ist aber auch, dass die Alltagspraxis einfach suboptimal ist oder dass in den meisten Alltagssituationen, die – wie wir gesehen haben – recht anspruchsvollen Voraussetzungen für die Anwendung der Entscheidungstheorie nicht gegeben sind, in welchem Fall gar keine Inkompatibilität zwischen Alltagspraxis und Theorie vorliegt.

Ellsberg Paradox Ein anderes Paradox ist das Ellsberg Paradox. Es entsteht so: Jemand hat die Wahl zwischen zwei Arten von Glückspielen. Bei dem ersten muss sie eine Kugel aus einer Urne ziehen, die zur Hälfte rote und zur Hälfte schwarze Kugeln enthält, wobei sie gewinnt, wenn sie eine rote Kugel zieht. Bei dem zweiten Spiel muss sie wieder aus einer Urne mit roten und schwarzen Kugeln ziehen und gewinnt wieder, wenn sie eine rote Kugel zieht. Nur weiss sie bei dem zweiten Spiel nicht wieviele rote und schwarze Kugeln die Urne enthält.

Die meisten Menschen würden in einer solchen Situation angeblich das erste Spiel mit bekannter Kugel-Verteilung vorziehen (vgl. [20, S. 24]). Ein „Paradox“ entsteht dann, wenn man das Indifferenzprinzip (siehe Kapitel 4.2.2) voraussetzt, das besagt, dass man bei unbekannten Wahrscheinlichkeiten eine Gleichverteilung voraussetzen soll. Akzeptiert man das Indifferenzprinzip, dann handelt es sich aber wiederum nicht um ein Paradox, sondern – sofern die Behauptung über das, was die meisten Menschen tun würden stimmt – lediglich um einen Widerspruch zwischen Theorie um Empirie, der zeigt, dass das Indifferenzprinzip empirisches beobachtbares Entscheidungsverhalten bei Entscheidungen unter Unwissenheit nicht richtig beschreibt. Lehnt man das Indifferenzprinzip überhaupt ab, so entsteht von vornherein kein Paradox.

St. Petersburg Paradox Das St. Petersburg Paradox setzt unbeschränkte Nutzenskalen voraus. Bei den Beweisen der in der letzten Vorlesung vorgestellten Fassung der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie wurde von der Voraussetzung begrenzter Nutzenskalen Gebrauch gemacht (siehe Seite 113). Man kann die Nutzentheorie jedoch auch mit unbeschränkten Nutzenskalen konstruieren, nur fallen dann die mathematischen Beweise etwas komplizierter aus.

Das St. Petersburg Paradox beruht auf dem unbeschränkten St. Petersburg Spiel, welches nachfolgenden Regeln gespielt wird: Es wird eine Münze geworfen. Zeigt sie Kopf, dann erhält der Spieler 2 € und das Spiel ist beendet. Andernfalls wird sie ein weiteres Mal geworfen. Zeigt sie diesmal Kopf, so erhält der Spieler 4 €. Wenn nicht wird die Münze ein weiteres Mal geworfen und bei Kopf 8 € ausgezahlt usw. Das Paradox besteht darin, das – rein theoretisch – ein Akteur bereit sein müsste, jeden Preis dafür zu zahlen, um an dem Spiel teilzunehmen, denn der Erwartungswert des St. Petersburgspiels berechnet sich nach:

$$EW = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^n + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

Nun ist aber nicht wirklich einzusehen, warum das ein Problem sein sollte. In der Praxis gibt es keine unendlichen Spiele, so dass das Problem in der Praxis auch nicht auftreten kann. Was die Theorie betrifft, so bleibt unverständlich, was man dagegen einwenden sollte, dass irgendeine Option unendlich viel wert ist, wenn man in der Theorie schon unbegrenzte und damit potentiell unendlich große Nutzenwerte zulässt.

Das Hellseherparadox Das Hellseherparadox taucht des öfteren in philosophischen Diskussionen auf, wenn solche Fragen erörtert werden, wie die des Unterschieds zwischen Korrelation und Kausalität oder der Möglichkeit zeitlich rückwärts gerichteter Kausalität. Für die Entscheidungstheorie hat das Hellseherparadox vergleichsweise geringere Bedeutung, zumal es sich ebenso leicht wie die anderen lösen lässt. Die Geschichte zu diesem Paradox ist zunächst die Folgende:

> Ein Hellseher hat in einem Raum zwei Schachteln aufgestellt, eine rote und eine blaue. In die rote Schachtel legt er 1.000 €. Die blaue Schachtel ist zunächst leer. Nun wird einer der Zuschauer gebeten den Raum zu verlassen. Wenn er wiederkehrt, wird er vor die Wahl gestellt entweder nur die blaue oder beide Schachteln zu nehmen. Er bekommt dann den Inhalt derjenigen Schachteln, die er genommen hat. Damit das ganze interessanter wird, erklärt ihm der Hellseher, dass er inzwischen vorhersagen wird, welche Entscheidung der Zuschauer treffen wird, und dass er, wenn er vorhersagt, dass der Zuschauer nur die blaue Schachtel nimmt, 1.000.000 € in die blaue Schachtel legen wird. Dem Zuschauer ist bekannt, dass der Vorhersager bisher in 90% der Fälle richtig vorhersagt hat. Welche Schachtel sollte der Zuschauer wählen? ([23, S. 109])

Das Paradox entsteht nun dadurch, dass man mit Hilfe der Entscheidungstheorie scheinbar genauso gut die eine wie die andere Lösung rechtfertigen kann.

1. Rechtfertigung der Wahl beider Schachteln: Da Hellseher seine Vorhersage abgibt, bevor der Zuschauer eine Wahl trifft, sind die möglichen

Zustände (blaue Schachtel ist leer oder blaue Schachtel ist nicht leer) unabhängig von der Wahl des Zuschauers. Als Tabelle dargestellt sieht das Entscheidungsproblem wie unten abgebildet aus, wobei die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse unbekannt sind, aber wegen der Unabhängigkeit von den Handlungen dieselben sind:

	blaue Schachtel leer	nicht leer
Nimm blaue Schachtel	0 €	1M €
Nimm beide Schachteln	1.000 €	1M + 1.000 €

Wie man sieht, ist die Handlung beide Schachteln zu nehmen streng dominant, d.h. sie liefert, welches Ereignis auch immer eintritt, stets das bessere Ergebnis. Also sollte der Zuschauer in jedem Fall beide Schachteln nehmen.

2. Rechtfertigung der Wahl der blauen Schachtel: Der Hellseher verfügt offenbar tatsächlich über die Gabe des Hellsehens, sonst würde er nicht zu 90% richtig vorhersagen. Also variiert Wahrscheinlichkeit, mit der die blaue Schachtel leer ist oder nicht, mit der Wahl, die der Zuschauer trifft. Die Entscheidungstabelle müsste korrekterweise so dargestellt werden:

	blaue Schachtel leer	nicht leer
Nimm blaue Schachtel	0 € (p=0.1)	1M € (p=0.9)
Nimm beide Schachteln	1.000 € (p=0.9)	1M + 1.000 € (p=0.1)

Da es sich um eine Entscheidung unter Risiko handelt, bei der das Erwartungsnutzenprinzip gilt, ist unser Zuschauer gut beraten, wenn er nur die blaue Schachtel nimmt.

Handelt es sich hierbei tatsächlich um ein Paradox und leidet die Entscheidungstheorie an Antinomien, d.h. an inneren Widersprüchen? Wie bei sovielen philosophischen Antinomien[23] entsteht der Schein eines Widerspruchs nur dadurch, dass bei beiden Argumentationen jeweils von unterschiedlichen Voraussetzungen ausgegangen wird. In Wirklichkeit handelt es sich nämlich gar nicht um einen Widerspruch, sondern darum, dass in dem einen wie den anderen Fall aus unterschiedlichen Voraussetzungen Unterschiedliches abgeleitet wird. Bei der ersten Rechtfertigung wird vorausgesetzt, dass Hellseherei nicht möglich ist. Bei der zweiten dagegen, dass sie möglich ist. Die beiden Argumentationen kommen also deshalb zu unterschiedlichen Ergebnissen, weil sie von unterschiedlichen Problemspezifikationen ausgehen. Dass die Entscheidungstheorie bei unterschiedlichen und einander widersprechenden Problemspezifikationen unterschiedliche Lösungen liefert, ist nur natürlich

[23]Die berühmten Antinomien aus Kants „Kritik der reinen Vernunft“ sind dafür das paradigmatische Beispiel, leider auch hinsichtlich der Tatsache wie ein mangelndes Verständnis der logischen Situation zu philosophischen Irrtümern führen kann.

und verweist nicht auf einen Widerspruch innerhalb der Entscheidungstheorie.

8.2 Kausale Entscheidungstheorie

Bereits in der letzten Vorlesung haben wir ein Beispiel behandelt, bei dem die Wahrscheinlichkeiten, mit dem Ereignisse eintreten, von den gewählten Handlungen abhängen (siehe 107). Das Hellseherparadox lieferte, wenn wir der Argumentation folgen, die echte hellseherische Fähigkeiten voraussetzt, ein weiteres Beispiel dafür. Grundsätzlich werden solche Entscheidungsprobleme so gelöst, dass wir die (handlungsabhängige) Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Ergebnisses in der entsprechenden Tabellenzelle vermerken und beim Ausrechnen des Erwartungsnutzens für jede Handlung die in der entsprechenden Zeile vermerkten Wahrscheinlichkeiten berücksichtigen.

Wir können nun noch einen Schritt weitergehen und uns fragen, wie vorzugehen ist, wenn die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens von Ereignissen nicht nur von den Handlungen sondern wiederum von anderen Erieg-nissen und Zuständen abhängig ist. Dazu ein Beispiel (frei nach Resnik [23, S. 114]): Eine Ärztin steht vor der Frage, ob sie die Infektion eines Patienten mit einem Desinfektionsmittel oder mit einem Antibiotikum behandeln soll. Das Antibiotikum schlägt bei 80% der Patienten gut an, in welchem Fall die Heilungschance bei 70% liegt. Bei den restlichen Patienten liegt die Heilungschance mit demselben mittel jedoch nur bei 40%. Das Desinfektionsmittel hat dagegen bei allen Patienten eine Heilungschance von 50% Da beide Mittel, wie wir einmal annehmen wollen miteinander unverträglich sind, besteht nur die Wahl entweder das Antibiotikum zu versuchen oder das Desinfektionsmittel.

Um das Problem als Entscheidungstabelle darzustellen, kann man die Ereignisse in zwei Gruppen unterteilen: Unabhängige und Abhängige Ereignisse. In diesem Fall ist das unabhängige Ereignis, dasjenige, ob das Antibiotikum bei dem Patienten anschlägt oder nicht. Das kausal davon abhängige Ereignis ist die Heilung (oder Nicht-Heilung) des Patienten. Dabei müssen für jedes unabhängige Ereignis alle abhängigen Ereignisse gesondert eingetragen werden. Wichtig ist, dass man innerhalb der Tabelle die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten einträgt. Daraus ergibt sich folgende Entscheidungstabelle:

	A. schlägt an (80%)		schlägt nicht an (20%)	
	Heilung (70%)	¬Heilung (30%)	Heilung (40%)	¬Heilung (60%)
Antibiotikum	gesund (56%)	krank (24%)	gesund (8%)	krank (12%)
Des.-Mittel	gesund (40%)	krank (40%)	gesund (10%)	krank (10%)

Wie man sieht, wäre bei diesem Beispiel die Heilungschance mit dem Antibiotikum größer als mit dem Desinfektionsmittel. Sind bei einem Entscheidungsproblem wie diesem die Kausalzusammenhänge zwischen Ereignissen und Handlungen zu berücksichtigen, bietet sich oft die anschaulichere Baumdarstellung an.

8.3 Aufgaben 7 (10. Juni)

1. Betrachte folgende beiden Entscheidungssituationen:

   Situation A:

   (a) Alternative: 12 Mio € mit 10% Chance und 0 € mit 90%
   (b) Alternative: 1 Mio € mit 11% Chance und 0 € mit 89%

   Situation B:

   (a) Alternative: 1 Mio € sicher
   (b) Alternative: 12 Mio € mit 10%, 1 Mio € mit 89% und 0 € mit 1%

   (a) *Berechne für beide Situationen den montären Erwartungswert jeder Alternative*

   (b) *Zeige: Auch wenn man den Nutzen nicht mit dem Geldwert gleichsetzt, sondern beispielsweise einen abnehmenden Grenznutzen des Geldes annimmt, ist die Nutzendifferenz von Alternative 1 und 2 in Situation A dieselbe wie die von Alternative 2 und 1 in Situation B.*

2. Ein Spieler wird vor die Wahl gestellt, entweder auf einen Münzwurf mit einer gleichmäßigen Münze zu wetten (A), oder auf einen Münzwurf zu wetten, bei dem die Münze manipuliert ist, so dass sie häufiger auf einer der beiden Seiten landet, ohne dass aber bekannt ist, auf welcher (B). ([23, S. 109])

   Zeige: Falls der Spieler lieber an Spiel A teilnimmt als an Spiel B, dann impliziert das, dass er bei Spiel B nicht indifferent zwischen Kopf oder Zahl sein kann, wie es das Indifferenzprinzip fordern würde.

   Ansatz: 1. Zeige: Wenn der Spieler in Spiel A auf Kopf setzt und Spiel A Spiel B vorzieht, dann nimmt er implizizt an, dass die Wahrscheinlichkeit von „Kopf“ in Spiel B kleiner als 1/2 ist.

   2. Zeige: Wenn der Spieler in Spiel B indifferent zwischen Kopf und Zahl ist, dann impliziert dies die Annahme, dass er beiden Ergebnissen eine subjektive Wahrscheinlichkeit von 50% zuweist.

   Hilfe: Nimm an, dass der Spieler 1 € gewinnen kann, wenn er richtig wettet und 0 € wenn er falsch wettet. Bezeichne mit x dei Entscheidung bei Spiel A auf Kopf zu setzen, mit y die Entscheidung, bei Spiel B auf Kopf zu setzen und mit z die Entscheidung bei Spiel B auf Zahl zu setzen. Wie sieht der Erwartungsnutzen (bzw. -wert) $EU(x), EU(y)$ und $EU(z)$ aus?

(Die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie und die Nutzentheorie dürfen dabei vorausgesetzt werden!)

(Zusatzfrage: Was besagt dieses Resultat?)

3. *Stelle das folgende Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum* dar: Eine Ärztin steht vor der Frage, ob sie die Infektion eines Patienten mit einem Desinfektionsmittel oder mit einem Antibiotikum behandeln soll. Das Antibiotikum schlägt bei 80% der Patienten gut an, in welchem Fall die Heilungschance bei 70% liegt. Bei den restlichen Patienten liegt die Heilungschance mit demselben mittel jedoch nur bei 40%. Das Desinfektionsmittel hat dagegen bei allen Patienten eine Heilungschance von 50% Da die Mittel miteinander unverträglich sind, besteht nicht die Möglichkeit beide Mittel zu verabreichen.

	A. schlägt an (80%)		schlägt nicht an (20%)	
	Heilung (70%)	¬Heilung (30%)	Heilung (40%)	¬Heilung (60%)
Antibiotikum	gesund (56%)	krank (24%)	gesund (8%)	krank (12%)
Des.-Mittel	gesund (40%)	krank (40%)	gesund (10%)	krank (10%)

4. Wiederholungsaufgabe: Betrachte folgende beiden Entscheidungstabellen:

Tabelle 1:

A_1	0	7	-2	3
A_2	3	4	4	19
A_3	2	12	7	3

Tabelle 2:

A_1	7	2	1	0
A_2	3	2	1	5
A_3	1	-1	6	3

Welche Entscheidungen sollten a) nach der Maximin-Regel getroffen werden? und b) nach der Minimax-Bedauerns-Regel?

5. Quizfrage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 6 Richtige im Lotto zu bekommen?

9 Spieltheorie I: Einführung

In dieser und der folgenden Woche werden wir uns mit der Spieltheorie beschäftigen. Die Spieltheorie kann man als Erweiterung der Entscheidungstheorie auffassen, indem in der Spieltheorie teils sehr ähnliche Techniken angewendet werden wie in der Entscheidungstheorie. So kann man „Spiele“ als Spielbäume oder Tabellen analog zu den Entscheidungsbäumen und -tabellen der Entscheidungstheorie darstellen. Umgekehrt kann man die Entscheidungstheorie als Spezialfall der Spieltheorie verstehen. Ein Entscheidungsproblem ist dann einfach ein Spiel, bei dem einer der Spieler die Natur ist.

Das wesentliche unterscheidende Merkmal der Spieltheorie gegenüber der Entscheidungstheorie besteht darin, dass sich in der Spieltheorie die Spieler strategisch aufeinander beziehen, d.h. die Spieler machen die Wahl der Strategie, die sie spielen, davon abhängig, welche Strategien die Mitspieler wählen bzw. von welchen Strategien sie erwarten, dass sie von ihren Mitspielern gewählt werden. Eine ansatzweise ähnlich Situation gibt es in der Entscheidungstheorie nur bei der „kausalen Entscheidungstheorie“, wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Zufallsereignisse von der gewählten Handlungsalternative abhängt.

9.1 Was „Spiele“ im Sinne der Spieltheorie sind

Spiele im Sinne der Spieltheorie ähneln im wirklichen Leben am ehesten einfachen Brett- oder Kartenspielen, wie Mühle oder Schach oder Skat. Einer oder mehrere Spieler spielen dabei gegeneinander, wobei sie in einer Folge von Runden aus einer wohldefinierten Menge von möglichen Spielzügen entsprechend ihrer Strategie jeweils einen Zug wählen. Das Ergebnis des Spiels (Gewinn oder Verlust bzw. die Höhe des Gewinns oder des Verlusts) hängt dabei von den Zügen aller Spieler und bei manchen Spielen zusätzlich vom Zufall (z.B. der Würfel oder Kartenverteilung) ab.

Ein Spiel im Sinne der Spieltheorie besteht dabei immer mindestens aus folgenden Komponenten:

1. Zwei oder mehrere *Spieler*. Je nachdem wie groß die Anzahl der Spieler ist, spricht mann von einem 2-Personen, 3-Personen oder N-Personen Spiel.

2. Mengen möglicher Spiel-*Züge*. Für jeden Spieler gibt es dabei eine eigene Menge möglicher Züge.

3. Die Menge der möglichen *Ergebnisse* bzw. „Auszahlungen“. Das Ergebnis eines jeden Spielers hängt dabei von den Zügen des Spielers selbst und von den Zügen des Gegenübers ab.

Bei bestimmten Arten von Spielen kommen noch weitere Komponenten hinzu:

4. Eine endliche oder unendliche Anzahl von Spiel-*Runden*.

   Hat ein Spiel mehrere Runden und stehen jedem Spieler in jeder Runde dieselben möglichen Züge offen, dann spricht man auch von einem *wiederholten Spiel*. Grundsätzlich kann man jedes wiederholte Spiel auch als ein komplexes einfaches Spiel auffassen. Es ist eher eine Frage der Konvenienz, ob man solche Spiele als wiederholte Spiele analysiert.

5. Eine Menge von *Strategien*. Die Strategie eines Spielers spezifiziert für jede Runde und jede Spielsituation (i.e. jede Folge vorhergehender Züge), welcher Zug gespielt werden soll. Ggf. kann dabei auch zwischen mehreren möglichen Zügen zufällig ausgewählt („randomisiert“) werden.

   Bei einfachen Spielen bestehen die Strategien nur aus einem Zug, so dass Züge und Strategien zusammenfallen. Man kann in diesen Fällen die Ausdrücke „Zug“ und „Strategie“ auch Synonym gebrauchen.

6. Eine Menge von *Zufallsereignissen*, die neben den gewählten Zügen bzw. Strategien der Spieler die Ergebnisse des Spiels für die Spieler beeinflussen.

   Zufallsereignisse können dabei so modelliert werden, dass ein zusätzlicher Spieler „Natur“ eingeführt wird, dessen Züge die zufälligen Ereignisse repräsentieren und der über seine Züge mit den Wahrscheinlichkeiten der Zufallsereignisse randomisiert. Es ist zu berücksichtigen, dass für die Spielerin „Natur“ keine Rationalität vorausgesetzt werden kann. Eine alternative Art der Modellierung des Einflusses von Zufallsereignissen besteht darin, die Ergebnisse der Spieler durch Lotterien über Ergebnisse entsprechend den Wahrscheinlichkeiten der Zufallsereignisse zu ersetzen.

Es könnte an dieser Stelle die Frage auftreten, wo die für Spiele im Alltagsleben (z.B. Brettspiele oder Kartenspiele) konstitutiven *Regelwerke* in die Theorie eingehen. Solche Regelwerke werden implizit bei der Angabe der möglichen Züge und bei der Angabe der Ergebnisse berücksichtigt. Die möglichen Züge beim Sachspiel sind eben alle diejenigen Züge, die nach den Regeln für das Schachspiel erlaubt sind. Die Ergebnisse (Gewinn, Verlust, Remis) sind ebenfalls durch das Regelwerk festgelegt, d.h. umgekehrt: Indem man festlegt, wann welcher Spieler welches Ergebnis erhält, hat man automatisch die entsprechenden Regeln bezüglich Gewinn und Verlust des Spiels in der Spielspezifikation berücksichtigt. Daher bildet das Regelwerk in der Spieltheorie keine eigene Komponente der Spielspezifikation.

Ähnlich wie schon bei der Entscheidungstheorie bildet das Problem der richtigen Problemspezifikation eine keinesfalls triviale Schwierigkeit bei der Anwendung der Spieltheorie auf empirisch auftretende Beispiele von strategischer Interaktion. So wie man etwa bei der Entscheidungstheorie *alle* in Frage kommenden Handlungsalternativen *und alle* für das Ergebnis kausal relevanten Zufallsereignisse angeben muss, ist es bei der Anwendung der Spieltheorie in der Regel erforderlich alle strategischen Optionen zu kennen und anzugeben. Will man die Spieltheorie etwa auf die strategische Interaktion zwischen verfeindeten Armeen im Krieg anwenden, dann kann die Erfindung neuer Taktiken und Strategien der spieltheoretischen Kalkulation einen Strich durch die Rechnung machen. Auf derartige Probleme sei hier jedoch nur hingewiesen. Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst mit der „reinen“ Spieltheorie als solcher. Anwendungsbeispiele werden wir in der nächsten und in der letzten Vorlesung besprechen.

Was die Spieltheorie leisten kann, sofern es uns gelingt einen empirischen Fall strategischer Interaktion angemessen zu spezifizieren ist zweierlei:

1. Die Spieltheorie stellt eine Art standardisierte Sprache zur *Beschreibung strategischer Interaktion bereit.* Dies erleichtert die Darstellung und den Vergleich unterschiedlicher Interaktionssituationen und kann selbst in solchen Fällen von Nutzen sein, in denen sich die spieltheoretischen Lösungsverfahren als inadäquat erweisen.

   Es ist jedoch zu beachten, dass die spieltheoretische Beschreibung strategischer Interaktion nicht immer möglich ist, z.B. wenn keine Klarheit über die verfügbaren strategischen Optionen besteht. Und auch wenn sie möglich ist, besteht die Gefahr, dass die spieltheoretische Beschreibung die wesentlichen Aspekte des empirischen Problems eher verdeckt, z.B. indem die außerhalb der Wirtschaftswissenschaften oft schwierigen Probleme der Bewertung von Ergebnissen in den Auszahlungsparametern (bzw. den Nuzenwerten) „versteckt“ werden.

2. Die Spieltheorie stellt *Lösungsverfahren* für Spiele bereit. Eine Lösung im Sinne der Spieltheorie ist die Menge derjenigen Strategien, die die Spieler wählen werden bzw. wählen sollten, wenn sie ihren Nutzen maximieren wollen.

   In der Empirie zeigt sich jedoch, dass das beobachtbare Spielerverhalten von der spieltheoretischen Lösung häufig stark abweicht.

9.1.1 Beispiele

Am besten lässt sich das, was man in der Spieltheorie unter einem Spiel versteht, anhand von einigen Beispielen darstellen.

Beispiel 1: Das Knobelspiel Beim Knobeln wählen zwei Spieler gleichzeitig eines der drei Symbole *Stein*, *Schere*, *Papier*. Dabei gelten die Regeln: 1.Stein schleift Schere. 2.Schere schneidet Papier und 3.Papier wickelt Stein. Mit jeder Option kann man also ebenso gut gewinnen wie verlieren. Das Spiel sieht als Tabelle dargestellt folgendermaßen aus:

		Spaltenspieler		
		Stein	Schere	Papier
	Stein	0,0	1,-1	-1,1
Zeilenspieler	Schere	-1,1	0,0	1,-1
	Papier	1,-1	-1,1	0,0

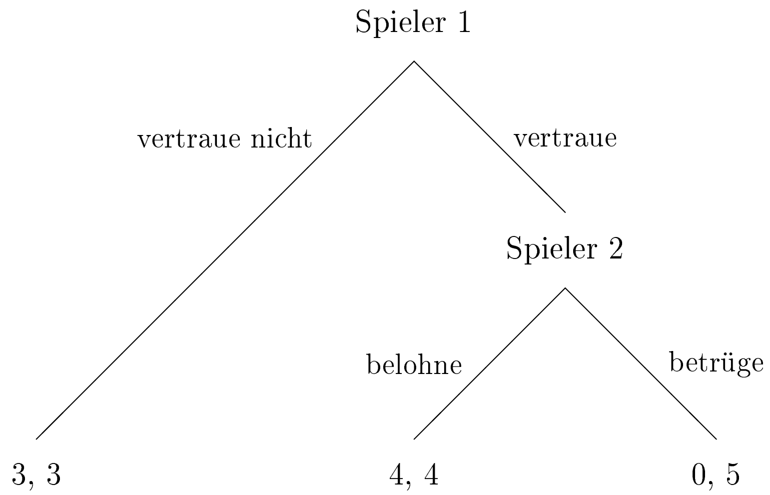
Dabei repräsentiert die erste der beiden Zahlen in jeder Zelle im inneren der Tablle das Ergebnis des „Zeilenspielers“. Die zweite Zahl ist das Ergebnis des „Spaltenspielers“. Bei dieser Repräsentation des Spiels steht eine 1 für den Gewinn des Spiels eine -1 für den Verlust und 0 für Unentschieden.

Eine etwas einfachere Variante desselben Spiels ist das sogenannte „Passende Münzen“-Spiel („Matching Pennies“). Beim „Passende Münzen“-Spiel legen beide Spieler verdeckt eine Münze auf den Tisch. Der erste Spieler gewinnt, wenn beide Münzen Kopf oder beide Münzen Zahl zeigen. Der zweite Spieler gewinnt dagegen, wenn beide Münzen dasselbe zeigen. In Tabellenform dargestellt, sieht das Spiel folgendermaßen aus:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1,-1	-1,1
	Zahl	-1,1	1,-1

Beide Spiele (Knobeln und Passende Münzen) fallen übrigens in die Kategorie der *Nullsummenspiele*, weil der Gewinn des einen der Verlust des anderen ist.

Beispiel 2: Vertrauensspiel Genauso wie in der Entscheidungstheorie gibt es in der Spieltheorie neben der Tabellenform auch andere Darstellungsformen von Spielen. Besonders wenn die Spielzüge sukzessive aufeinander folgen, bietet sich oft die anschaulichere Baumdarstellung an. Ein Beispiel ist das sogenannte Vertrauensspiel, bei dem ein Spieler zunächst entscheidet, ob er einem anderen „Vertrauen“ schenkt und der andere Spieler, sofern ihm Vertrauen geschenkt wurde, entscheidet, ob er das Vertrauen belohnt oder den Vertrauenden betrügt. Das Vertrauensspiel gibt die typische Situation bei Internet-Auktionen wieder, bei denen zunächst der Käufer das Geld für den ersteigerten Gegenstand überweist und der Vekäufer anschließend den Gegenstand verschickt. Das Vertrauensspiel lässt sich sehr einfach und anschaulich als Baum darstellen:



Die erste Zahl am unteren Ende des Spielbaums gibt hier wiederum das Ergebnis für den ersten Spieler an, und die zweite Zahl das Ergebnis für den zweiten Spieler. Damit es sich um ein „Vertrauensspiel“ handelt, muss die Belohnung größer sein als das Ergebnis in dem Fall, dass kein Vertrauen geschenkt wird. Zugleich muss für den zweiten Spieler die Alternative Betrügen einen höheren Ertrag liefern als Belohnen. Nur dann nämlich ist von Spieler 1 tatsächlich Vertrauen gefragt, wenn er in Interaktion mit Spieler 2 tritt.

Das Vertrauensspiel ist ebenso wie die folgenden Spiele ein Nicht-Nullsummen-Spiel, d.h. beide Spieler können bei dem Spiel gewinnen (oder verlieren). In diesem Fall liefert belohntes Vertrauen beiden ein besseres Ergebnis als wenn gar kein Vertrauen geschenkt wird.

Beispiel 3: Das Hirschjagd-Spiel Beim Hirschjagd-Spiel geht es um folgende Geschichte: Drei Jäger (es können auch zwei oder mehr als drei Jäger sein) gehen gemeinsam auf die Jagd, um einen Hirsch zu jagen. Den Hirsch können sie nur erlegen, wenn sie alle drei zusammenarbeiten. In dem Wald, wo sie den Hirsch jagen möchten, gibt es aber auch jede Menge Hasen. Einen

Hasen könnte notfalls jeder alleine fangen. Nur gibt ein Hase eben einen kleineren Braten ab als ein Drittel Hirsch. Jeder Jäger steht also vor der Wahl, ob er lieber einen Hasen fängt, den er sicher hat, oder ob er, auf die anderen Jäger vertrauend, seinen Teil dazu leistest, den Hirsch zur Strecke zu bringen.

Bei drei Spielern handelt es sich bereits um ein N-Personen Spiel. Um ein solches Spiel in Tabellenform darzustellen benötigt man eigentlich eine N-Dimensionale Matrix. Man kann das Spiel aber auch durch mehrere $N-1$-dimensionale Matrizen darstellen, wie im Folgenden. Jede der Matrizen stellt dabei die möglichen Ergebnisse für jeweils eine bestimmte Handlung (bzw. einen bestimmten „Zug") von Jäger drei dar.

		Jäger 2		**Jäger 2**	
		Hirsch	Hase	Hirsch	Hase
Jäger 1	Hirsch	5, 5, 5	0, 2, 0	0, 0, 2	0, 2, 2
	Hase	2, 0, 0	2, 2, 0	2, 0, 2	2, 2, 2
		Jäger 3: Hirsch		**Jäger 3**: Hase	

Da ein Hirschbraten, auch wenn man ihn sich zu dritt teilen muss, wesentlich besser ist als ein Hasenbraten wurde dafür der Nutzenwert 5 veranschlagt. Den Wert 2 bekommt, wer einen Hasen fängt. Und 0 erhält, wer gar nichts fängt, also ein Jäger, der versucht einen Hirsch zu fangen, während sich einer oder alle anderen davon machen, um Hasen zu jagen, so dass der Hirsch entwischt...

Beispiel 4: Gefangenendilemma Es musste ja kommen: Das Gefangenendilemma. Zum Gefangenendilemma gibt es folgende Geschichte: Zwei Bankräuber werden von der Polizei aufgegriffen. Die Polizei kann ihnen jedoch nichts nachweisen. Daher stellt sie jeden der Bankräuber vor folgende Wahl: Entweder Du verrätst Deinen Komplizen, oder wir sperren Dich für vier Wochen wegen Landstreicherei ein. Wenn Du Deinen Komplizen verrätst und er Dich nicht verrät, dann kommst Du sofort frei und Dein Komplize bekommt 10 Jahre aufgebrummt. Verrät Dich Dein Komplize ebenfalls, dann kommst Du immerhin mit 5 Jahren davon, weil Du ausgesagt hast.

		Gefangener 2	
		Schweigen	Aussagen
Gefangener 1	Schweigen	4 Wochen, 4 Wochen	10 Jahre, frei
	Aussagen	frei, 10 Jahre	5 Jahre, 5 Jahre

Wenn man solche Faktoren wir die Ganovenehre außer Acht lässt, dann werden beide Gefangenen aussagen, weil diese Strategie ihnen das relativ bessere Ergebnis liefert sowohl, wenn der andere aussagt, als auch, wenn er schweigt. Die Strategie "Schweigen" wird von der Strategie „Aussagen" strikt dominiert.

Das Beispiel des Gefangenendilemmas führt zugleich eine erste offensichtliche Lösungsstrategie für Spiele vor Augen, nämlich die Lösung durch *Dominanz*. Wenn man annimmt, dass die Spieler ihren Nutzen maximieren wollen, dann sollten sie auf keinen Fall eine Strategie wählen, die dominiert wird. Dominiert wird eine Strategie dann, wenn es eine Alternativ-Strategie gibt, die in mindestens einem Fall ein besseres Ergebnis liefert und in allen anderen Fällen wenigstens ein genauso gutes. Wie schon bei der Entscheidungstheorie kann man von der eben beschriebenen *schwachen* Dominanz noch die *starke* bzw. *strikte* Dominanz unterscheiden. Eine Strategie wird durch eine andere stark dominiert, wenn die andere Stratwegie in jedem Fall ein besseres Ergebnis liefert.

Außer davon, dass eine Strategie dominiert wird (wenn es eine eindeutig bessere gibt), kann man auch davon sprechen, dass eine Strategie dominant ist, nämlich dann, wenn sie eindeutig besser ist als aller anderen Strategien. Bei schwacher Dominanz bedeutet „eindeutig besser" sein, dass sie im paarweisen Vergleich mit jeder anderen Strategie wenigstens in einem Fall ein besseres Ergebnis liefert als die anderen Strategien und in allen anderen Fällen ein mindestens gleich Gutes. Bei starker Dominanz ist „eindeutig besser" so zu interpretieren, dass sie in allen Fällen besser sein muss als alle anderen Strategien.

Dabei ist zu beachten: Wenn eine Strategie durch eine andere dominiert wird, so bedeutet dies noch längst nicht, dass die andere Strategie eine dominante Strategie ist. Denn dazu müsste sie auch alle übrigen Strategien dominieren. Dazu ein Beispiel:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	4	4	2	6
Z_2	2	4	0	5
Z_3	3	2	1	2
Z_4	0	2	1	2

Bei diesem Spiel wird die Strategie Z_4 durch die Strategie Z_3 schwach dominiert. Trotzdem ist die Strategie Z_3 keine dominante Strategie, da sie die Strategie Z_2 nicht dominiert, und zudem ihrerseits durch die Strategie Z_1 stark dominiert wird. Die Strategie Z_1 ist eine schwach dominante Strategie, das sie alle anderen Strategien dominiert, aber die Strategie Z_2 nur schwach dominiert.

Im Gefangenendilemma ist Nicht-Kooperation mit dem Mitspieler in jedem Fall eindeutig besser als Kooperation. Also ist Nicht-Kooperation im Gefangendilemma eine strikt dominante Strategie.

9.2 Nullsummenspiele

Nullsummenspiele sind Spiele, bei denen die Summe der Gewinne und Verluste aller Spieler immer gleich 0 ist. Das Schachspiel ist ein Nullsummenspiel, das Knobelspiel ist ebenfalls ein Nullsummenspiel. Die Tatsache, dass bei Nullsummenspielen der Gewinn des einen immer der Verlust des anderen ist, erlaubt bei 2-Personen Nullsummenspielen eine nochmals vereinfachte Darstellung: Man gibt in der Spieltabelle nicht mehr die Gewinne und Verluste der beiden Spieler durch Kommata getrennt nebeneinander an, sondern man trägt nur noch die Gewinne des Zeilenspielers ein. Die Gewinne des Spaltenspielers sind dann der entsprechende negative Wert. Man kann die Situation auch so auffassen, dass der Zeilenspieler die Werte innerhalb der Tabelle immer maximieren will, der Spaltenspieler sie aber immer minimieren will. Eine Spieltabelle könnte dann folgendermaßen aussehen:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	0	1	7	7
Z_2	4	1	2	10
Z_3	3	1	0	25
Z_4	0	0	7	10

Quelle: Resnik, Choices, S.128 [23]

Dieses Spiel lässt sich nicht unmittelbar durch Dominanzüberlegungen lösen. Allerdings kann man es ebenso wie schon in der Entscheidungstheorie durch *sukzessive* Dominanz lösen. So wird die Strategie S_4 des Spaltenspielers offensichtlich von allen anderen Alternativen dominiert, denn er möchte die Auszahlungen für den Zeilenspieler, die seine Verluste sind, ja möglichist minimieren. Da die Strategie C_4 also nicht in Frage kommt können wir sie streichen. Ist die Strategie C_4 aber erst einmal gestrichen, dann wird bezüglich der verbleibenden Möglichkeiten die Strategie Z_3 dominiert (nämlich von Z_2) und kann ebenfalls gestrichen werden usf. Als Ergebnis bleibt das Strategiepaar (R_2, S_2) übrig (Übungsaufgabe). Dieses Strategiepaar bildet die *Lösung* des Spiels nach Dominanz. Die Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn beide Spieler die Lösungsstrategie spielen, wird auch der *Wert des Spiels* für den entsprechenden Spieler genannt. In diesem Beispiel ist der Wert des Spiels für den Zeilenspieler 1 und für den Spaltenspieler -1.

Allgemein hat *eine* Lösung eines Spiels immer die Form eines Tupels von Strategien, das für jeden Spieler eine Strategie erhält. Je nach Lösungsverfahren kann keine, eine oder mehrere Lösungen geben. Der Wert des Spiels kann bei mehreren Lösungen von Lösung zu Lösung variieren. In diesem Fall kann man sinnvollerweise von dem „maximalen" oder auch „optimalen" Wert eines Spiels für einen Spieler sprechen.

9.2.1 Das Nash-Gleichgewicht

Die (sukzessive) Dominanz ist ein ebenso einfaches wie einleuchtendes Lösungsverfahren. Nur lässt es sich nicht immer anwenden. Das folgende Spiel weist keine dominierten Strategien auf, die man streichen könnte:

	S_1	S_2	S_3
Z_1	8,-8	8,-8	7,-7
Z_2	0,0	10,-10	4,-4
Z_3	9,-9	0,0	1,-1

Quelle: Resnik, Choices, S.129 [23]. Aus Gründen der Anschaulichkeit wurden die entsprechenden negativen Auszahlungen für den Spaltenspieler explizit eingetragen.

Trotzdem existiert ein Strategiepaar, dass man durch eine naheliegende Überlegung in besonderer Weise auszeichnen kann. Dieses Strategiepaar ist das Paar (Z_1, S_3). Die Überlegung, die zur Auszeichnung dieses Strategiepaares führt ist die folgende: Angenommen der Zeilenspieler hätte sich (aus irgendwelchen Gründen) auf die Strategie Z_1 festgelegt. Dann ist das beste, was der Spaltenspieler tun kann, die Strategie S_3 zu wählen, weil er so noch am meisten bekommt (-7 anstelle von -8 bei den Alternativen S_1 und S_2). Man sagt auch, dass die Strategie S_3 die *beste Antwort* auf die Strategie Z_1 ist. Umgekehrt gilt: Hat der Spaltenspieler die Strategie S_3 gewählt, so ist die Strategie Z_1 die beste Antwort, die der Zeilenspieler wählen kann, um sein Ergebnis zu maximieren. Die Strategien Z_1 und S_3 sind also wechselseitig beste Antworten aufeinander. Keiner der Spieler hätte eine Motivation, im Alleingang von seiner Strategie abzuweichen. Das Strategiepaar (Z_1, S_3) bildet in diesem Sinne ein *Gleichgewicht*. Die mit diesem Gleichgewicht assoziierten Auszahlungen sind die „Gleichgewichtswerte" des Spiels.

Diese Art von Gleichgewicht nennt bezeichnet man auch nach ihrem Erfinder als *Nash-Gleichgewicht*. Das Konzept des Nash-Gleichgewicht kann folgendermaßen motiviert werden: Wir nehmen an, dass die Spieler frei und unabhängig voneinander sind, d.h. jeder Spieler kann seine eigene Strategie wählen aber niemand kann seinen Gegenüber verpflichten eine bestimmte

Strategie zu wählen. Dann werden die Spieler, wenn sie sich nutzenmaximierend verhalten, immer diejenige Strategie wählen, die eine beste Antwort auf die Strategie ihres Gegenübers bzw. auf die Strategie, die sie bei ihrem Gegenüber vermuten, ist.

Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob sich die Spieler nicht gegebenenfalls dazu verabreden könnten, ihre Strategien gleichzeitig zu wechseln. Aber einerseits würden sie das vermutlich nur tun, wenn mindestens einer der Spieler einen Vorteil davon hat und der andere nach dem Wechsel wenigstens nicht schlechter da steht. Da im Nullsummenspiel der Vorteil des einen immer der Nachteil des anderen ist, wird ein Spieler immer gegen den solchen Wechsel sein. Bei einem Nicht-Nullsummenspiel ist ein solcher Wechsel immerhin vorstellbar, sofern es den Spielern gelingt, sich in irgendeiner Weise zu koordinieren.

Um alle Nashgleichgewichte in reinen Strategien zu bestimmen, gibt es bei endlichen Spielen eine zugegebenermaßen krude aber zugleich todsicher Methode: Man probiert einfach jedes mögliche Strategietupel durch.

Dass es auch im Nullsummenspiel mehrere Gleichgewichte geben kann, zeigt das folgende Beispiel:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	1,-1	2,-2	3,-3	1,-1
Z_2	0,0	5,-5	0,0	0,0
Z_3	1,-1	6,-6	4,-4	1,-1

Quelle: Resnik, Choices, S.131 [23], leicht abgewandelt

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass (S_1, Z_1), (S_4, Z_1), (S_1, Z_3),(S_4, Z_3) Gleichgewichte sind. Auffällig ist, dass alle Gleichgewichte denselben Gleichgewichtswert haben. Dass es sich dabei nicht nur um eine Zufälligkeit handelt, sondern dass ein Gesetz dahinter steckt, beweist der folgende Satz (Vgl. Resnik [23, S. 131]):

> *Koordinationstheorem für Nullsummenspiele*: Seien (S_i, Z_m) und (S_j, Z_n) zwei Gleichgewichte eines Nullsummenspiels. Dann sind auch (S_i, Z_n) und (S_j, Z_m) Gleichgewichte und alle vier Gleichgewichte haben denselben Wert.

Beweis (nach Resnik [23, S. 131]): Seien $v_{im}, v_{jn}, v_{in}, v_{jm}$ die den entsprechenden Strategiepaaren zugeordneten Werte des Spiels für den Zeilenspieler. Da (S_i, Z_m) und (S_j, Z_n) Gleichgewichte sind, müssen v_{im}, v_{jn} jeweils minimale Werte ihrer Zeile und maximale Werte ihrer Spalte sein. Dann gilt aber auch:

1. $v_{im} \leq v_{in}$, da beide Werte in derselben Zeile stehen und v_{im} als Gleichgewichtswert ein minimaler Wert der Zeile sein muss.
2. $v_{in} \leq v_{jn}$, da beide Werte in derselben Spalte stehen und v_{jn} als Gleichgewichtswert ein maximaler Wert der Spalte sein muss.
3. $v_{jn} \leq v_{jm}$, da beide Werte in derselben Zeile stehen und v_{jn} als Gleichgewichtswert ein minimaler Wert der Zeile sein muss.
4. $v_{jm} \leq v_{im}$, da beide Werte in derselben Spalte stehen und v_{in} als Gleichgewichtswert ein maximaler Wert der Spalte sein muss.

Zusammengefasst ergibt sich daraus die Ungleichung:

$$v_{im} \leq v_{in} \leq v_{jn} \leq v_{jm} \leq v_{im}$$

Da am Ende der Ungleichungskette dieselbe Variable steht wie am Anfang gilt die Gleichheit:

$$v_{im} = v_{in} = v_{jn} = v_{jm} = v_{im}$$

Daraus lässt sich unmittelbar ableiten, dass in Nullsummenspielen alle reinen Gleichgewichte denselben Wert haben müssen.

9.2.2 Gemischte Strategien und gemischte Gleichgewichte

Als reine Strategien bezeichnet man Strategien, bei denen die Auswahl der Züge eindeutig durch die Strategie festgelegt ist und nicht zufällig vorgenommen wird. Umgekehrt bezeichnet man als gemischte Strategien solche Strategien bei denen zwischen reinen Strategien randomisiert wird. (Was dasselbe ist, als wenn man sagen würde, dass innerhalb der Strategie zwischen alternativen Zügen randomisiert wird.) Ein gemischtes Gleichgewicht ist dementsprechend ein Gleichgewicht, in dem mindestens zwei gemischte Strategien vorkommen. (Bei einem 2-Personen Spiel heißt dies, dass das Gleichgewicht nur aus gemischten Strategien bestehen darf.)

Ein einfaches Beispiel für ein gemischtes Gleichgewicht liefert das „Passende Münzen“-Spiel:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1,-1	-1,1
	Zahl	-1,1	1,-1

Bei diesem Spiel hat jede reine Strategie, die ein Spieler spielt, den Erwartungswert -1. Der *Erwartungswert* einer Strategie ist diejenige Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn der Gegenspieler seine beste Antwort auf die Strategie spielt. (Der Erwartungswert von Strategien in der Spieltheorie ist also nicht zu verwechseln mit dem Erwartungswert in der Entscheidungstheorie!)

Wenn Spieler 1 aber mit einer 50% Wahrscheinlichkeit über beide reinen Strategien randomisiert, dann hat seine gemischte Strategie (50% Kopf, 50% Zahl) einen Erwartungswert von 0, da er – ganz gleich, welche reine oder gemischte Strategie der andere Spieler spielt – immer in der Hälfte der möglichen Fälle eine Auszahlung von 1 und in der anderen Hälfte der Fälle eine Auszahlung von -1 bekommt. Den Erwartungswert von 0 erhält Spieler 1 aber tatsächlich nur, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 zwischen seinen Strategien wählt. Würde er eine andere Wahrscheinlichkeit wählen, so würde sein Mitspieler diejenige Strategie wählen, die die beste Antwort auf die von Spieler 1 häufiger gewählte reine Strategie wäre. Wenn Spieler 1 also z.B. (60% Kopf, 40% Zahl) spielt, dann würde Spieler 2 am erfolgreichsten sein, wenn er immer Zahl spielte.

Wie kann man aber generell das gemischte Gleichgewicht berechnen, sofern eins vorhanden ist? Im einfachsten Fall, d.h. bei 2-Personen Spielen mit jeweils zwei Handlungsoptionen, sieht die Tabelle folgendermaßen aus:

		Spaltenspieler	
		S_1	S_2
Zeilenspieler	Z_1	A_z, A_s	B_z, B_s
	Z_2	C_z, C_s	D_z, D_s

Bei Nullsummenspielen gilt natürlich immer: $A_z = A_s$,$B_z = B_s$,$C_z = C_s$, $D_z = D_s$. Aber darauf werden wir bei der Bestimmung des gemischten Gleichgewichts nicht zurückgreifen, so dass der folgende Ansatz für alle einfachen 2-Personen Spiele mit zwei Handlungsoptionen tauglich ist.

Wie aus den Überlegungen zum „Passende Münzen“-Spiel bereits deutlich geworden ist, kann eine gemischte Strategie nur dann eine Gleichgewichtsstrategie sein, wenn der Gegenspieler indifferent ist, mit welcher seiner beiden reinen Strategien er die gemischte Strategie „beantworten“ soll. Wäre er nämlich nicht indifferent, dann würde er diejenige reine Strategie wählen, die die bessere Antwort ist. Darauf würde der erste Spieler wiederum mit einer reinen Strategie antworten können, die mindestens so gut ist wie seine gemischte Strategie. Ein gemischtes Gleichgewicht könnte dann nur noch in dem Sonderfall vorliegen, in dem er indifferent zwischen seinen reinen und gemischten Strategien ist. (Siehe dazu die entsprechende Übungsaufgabe zur nächsten Vorlesung auf Seite 187) Im Normallfall kommt ein gemischtes Gleichgewicht im 2-Personen Spiel mit zwei Handlungsoptionen also nur in der Form vor, in der beide Spieler eine gemischte Strategie spielen.

Wenn wir also bestimmen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zeilenspieler im gemischten Gleichgewicht über seine reinen Strategien randomisieren muss, dann müssen wir die Rechnung für Erwartungswerte des *Spalten*spielers aufstellen. Die Erwartungswerte des Spaltenspielers hängen nämlich von der Wahrscheinlichkeit ab, mit der der Zeilenspieler randomisiert.

Die Erwartungswerte des Spaltenspielers bezüglich der gemischten Strategie des Zeilenspielers berechnen sich nach:

$$EW_{S1} = p \cdot A_s + (1-p) \cdot C_s$$

$$EW_{S2} = p \cdot B_s + (1-p) \cdot D_s$$

Da beide Werte gleich sein müssen, können wir die Gleichung aufstellen:

$$p \cdot A_s + (1-p) \cdot C_s = p \cdot B_s + (1-p) \cdot D_s$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert uns das gesuchte Randomisierungsgewicht p.

Um das Randomisierungsgewicht des Spaltenspielers q zu berechnen, müssen wir umgekehrt die Erwartungswerte der reinen Strategien des Zeilenspielers bestimmem:

$$EW_{Z1} = q \cdot A_z + (1-q) \cdot B_z$$

$$EW_{Z2} = q \cdot C_z + (1-q) \cdot D_z$$

Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$q \cdot A_z + (1-q) \cdot B_z = q \cdot C_z + (1-q) \cdot D_z$$

Sofern die beiden Gleichungen lösbar sind und für p und q bestimmte Werte zwischen 0 und 1 liefern, lautet das gemischte Gleichgewicht:

$$((p, Z_1; 1-p, Z_2), (q, S_1; 1-q, S_2))$$

Da bei 2-Personen Spielen mit zwei Handlungsoptionen aber klar ist, zwischen welchen Strategien randomisiert wird, würde es bereits genügen, die beiden Wahrscheinlichkeiten für den Zeilen- und Spaltenspieler p und q anzugeben, um das gemischte Gleichgewicht genau zu spezifizieren.

9.3 Aufgaben 8 (24. Juni)

1. Gibt es im Hirschjagdspiel (Seite 147) eine stark oder schwach dominante bzw. dominierte Strategie? (Begründe!)

2. Bestimme die Nash-Gleichgewichte im Hirschjagdspiel.

3. Im Gefangenendilemma (Seite 148) ist das Nash-Gleichgewicht Pareto-Ineffizient. Erklären Sie, wie es dazu kommt. (i.e. Worin unterscheiden sich die Überlegungen, die man zu Bestimmung des Nash-Gleichgewichts und zur bestimmung der Pareto-Effizienten Zustände anstellt?)

4. Würde es im Gefangenendilemma den Gefangenen helfen, wenn sie miteinander kommunizieren können? (Begründe!)

5. Würde es im Hirschjagdspiel helfen, wenn die Spieler miteinander kommunizieren können? (Begründe!)

6. Löse durch sukzessive Dominanz:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	0	1	7	7
Z_2	4	1	2	10
Z_3	3	1	0	25
Z_4	0	0	7	10

Quelle: Resnik, Choices, S.128 [23]

7. Löse durch sukzessive Dominanz:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	2	2	4	5
Z_2	7	1	5	3
Z_3	4	2	3	1
Z_4	2	1	0	1

Quelle: Resnik, Choices, S.129 [23] (mit einer kleinen Abwandlung)

8. Bei einer Spielshow soll ein Kandidat vorhersagen, ob eine rote oder eine grüne Lampe aufleuchten wird. Sagt er richtig vorher gewinnt er €100 Euro. Der Kandidat, weiß, dass die rote Lampe mit 60% Wahrscheinlichkeit aufleuchten wird, die Grüne mit 40% Wahrscheinlichkeit. Das Spiel wird für 10 Runden wiederholt. Wie oft sollte der Kandidat „rot“ und wie oft „grün“ vorher sagen?

9. Finde ein genmischtes Gleichgewicht für das Knobelspiel (Zeige, dass es sich um ein gemischtes Gleichgewicht handelt.):

		Spaltenspieler		
		Stein	Schere	Papier
	Stein	0,0	1,-1	-1,1
Zeilenspieler	Schere	-1,1	0,0	1,-1
	Papier	1,-1	-1,1	0,0

10. Angenommen im „Passende Münzen“ Spiel spielt Spieler 2 die Strategie (70% Kopf, 30% Zahl). Welche reine oder gemischte Strateige ist die beste Antwort von Spieler 1 auf die gemischte Strategie von Spieler 2? Wie hoch ist dann der Wert des Spiels für jeden Spieler?

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1,-1	-1,1
	Zahl	-1,1	1,-1

11. Bestimme das gemischte Gleichgewicht des folgenden asymmetrischen „Passende Münzen“-Spiels:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	-5	10
	Zahl	20	-10

10 Spieltheorie II: Vertiefung und Anwendung

In dieser Vorlesung wird die Spieltheorie der 2-Personen Spiele vertieft werden. Da im Rahmen dieser Vorlesung nicht genug Raum für eine umfassende Darstellung der Grundlagen der Spieltheorie bleibt, wird die Spieltheorie auch diesmal nicht systematisch entwickelt, sondern über Beispiele eingeführt. Weiterhin werden am Beispiel des Gefangenendilemmas wiederholte Spiele besprochen werden. Schließlich wird, wiederum anhand von Beispielen, auf Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie eingegangen werden.

10.1 Nicht-Nullsummenspiele

Bereits in der letzten Vorlesung haben wir mit dem Vertrauensspiel, dem Hirschjagdspiel und dem Gefangenendilemma Beispiele für Nicht-Nullsummenspiele besprochen. Um die Erörterung der folgenden Beispiele wenigstens etwas zu systematisieren, kann zunächst zwischen Koordinations- und Nicht-Koordinationsspielen unterschieden werden. *Koordinationsspiele* sind solche Spiele, bei denen die Spieler sich bloß koordinieren müssen, um ein für sie wünschenswertes Ergebnis zu erreichen bzw. ein für alle Beteiligten nicht wünschenswertes Ergebnis zu vermeiden. Gelingt es Ihnen aber, sich zu koordinieren, dann werden sie – schon aus Eigeninteresse – bei der gewählten Lösung bleiben. Ein Beispiel für ein Koordinationsspiel ist das Hirschjagdspiele (siehe Seite 147). „Nicht-Koordinationsspiele" wären dementsprechend alle anderen Spiele. Für uns sind dabei besonders solche Spiele von Interesse, die ein echtes *Kooperationsproblem* modellieren, wie z.B. das Gefangenendilemma. Echte Kooperationsprobleme sind, grob gesagt, solche Probleme, bei denen die für alle Beteiligten wünschenswerte Lösung kein Gleichgewicht ist, d.h. die Spieler haben einen Anreiz aus Eigeninteresse von der wünschenswerten Lösung abzuweichen. So ist die wechselseitge Kooperation im Gefangenendilemma, obwohl sie aus Sicht beider Spieler wünschenswert wäre, nicht stabil, da jeder der Spieler sich verbessern kann, wenn er selbst nicht kooperiert, vorausgesetzt der andere bleibt bei seiner Strategiewahl.

Es stellt sich die Frage, was in diesem Zusammenhang „wünscheswert" bzw. „wünschenswerte Lösung" heißt. Daraus könnte man nun wieder eine der philosophischen Frage machen, zu der die Meinungen weit auseinandergehen können. Immerhin gibt es aber ein recht naheliegendes *notwendiges Kriterium* für das, was eine „wünschenswerte Lösung" ist, nämlich das aus den Wirtschaftswissenschaften bekannte Kriterium der *Pareto-Optimalität*. Im Zusammenhang der Spieltheorie ist ein Ergebnis „pareto-optimal" wenn es kein andere Ergebnis gibt, bei dem wenigstens einer der Spieler eine höhre Auszahlung bekommt und kein anderer eine niedrigere. Dass die Pareto-

Optimalität ein sinnvolles notwendiges Kriterium für ein „wünschenswertes Ergebnis“ darstellt, wird daraus deutlich, dass ein nicht pareto-optimaler Zustand ein Zustand ist, in dem man wenigstens einen Spieler besser stellen könnte, ohne dass ein anderer Spieler schlechter gestellt werden müsste. Dann ist es aber sicher nicht „wünschenswert“ bei einem Zustand zu verbleiben, den man so leicht und ohne Nachteile in Kauf nehmen zu müsssen, verbessern könnte.

Andererseits ist einzuräumen, dass man sich auch Beispiele vorstellen kann, in denen eine Gleichverteilung von Gütern unbedingt wünschenswerter ist als eine Ungleichverteilung, selbst wenn man sie gegen eine Art von Ungleichheit eintauschen könnte bei der niemand gegenüber der Gleichheit schlechter gestellt wird. In diesem Zusammenhang ist auch darauf hinzuweisen, dass das Pareto-Kriterium in erster Linie ein (kollektives) Effizienzkriterium und kein Gerechtigkeitskriterium ist. Wenn wir 100 Euro an zwei Personenn verteilen sollen und geben einer Person 1 Euro und der anderen 99 Euro, dann ist die Verteilung ebenso paretoeffizient wie diejenige, bei der beide Personen 50 Euro bekommen, obwohl die letztere von den vielen Menschen als die gerechtere beurteilt werden dürfte. Man kann noch einen Schritt weitergehen und fragen, ob es nicht besser wäre – wenn man nur eine der beiden folgenden Alternativen hat – lieber beiden 40 Euro geben und 20 Euro zum Fenster hinaus zu werfen, als zuzulassen, dass eine Person 99 Euro an sich reisst und die andere nur einen Euro bekommt. (Dies ist in nuce eins der Argumente, mit dem man die Rechtfertigugn von möglicherweise ineffizienten Umverteilungsbürokratien versuchen könnte.) Schließlich könnte man die Frage aufwerfen, wie man eine Situation handhaben sollte, in der 100 Euro nur in Form von 20 Euro-Scheinen verfügbar sind. Angenommen, beide Personen haben schon jeweils 40 Euro bekommen. Was soll nun mit den restlichen 20 Euro geschen. Soll man einer Person 60 Euro geben, um einen pareto-effizienten Zustand zu schaffen und „nichts verkommen zu lassen“. Oder sollte man die restlichen 20 Euro feierlich verbrennen, um keine Ungerechtigkeiten entstehen zu lassen?

Diese Überlegungen sollen nur zeigen, dass das Kriterium der Pareto-Effizienz nicht zwingenderweise in allen Situationen ein taugliches Kriterium dafür ist, was besser oder wünschenswerter ist. Dennoch hat das Kriterium der Pareto-Effizienz im Allgemeinen eine hohe Plausibilität, weshalb wir auch im Folgenden darauf zurückgreifen werden. Es ist jedoch wichtig, sich der Grenzen bewusst zu bleiben.

10.1.1 Koordinationsspiele

Koordinationsspiele sind dadurch gekennzeichnent, dass es mehrere Nash-Gleichgewichte (in reinen Strategien) gibt, von denen wenigstens eins pareto-effizient ist. Dabei können zwei Arten von Koordinationsproblemen entstehen: 1) Wenn es nur ein pareto-effizientes Gleichgewicht gibt, müssen sich die Spieler so koordinieren, dass sie das pareto-efiiziente Gleichgewicht erreichen und nicht in einem anderen Gleichgewicht gefangen werden. 2) Wenn es mehrere pareto-effiziente Gleichgewichte gibt, dann müssen sich die Spieler irgendwie auf eins der Gleichgewichte einigen. Misslingt die Einigung, so kann es dazu kommen, dass sie die Gleichgewichte überhaupt verfehlen.

Hirschjagdspiel als Koordinationsspiel Ein Beispiel für das erste Problem ist das in der letzten Woche schon vorgestellte Hirschjagdspiel:

12.

		Jäger 2		**Jäger 2**	
		Hirsch	Hase	Hirsch	Hase
Jäger 1	Hirsch	**5, 5, 5**	0, 2, 0	0, 0, 2	0, 2, 2
	Hase	2, 0, 0	2, 2, 0	2, 0, 2	**2, 2, 2**
		Jäger 3: Hirsch		**Jäger 3**: Hase	

In diesem Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

1. Gleichgewicht („Hirschjagdgleichgewicht“): Alle Jäger jagen den Hirsch.
2. Gleichgewicht („Hasenjagdgleichgewicht“): Alle Jäger jagen Hasen.

Dass es sich um Nash-Gleichgewichte handelt, geht aus folgender Überlegung hervor:

1. Gleichgewicht: Wenn alle Jäger den Hirsch jagen, hätte kein Jäger einen Grund als einziger einen Hasen zu jagen, weil dann sein Braten wesentlich kleiner ausfällt (Nutzenwert von zwei statt von fünf).

2. Gleichgewicht: Wenn alle Jäger Hasen jagen, hat keiner der Jäger einen Grund im Alleingang auf die Hirschjagd zu gehen, weil er alleine den Hirsch ohnehin nicht fangen kann.

3. Alle anderen Ergebnisse: In allen anderen Fällen versuchen nur einige Jäger den Hirsch zu jagen. Da kein Jäger den Hirsch ohne die Mithilfe aller fangen kann, kann ein Jäger, der vorhatte, den Hirsch zu jagen, sein Ergebnis verbessern, indem er auf die Strategie des Hasenjagens umstellt. Wenn wenigstens ein Spieler einen Anreiz hat, seine

Strategie im Alleingang zu ändern, handelt es sich nicht mehr um einen Gleichgewichtszustand. Also gibt es außer den beiden genannten Gleichgewichten kein weiteres Nash-Gleichgewicht mehr.

Das einzige paretoeffiziente Ergebnis dieses Spiels bildet das Hirschjagdgleichgewicht. Auch davon kann man sich leicht überzeugen. Denn egal welches andere Ergebnis man aus der Tabelle heranzieht, beim Hirschjagdgleichgewicht sind alle Jäger im Vergleich dazu besser gestellt (sie erhalten einen Nutzenwert von fünf anstelle von zwei oder null). Insbesondere ist auch das Hasenjagdgleichgewicht kein paretoeffizientes Ergebnis, auch wenn es eine Pareto-Verbesserung gegenüber allen anderen Ergebnissen bis auf das Hirschjagdgleichgewicht darstellt.

Das Koordinationsproblem beim Hirschjagdspiel besteht darin, dass das paretoeffiziente Hirschjagdgleichgewicht sehr viel instabiler ist als das Hasenjagdgleichgewicht. Wenn wir unter dem *Anziehungsbereich* eines Gleichgewichtes die Menge aller derjenigen Strategiekombinationen verstehen, die man durch eine endliche Anzahl von nutzenerhöhenden Strategiewechseln jeweils einzelner Jäger in das Gleichgewicht überführen kann, dann sieht man leicht, dass der Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts wesentlich größer ist als der des Hirschjagdgleichgewichts. Zum Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts gehören alle Strategiekombinationen bis auf das Hirschjagdgleichgewicht. Diejenigen Strategiekombinationen, bei denen mehr als ein Jäger auf Hasenjagd geht, gehören sogar ausschließlich zum Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts. Dagegen gehören zum Anziehungsbereich des Hirschjagdgleichgewichts nur diejenigen Strategiekombinationen, bei denen höchstens ein Jäger auf Hasenjagd geht. Und selbst diese Strategiekombinationen gehören nicht ausschließlich zum Anziehungsbereich des Hirschjagdgleichgewichts, sondern ebenso auch zum Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts. (Woran man gleichzeitig sieht, dass sich die Anziehungsbereiche der Gleichgewichte am Rand überschneiden können.)

Es ist charakteristisch für Koordinationsprobleme im Gegensatz zu den unten zu besprechenden Kooperationsproblemen, dass sie sich theoretisch allein durch Verabredungen, Signale oder Konventionen lösen lassen, ganz ohne jeden Bestrafungs- bzw. Sanktionsmechanismus. Das beliebte Schlagwort „Talk ist Cheap" (soll heißen: Ein Versprechen zu geben kostet nichts, weil man es später sowieso brechen kann) gilt nur bei Kooperationsproblemen aber nicht bei Koordinationsproblemen.

Widerstreitende Ziele („Clash of Wills") Ein vergleichsweise schwächeres Koordinationsproblem stellt das Spiel der „Widerstreitenden

Ziele“ dar (welches in der älteren Literatur auch oft unter dem Titel „Kampf der Geschlechter“ auftaucht). Hier ist die Geschichte zum Spiel: Fred und Clara wollen am Abend zusammen ausgehen. Sie telefonieren deswegen miteinander und überlegen, wo sie hingehen könnten. Freq möchte am liebsten die Oper besuchen. Clara dagegen findet die Oper ein wenig langweilig und würde es vorziehen, zu den Chippendales zu gehen. Allerdings würde sie immer noch lieber zusammen mit Fred in die Oper gehen anstatt alleine zu den Chippendales. Und umgekehrt würde auch Fred sich notfalls zu den Chippendales schleppen lassen, wenn er dadurch immerhin den Abend an Claras Seite verbringen darf. Bevor sie zu einer Einigung kommen ist leider der Akku von Freds Handy leer. Jeder von beiden überlegt für sich, wo er bzw. sie am Abend hingehen sollten, um den anderen zu treffen. Daraus ergibt sich die Spielmatrix:

		Clara	
		Oper	Chippendales
Fred	Oper	**2, 1**	0,0
	Chippendales	-1,-1	**1,2**

Wie man leicht nachprüfen kann, gibt es in diesem Spiel zwei reine Nashgleichgewichte in den Strategiekombonationen $(Oper, Oper)$ und $(Chippendales, Chippendales)$. Beide Nashgleichgewichte sind zudem paretoeffizient, während alle anderen reinen Strategiekombinationen paretoineffizient sind. Weiterhin existiert ein gemischtes Gleichgewicht, denn sei p die Wahrscheinlichkeit, mit der Fred am Abend in der Oper erscheint, dann bestimmt sich Claras Erwartungsnutzen für jede ihrer reinen Strategien nach:

$$\begin{aligned} EW(Clara)_{Oper} &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) \\ EW(Clara)_{Chippendales} &= p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \end{aligned}$$

Wenn Claras Gleichgewichtsstrategie ebenfalls eine gemischte Strategie sein soll, dann muss sie zwischen ihren reinen Strategien indifferent sein, da sie andernfalls die bessere der reinen Strategien wählen würde. Dann kann man beide Werte gleichsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} EW(Clara)_{Oper} &= EW(Clara)_{Chippendales} \\ p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) &= p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \\ 2p - 1 &= 2 - 2p \\ p &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Freds gemischte Gleichgewichtsstrategie besteht also darin, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 3/4$ zur Oper zu gehen. Da das Spiel vollkommen symmetrisch ist, besteht Claras gemischte Gleichgewichtsstrategie darin, mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 3/4$ die Chippendales zu besuchen. Der Nutzenwert für Fred und Clara im gemischten Gleichgewicht ist für beide 1/2. Das gemischte Gleichgewicht ist also nicht paretoeffizient, weil beide davon profitieren würden, zu einem der reinen Gleichgewichte überzugehen. Trotzdem handelt es sich um ein Gleichgewicht, da keiner von beiden einen positiven Anreiz hat, im Alleingang von der gemischten Strategie zu einer der reinen Strategien überzugehen oder eine andere gemischte Strategie, d.h. eine mit einem anderen Wahrscheinlichkeitswert, zu wählen.

Bedeutet das nun so etwas wie, dass es für Clara und Fred auf jeden Fall besser ist, eine ihrer reinen Strategien zu wählen, als den Zufall entscheiden zu lassen? Das Koordinationsproblem wird damit nicht aus der Welt geschafft, denn keiner von beiden weiss ja, für welche reine Strategie der andere sich entscheiden wird. Wenn Clara und Fred irgendwann einmal gelernt haben, dass man bei Unwissen gemäß dem Indifferenzprinzip davon ausgehen soll, dass alle Möglichkeiten gleichverteilt sind, dann würde das nur dazu führen, dass sie genau das Falsche tun, denn wenn man die Wahrscheinlichkeit, mit der der andere jede seiner Strategien wählen wird, mit 50% veranschlagt, dann wäre es für Clara das Beste zu den Chippendales zu gehen und für Fred, die Oper aufzusuchen. Wie man sich leicht überlegen kann, ist mit dem Wissen über das – ohnehin nicht einmal paretoeffiziente – gemischte Gleichgewicht in dieser Situation ebenfalls nichts anzufangen. Setzt Clara z.B. voraus, dass Fred entsprechend seiner gemischten Gleichgewichtsstrategie randomisiert, dann ist es für sie vollkommen gleich wohin sie geht, was das Koordinationsproblem auch nicht löst.

Es würde nichts dagegen sprechen, wenn Clara und Fred eine Münze werfen, um zu entscheiden, wohin sie gehen. Nur hilft es leider nicht, wenn jeder für sich eine Münze wirft. Sie müssten es schon beide gemeinsam tun. Da sie sich der Situationsbeschreibung nach aber aufe keine *koordinierte Strategie* mehr verständigen können, fällt diese Lösung aus.

Das Problem wäre womöglich weniger gravierend, wenn das Spiel nicht vollkommen symmetrisch wäre. Wenn z.B. der Nutzenwert von Fred für einen Opernbesuch deutlich höher wäre als der Nutzen, den Clara aus den Chippendales bezieht, und wenn dies beiden bekannt ist, und wenn beiden bekannt ist, dass es beiden bekannt ist, dann wäre es sicherlich für jeden von beiden naheliegend, vor der Oper zu erscheinen. Ist die Situation aber vollkommen symmetrisch, dann stellt sich das Koordinations-Problem als ein Problem des *Symmetriebruchs* dar.[24] Als Mechanismen zum Symmetriebruch wirken

[24]Die klassische Geschichte zum Problem des Symmetriebruchs ist die von „Buridans Esel“: Der Esel steht genau in der Mitte zwischen zwei gleich großen Heuhaufen, da er sich

häufig gesellschaftliche oder individuelle Konventionen. Zum Beispiel könnten beide sich nach dem Prinzip „Lady's first" jeweils dafür entscheiden, die Chippendales zu besuchen. Oder bisher hat sich Clara immer als die dominantere erwiesen, so das Fred und Clara beide davon ausgehen, dass sie sich – hätte das Telefongespräch länger gedauert – sowieso für die Chippendales entschieden.

10.1.2 Nicht Koordinations-Spiele

Die Spiele, die keine Koordinationsspiele sind, bilden natürlich eine ziemlich große und disparate Gruppe. Im folgenden werden beispielhaft zwei Spiele besprochen, die vergleichsweise schärfere Dilemmata abbilden, als das bei Koordinationsspielen der Fall ist.

Das Angsthasen-Spiel („Chicken-Game") Wie üblich als erstes die Geschichte zum Spiel: Beim Angsthasen-Spiel müssen die beiden „Spieler" mit Ihren Autos mit hoher Geschwindigkeit frontal aufeinander zufahren. Wer zuerst ausweicht ist ein „Angsthase" und hat verloren. Wenn keiner ausweicht, kommt es zum Unfall. Daraus ergibt sich die Spielmatrix:

	Ausweichen	Gas geben
Ausweichen	0, 0	**-5,5**
Gas geben	**5,-5**	-100,-100

Das Spiel hat zwei reine Gleichgewichte nämlich $(Ausweichen, Gasgeben)$ und $(Gasgeben, Ausweichen)$ mit den Auszahlungen $(-5, 5)$ und $(5, -5)$. Ein gemischtes Gleichgewicht existiert ebenfalls (siehe Übungsaufgabe 4).

Es ist offensichtlich, dass es für jeden Spieler im Zweifelsfall immer noch besser ist auszuweichen als Gas zu geben. Zugleich ist es aber auch besser Gas zu geben, wenn man Anlass zu der Annahme hat, dass der andere ausweicht. Daraus entstehen zwei Probleme. Das erste Problem für beide Spieler besteht darin überhaupt die Strategiekombination zu vermeiden, die zu dem Ergebnis $(-100, -100)$ führt. Das zweite Problem besteht für jeden Spieler darin, das für ihn vorteilhaftere der beiden Gleichgewichte herbei zu führen. Anders als bei einem Koordinationsspiel lassen sich diese Problem nicht einfach durch eine Absprache lösen. Denn auch wenn jeder der Spieler verspricht auszuweichen, so ist doch zu befürchten, dass es sein Versprechen bricht im Vertrauen darauf, dass der anderes seins halten wird. Bei einem Koordinationsspiel würde sich jeder Spieler schon aus Eigeninteresse an das gegebene Versprechen halten. Ein ähnliches Problem stellt sich aber auch,

nicht entscheiden kann, welchen er fressen soll, verhungert der Esel.

wenn ein Spieler, um den anderen zum Nachgeben zu bewegen (und damit das für ihn selbst günstigere Gleichgewicht herbei zu führen) schwört, dass er niemals nachgeben wird. Diese Drohung ist nicht glaubwürdig, sofern sie nicht mit irgendeiner Art von Selbstbindungsmechanismus verbeunden ist, die ihre Durchführung erzwingt, denn es entspricht ansonsten garnicht der Interessenlage des Spielers, die eigene Drohung wahrzumachen, sollte der Andere sie ignorieren.

Noch einmal Gefangenendilemma Als ein weiteres Beispiel für ein echtes Kooperationsproblem im Gegensatz zu einem bloßen Koordinationsproblem haben wir bereits in der letzen Woche das Gefangenendilemma kennen gelernt:

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	3, 3	0, 5
Defektieren	5, 0	1, 1

In allgemeinerer Form kann das (symmetrische) durch die vier Parameter T („Temptation"), R („Reward“), P („Punishment“) und S („Sucker's Payoff“) definiert werden:

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	R, R	S, T
Defektieren	T, S	P, P

Gefangenendilemma-Bedingung: $T > R > P > S$

Im Gefangenendilemma existiert genau ein Nash-Gleichgeweicht, nämlich die wechselseitige Defektion. Das Nash-Gleichgewicht ist aber nicht pareto-optimal, da beide Spieler besser gestellt wären, würden sie miteinander kooperieren. Das Gefangenendilemma beschreibt also eine Situation, in der individuelles nutzenmaximierendes Verhalten zu einem Zustand führt, bei dem alle am Ende schlechter gestellt sind. Gefangenendilemmasituationen treten typischerweise auf, wenn irgendwelche Ressourcen gemeinsam genutzt werden. Eine solche Resource ist, auch wenn der Ausdruck „Resource“ darauf nicht so recht passen mag, die öffentliche Ordnung und Sicherheit. Jedem leuchtet es ein, dass es am besten ist, wenn alle Menschen ehrlich sind, und niemand dem anderen etwas stiehlt. Aber am besten lebt es sich, wenn alle anderen Menschen ehrlich sind, nur man selbst sich erlauben kann, die anderen zu bestehlen. Aber wenn jeder so denkt, dann gibt es keine ehrlichen Menschen mehr. Das Problem der öffentlichen Sicherheit wird bekanntermaßen durch Sanktionsmechanismen in Form der Strafverfolgung gelöst. Ohne irgendeine Art von Sanktionsmechanismus lässt sich das einfache Gefangenendilemma nicht lösen. Wir werden aber gleich sehen, dass es sich „lösen“ lässt,[25] wenn man von einfachen zu wiederholten Spielen übergeht.

10.2 Wiederholte Spiele

10.2.1 Wiederholte Spiele am Beispiel des wiederholten Gefangenendilemmas

Im einfachen Gefangenendilemma ist, wenn man davon ausgeht, dass jeder Spieler sich egoistisch-rational verhält, keine kooperative Lösung möglich. Aber wie verhält es sich, wenn man das Spiel mehrfach wiederholt? Dann können die Spieler darauf reagieren, wie sich ihr Gegenüber in der letzten Runde verhalten hat. So kann ein Spieler die Kooperation in der folgenden Runde davon abhängig machen, ob der andere in der gegenwärtigen Runde kooperiert oder nicht. Inwiefern ändert das die strategische Situation? Angenommen, es wird ein wiederholtes Gefangenendilemma von fünf Runden gespielt, und einer der Spieler spielt die Strategie „Wie Du mir, so ich Dir“ (englisch: „Tit for Tat“), d.h. er kooperiert in der ersten Runde und kooperiert in den folgenden Runden immer dann, wenn der Gegenüber in der vorhergehenden Runde ebenfalls kooperiert hat. Welches Verhalten ist die beste Antwort auf „Wie Du mir, so ich Dir“, d.h. wie kann man gegen „Wie Du mir, so ich Dir“ die höchste Auszahlung erhalten? Spielt man – analog zum einfachen Gefangenendilemma – immer unkooperativ, dann erhält man mit den Auszahlungsparametern der oben angegebenen Spielmatrix die Auszahlungen:

Runde:	1	2	3	4	5	$\sum$
Auszahlung:	5	1	1	1	1	9

Hätte man dagegen immer kooperativ gespielt, dann wären die Auszahlungen höher ausgefallen:

Runde:	1	2	3	4	5	$\sum$
Auszahlung:	3	3	3	3	3	15

Daraus wird deutlich, dass im wiederholten Gefangenendilemma unbedingte Defektion keine dominante Strategie ist. Ist aber umgekehrt eine Strategie,

[25] Strenggenommen kann man hier nicht von einer Lösung sprechen, da man lediglich von der Diskussion eines Spiels (des einfachen Gefangenendilemmas) zu der eines anderen (des wiederholten Gefangenendilemmas) übergegangen ist. Allerdings könnten sich in der Wirklichkeit auftretende Gefangenendilemma-Situationen womöglich in der Tat dadurch lösen lassen, dass man die „Spielsituation“ in geeigneterweise abändert.

die gegen „Wie Du mir so ich Dir“ immer kooperiert eine beste Antwort auf „Wie Du mir, so ich Dir“. Sie ist es zumindest dann nicht, wenn man durch irgendeine Änderung der Zugfolge ein besseres Ergebnis gegen „Wie Du mir, so ich Dir“ erziehlen kann. Das ist aber in der Tat möglich, wenn man nur in der letzten Runde defektiert und bis dahin kooperiert. Dann ergibt sich:

Runde:	1	2	3	4	5	$\sum$
Auszahlung:	3	3	3	3	5	17

Es lohnt sich also immer, in der letzten Runde zu defektieren. Und dies gilt sogar nicht nur gegen die Strategie „Wie Du mir, so ich Dir“, sondern gegen schlechthin jede Strategie, denn auch gegen eine Strategie, die ihrerseits in der letzten Runde defektiert, ist es besser in der letzten Runde zu defektieren (und eine Auszahlung von 1 zu bekommen) als zu kooperieren (und eine Auszahlung von 0) zu erhalten. Das ist auch keineswegs verwunderlich, denn für sich betrachtet, stellt die letzte Runde ein einfaches Gefangenendilemma dar, und im einfachen Gefangenendilemma ist Defektion, wie wir gesehen haben, die dominante Strategie. Daraus ergibt sich aber eine wichtige Schlussfolgerung: Wenn in der letzten Runde Defektion die dominante Strategie ist, dann müssten beide Spieler, sofern sie sich strikt nutzenmaximierend verhalten, in der letzten Runde stets defektieren. Wenn sie aber in der letzten Runde stets defektieren, dann hat der Zug, den man in der vorletzten Runde spielt, keinen Einfluss mehr darauf, wie der Gegner in der letzten Runde antwortet (sofern der Gegner sich, wie gesagt, strikt nutzenmaximierend verhält). Mit anderen Worten man braucht in der vorletzten Runde keine Belohnung für Kooperation durch den Gegner in der folgenden Runde mehr zu erhoffen, man muss aber auch die Bestrafung für Defektion nicht mehr fürchten, da sie ohnehin eintritt. Dann befinden wir uns aber auch in der vorletzten Runde in genau derselben Situation wie in der letzten Runde, indem wir auf die zukünftige Reaktion des Gegners keine Rücksicht nehmen müssen. Dann ist es aber das beste, auch in der vorletzten Runde schon zu defektieren. Nun wiederholt sich dieselbe Überlegung auch für die vorvorletzte Runde. Auch in der vorvorletzten Runde sollte man also – wechselseitige strikte Rationalität vorausgesetzt! – defektieren usw., so dass schließlich jeder Spieler schon ab der ersten Runde defektieren müsste. Diese Art von Argumention bei wiederholten Spielen, bei der man von der letzten Runde rückwärts auf die vorletzte schließt, und von der vorletzten auf die vorvorletzte bis man schließlich bei der ersten Runde angekommen ist, bezeichnet man auch als *Rückwärtsinduktion.*

Die Rückwärtsinduktion zeigt uns also, dass strikt-rationale Spieler auch im wiederholten Gefangenendilemma schon ab der ersten Runde defektieren werden, sofern der Gegenüber sich ebenfalls strikt rational verhält und sofern beiden bekannt ist, dass sie sich beide strikt rational verhalten. Diese Bedingungen sind keine unwesentlichen Einschränkungen: Anders als im einfachen Gefangenendilemma ist ausschließliche Defektion keine dominante Strategie – dann wäre sie die beste Strategie, egal ob der Gegner sich rational verhält oder nicht, und unabhäbgig davon, was über das Verhalten des Gegners bekannt ist – sondern lediglich eine Gleichgewichtsstrategie. Gibt es auch nur geringen Anlass daran zu zweifeln, dass der Gegenspieler sich strikt rational verhält (z.B. indem er auch in der letzten Runde Kooperation noch belohnt), dann greift das auf die Rückwärtsinduktion gestützte Argument schon nicht mehr.

Zudem setzt das Argument voraus, dass die Rundenzahl bekannt ist. Ist die Rundenzahl unbekannt (z.B. wenn das Spiel nicht durch die Anzahl der Wiederholungen, sondern durch eine Abbruchwahrscheinlichkeit nach jeder Runde begrenzt wird), so lässt sich die Argumentation ebenfalls nicht anwenden. Damit gilt aber insgesamt, dass es im wiederholten Gefangenendilemma nur im Ausnahmefall rational ist, von der ersten Runde an ausschließlich zu defektieren, nämlich dann, wenn entweder die Rundenzahl endlich und bekannt ist *und* der Gegenspieler sich strikt rational verhält *und* überdies auch seinerseits von der strikten Rationalität seines Gegenübers ausgeht, oder wenn die Gegenerstrategie zufällig eine solche ist, gegen die ausnahmslose Defektion die beste Antwort darstellt.

10.2.2 Das „Volkstheorem" („folk theorem")

Wenn ausnahmslose Defektion im wiederholten Gefangenendilemma in aller Regel nicht die beste Strategie ist, welches ist aber dann die beste Strategie? Die Antwort lautet: Es gibt keine beste Strategie. Wie gut eine Strategie abschneidet, hängt immer davon ab, auf welchen Gegner sie trifft. Dass es keine beste Strategie gibt, lässt sich sehr leicht beweisen, indem man zeigt, dass es zwei Strategien gibt, zu denen die besten Antwort-Strategien jeweils verschieden sind. Diese beiden Strategien sind die Strategien „Falke" und „Unerbittlich". Die Strategie „Falke" defektiert ausnahmslos in allen Runden. (Das Gegenstück dazu ist übrigens die Strategie „Taube", die ausnahmslos kooperiert.) Die Strategie „Unerbittlich" kooperiert solange, bis der Gegner ein einziges mal defektiert. Wenn das geschieht, dann defektiert sie ab der folgenden Runde ausnahmslos für den gesamten Rest des Spiels.

Nun kann man sich überlegen, dass die beste Antwort auf die Strategie „Falke" nur eine Strategie sein kann, die gegen „Falke" ab der ersten Runde ausnahmslos defektiert. Das bedeutet nicht, dass sie auch gegen andere Strategien ausnahmslos defektieren muss. (Sie könnte, z.B. wenn die Gegnerstrategie ein Kooperationsangebot macht, ihrerseits auf Kooperation umschwenken.) Aber zumindest in der ersten Runde muss sie unbedingt defektieren, sonst würde sie in der ersten Runde gegen „Falke“ Punkte verschwenden, womit sie keine beste Antwort auf „Falke“ mehr wäre.

Gegen „Unerbittlich“ kann diese Strategie dann aber keine beste Antwort mehr sein. Den jede beste Antwort auf „Unerbittlich“ muss gegen „Unerbittlich“ ab der ersten Runde kooperieren. Damit ist gezeigt, dass es im wiederholten Gefangenendilemma keine stark oder schwach dominante Strategie gibt.

Wie sieht es aber mit Gleichgewichtsstrategien aus? Davon gibt es einem bekannten Theorem der Spieltheorie zufolge unüberschaubar viele. Das Theorem, um das es sich handelt, ist das sogennante Volkstheorem (englisch: „folk theorem“; „folk“, weil kein Erfinder des Theorems bekannt und es damit gewissermaßen Allgemeingut ist). Das Folk-Theorem sagt nun nicht unmittelbar etwas darüber aus, welche Strategien in wiederholten Spielen Gleichgewichtsstrategien sind, und welche nicht, aber es sagt etwas über die möglichen Durchschnittsauszahlungen von Gleichgewichten in wiederholten Spielen aus. In (vereinfachter Form) lautet das Folk-Theorem so:

> *Volkstheorem*: In (unendlich oft) wiederholten Spielen ist jedes Resultat erzielbar, das den Spielern mindestens ihren *Maximin-Wert* bietet.
>
> Dass ein Resultat „erzielbar“ ist heisst dabei, dass es ein Gleichgewicht gibt, bei dem das entsprechende Resultat heraus kommt. Unter dem „Resultat“ sind dabei die Durchschnittsauszahlungen zu verstehen, die die Spieler über das gesamte wiederholte Spiel erhalten. Der Maximin-Wert ist derjenige Wert, den ein Spieler erhält, wenn er „auf Nummer sicher“ geht und so spielt, das er seinen Verlust minimiert. (Vgl. dazu die Maximin-Regel bei Entscheidungen unter Unwissenheit, S. 32.) Im (wiederholten) Gefangenendilemma kann ein Spieler dadurch, dass er defektiert, sicherstellen, dass er mindestens die Auszahlung für wechselseitige Defektion erhält. (Mit unseren Zahlen also einen Nutzenwert von 1.)

Der *Beweis* der Volkstheorems lässt sich für den Sonderfall des wiederholten 2-Personen Gefangenendilemmas etwa so führen: Wenn jedem Spieler der Maximin-Wert garantiert werden soll, dann kann das Gleichgewichts-Resultat für jeden der Spieler nur Werte von P bis R haben. Andernfalls (bei Werten kleiner P) oder (bei Werten größer R) müsste einer der Spieler freiwillig auf den Minimax-Wert verzichten, obwohl er diesen Wert notfalls immer durch Defektion erzwingen könnte. Sei X nun irgendein Wert für den gilt: $P \leq X \leq S$. Dann gibt es eine Zugfolge, die jedem Spieler die Auszahlung X liefert. (Beispiel: Angenommen $P = 1$ und $S = 3$ und $X = 2\frac{1}{3}$, dann liefert die Zugfolge $Kooperation, Kooperation, Defektion$ wenn sie von beiden Spielern gespielt wird, jedem Spieler genau die Auszahlung $X = 2\frac{1}{3}$.) Dann lässt sich diese Zugfolge aber durch eine spezielle Variante der Strategie „Unerbittlich“ erzwingen, die selbst diese Zugfolge spielt und genau dann für den Rest des Spiels auf Bestrafung umschaltet, wenn der Gegenüber von dieser Zugfolge ein einziges Mal abweicht. Wenn wir diese Variante „Unerbittlich*“ nennen, dann bildet das Strategiepaar (Unerbittlich*, Unerbittlich*) ein Gleichgewicht, denn keiner der beiden Spieler kann von seiner Gleichgewichtsstrategie abweichen, ohne mit einer schlechteren Durchschnittsauszahlung rechnen zu müssen.

10.3 Evolutionäre Spieltheorie

10.3.1 Evolutionäre Spieltheorie am Beispiel des wiederholten Gefangenendilemmas

Das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas war für lange Zeit eines der populärsten Modelle der evolutionären Spieltheorie. Besonders duch den auf Computersimulationen gestützten Ansatz von Robert Axelrod [1] ist es weithin bekannt geworden. Leider hat die Popularität dieses Modells zu einer maßlosen Überschätzung seiner Leistungsfähigkeit geführt. Einer unüberschaubaren Fülle von reinen Modell- und Simulationsstudien steht ein mehr als auffälliger Mangel an empirischen Anwendungen gegenüber. Da das Modell aber ebenso anschaulich wie leicht verständlich ist, werden wir es hier dennoch zur Einführung in einige der Grundgedanken der evolutionären Spieltheorie heranziehen. Auf die Probleme werden wir danach kurz eingehen.

Wie wir gesehen haben, existiert im wiederholten Gefangenendilemma keine dominante Strategie und es gibt eine Vielzahl von Gleichgewichtsstrategien. Können wir trotzdem irgendwelche Strategien als gute oder in irgendeinem anderen Sinne als dem der Dominanz als „beste“ Strategien auszeichnen. Der (aus heutiger Sicht naive) Ansatz, den Axelrod verfolgt hat [1], bestand darin, einfach eine größere Menge von unterschiedlichen Strategien in einer Art Turnier gegeneinander antreten zu lassen. Jede Strategie spielt gegen jede andere ein paarweise Gefangenendilemma durch. „Gewonnen“ hat am Ende die Strategie, die die höchste Durchschnittspunktzahl über alle Begegnungen erzielt hat. (Wohlbemerkt: Es kommt bei diesem Turnier auf die Durchschnittspunktzahl und nicht auf die Anzahl gewonnenen Begegnunen bzw. der besiegten Gegner an, ganz wie es dem ökonomischen Menschbild des „neidlosen Egoisten“ entspricht.) Da man die Strategien im wiederholten Gefangenendilemma sehr leicht programmieren kann, führt man entsprechende Turniere am besten mit dem Computer durch.[26]

Um das Prinzip zu verdeutlichen, wird an dieser Stelle nur ein sehr einfaches Turnier mit einer sehr kleinen Stratgiemenge von 7 Strategien besprochen. Diese ausgewählten Strategien sind:

- *Grim* („Unerbittlich"): Kooperiere in der ersten Runde; setze in den folgenden Runden die Kooperation fort, solange der Gegner kooperiert; Defektiere bis zum Ende der Begegnung, wenn der Gegner ein einziges Mal defektiert hat.

- *TitForTat* („Wie Du mir, so ich Dir"): Kooperiere in der ersten Runde; Wenn der Gegner in der letzten Runde kooperiert hat, kooperiere auch, sonst defektiere.

- *Pavlov*: Defektiere in der ersten Runde. Schalte die Taktik von Defektion auf Kooperation oder von Kooperation auf Defektion um, sofern der Gegner in der letzten Runde defektiert (d.h. „bestraft") hat. Sonst behalte die bisherige Taktik bei, d.h. spiele so wie in der letzten Runde.

- *Tester*: Defektiere in den ersten beiden Runden. Reagiert der Gegner mit Defektion (also mit einer „Bestrafung"), dann kooperiere zweimal in Folge (als „Wiedergutmachung") und spiele für den Rest des Spiels „Wie Du mir, so ich Dir". Hat der Gegner die Defektionen in den ersten beiden Runden nicht bestraft, dann spiele für den Rest des Spiels abwechselnd Defektionszüge (zur „Ausbeutung") und Kooperationszüge.

- *Hawk* („Falke"): Defektiere immer.

- *Dove* („Taube"): Kooperiere immer.

- *Random* („Zufall"): Kooperiere oder Defektiere völlig zufällig.

Ein „Turnier" dieser Strategien liefert für die Auszahlungsparameter $T = 5, R = 3, P = 1, S = 0$ (siehe Seite 165) folgendes Ergebnis:

Rang	Stratgie	Durchschnittspunkte
1.	TitForTat:	2.4631
2.	Grim:	2.4270
3.	Tester:	2.3565
4.	Pavlov:	2.2185
5.	Hawk:	2.1486
6.	Random:	1.9992
7.	Dove:	1.7121

[26] Wen es interessiert, der kann sich die Software dafür von dieser Web-Seite herunterladen: http://www.eckhartarnold.de/apppages/coopsim.html

In diesem Fall hat also *TitForTat* das Turnier gewonnen. Die Durchschnittspunktzahl von $2,46$ liegt zwar deutlich unter der Auszahlung für wechselseitige Kooperation von 3 Punkten, aber das ist nicht verwunderlich, da man gegen eine Strategie wie *Hawk*, die immer defektiert, bestenfalls eine Durchschnittspunktzahl von 1 erzielen kann. Auffällig ist, dass in diesem Beispiel bösartige Strategien wie *Tester*, die versuchen naive Strategien wie *Dove* auszubeuten, nicht die erfolgreichsten sind. Aber das ist erklärlich, wenn auch Strategien wie *Grim* im Rennen sind, die von „bösartigen“ Strategien wie *Tester* keine Friedensangebote akzeptieren. So erzielt *Tester* gegen *Grim* nur eine Durchschnittspunktzahl von knapp 1 (was der Auszahlung für wechselseitige Defektion entspricht), während *TitForTat* und *Grim* kooperieren, so dass *TitForTat* gegen *Grim* satte 3 Punkte erhält. Es ist zu betonen, dass das Ergebnis sehr stark von der Ausgansstrategiemenge und von den gewählten Auszahlungsparametern abhängt. Wandelt man das eine oder andere ab, dann kann eine ganz andere Strategie die beste sein. Grundsätzlich sollte man keine voreiligen und verallgemeinernden Schlussfolgerungen aus Computersimulationen mit willkürlich festgesetzten Ausgangsbedingungen und Parameterwerten ziehen.

Bis hierher hat das Computerturnier nur etwas mit wiederholten Spielen, aber noch nichts mit Evolution zu tun. Zu einem evolutionären Modell wird das Computerturnier, wenn man die Durchschnittsauszahlungen als *Fitnesswerte* interpretiert. Man stellt sich dazu vor, dass wir es mit einer großen Population von Spielern und einer kleinen Menge von Spielertypen zu tun haben. Der Typ eines Spielers ist die Strategie, die er spielt. Um es noch ein wenig anschaulicher zu machen, können wir uns auch eine Population von Tieren vorstellen, die in Gemeinschaft leben, etwa einen Vogelschwarm. Bei der Nahrungssuche unterstützen die Vögel einander, aber es gibt genetisch bedingte Unterschiede. Einige Tiere sind extrem sozial, d.h. sie unterstützen jeden Artgenossen (Strategie: *Dove*), andere machen die Unterstützung eines Artgenossen davon abhängig, ob sie erwiedert wird (*TitForTat*), wieder andere verhalten sich völlig egoistisch (*Hawk*). Der Erfolg bei der Nahrungssuche hängt nun davon ab, wie leistungsfähig jede der Strategien ist. Zugleich kann man davon ausgehen, dass sich der Erfolg bei der Nahrungssuche in Fortpflanzungserfolg umsetzt. Das bedeutet aber wiederum, dass eine erfolgreiche Strategie in der folgenden Generation häufiger auftritt und eine weniger erfolgreiche seltener, sie könnte irgendwann sogar ganz aussterben.

Um nun diese Überlegungen in das Modell zu übertragen, gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass in der ersten Generation auf jede Strategie auf ein gleich großer Anteil der Spielpopulation entfällt. Für die nächste Generation wird der Populationsanteil dann allerdings mit dem Fitnesswert mutlipliziert. Der Fitnesswert entspricht nach der ersten Generation noch genau den Durchschnittsauszahlungen, die auf die (gleichverteilten) Strategien entfallen. In den folgenden Generationen darf man jedoch nicht mehr einfach den Durchschnitt bilden, sondern muss für jede Strategie das mit dem Bevölkerungsanteil der Gegnerstrategien gewichtete Mittel der Ergebnisse der einzelnen Begegnungen berechnen. Das ist durchaus einleuchtend, wenn man sich vor Augen hält, dass der Erfolg einer Strategie wie *Tester* umso größer ist, je mehr *Dove*-Spieler in der Population vorkommen, und dass er geringer wird, wenn der Populationsanteil von *Dove*-Spielern absinkt. Im Laufe von mehreren Generationen ändern sich also sowohl die Populationsanteile der Strategien als auch die Fitnesswerte der Strategien (weil sie von den Populationsanteilen abhängen). Mathematisch werden diese Zusammenhänge folgendermaßen ausgedrückt:

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} P_k \tag{10.1}$$

F_i	Fitness der i-ten Strategie
S_{ik}	Auszahlung für die i-te Strategie gegen die k-te Strategie
P_k	Bevölkerungsanteil der k-ten Strategie
n	Anzahl der vorkommenden Strategien
i, k	Indizes einzelner Strategien ($0 \leq i, k \leq n$)

Anstatt mit der absoluten Zahl von Individuen zu rechnen, die eine Strategie angenommen haben, wobei man die Größe der Population willkürlich festlegen müsste, rechnet man der Einfachheit halber immer mit relativen Bevölkerungsanteilen einer gedachten unendlich großen Bevölkerung. (Die Bevölkerungsanteile müssen sich dabei immer zu 1 aufsummieren, weshalb man sie nach jeder Generation renormieren muss.) Neben der Formel, nach der die Fitness berechnet wird, ist noch eine Formel notwendig, um die Bevölkerungsanteile, die in der Folgegeneration auf jede Strategie entfallen, zu berechnen:

$$P_i^{g+1} = \frac{P_i^g F_i^g}{\sum_{k=1}^{n} P_k^g F_k^g} \tag{10.2}$$

P_i^g	Populationsanteil der i-ten Strategie in der g-ten Generation
F_i^g	Fitness der i-ten Strategie in der Generation Nummer g
g	die Nummer der gegenwärtigen Generation
n	Anzahl der vorkommenden Strategien
i, k	Indizes einzelner Strategien ($0 \leq i, k \leq n$)

Die Formel sieht sehr viel hässlicher aus, als sie ist. Alles Wichtige steht im Zähler des Bruchs. Der Nenner dient lediglich der Renormierung. (Wir teilen einfach den nicht normierten Bevölkerungsanteil jeder Strategie durch die Summe aller nicht normierten Bevölkerungsanteile.)

Übt die evolutionäre Entwicklung einen Einfluss darauf aus, welche Strategien erfolgreich sind? Dazu betrachten wir die Rangfolge nach 50 Generationen:

Rang	Stratgie	Bevölkerungsanteil	Durchschnittspunkte
1.	TitForTat	0.7745	3.0000
2.	Grim	0.1922	2.9984
3.	Dove	0.0325	2.9988
4.	Tester	0.0008	2.6461
5.	Random	0.0000	1.9727
6.	Pavlov	0.0000	1.8125
7.	Hawk	0.0000	1.1338

Die Strategie *TitForTat* steht nach wie vor an der Spitze, aber die Strategie *Tester* ist vom dritten auf den vierten Platz abgesackt und *Hawk* befindet sich nunmehr ganz am Ende der Tabelle. Die evolutionäre Entwicklung lässt sich sehr anschaulich in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen, wenn man auf der X-Achse die Generation und auf der Y-Achse die Bevölkerungsanteile für jede Strategie einträgt, wie auf der Abbildung 1 auf Seite 175 zu sehen ist. Ganz grob kann man die Entwicklung folgendermaßen charakterisieren. Durch Präsenz ausbeuterischer Strategien (*Tester*, *Hawk* und m.E. auch *Pavlov* und *Random*) sacken die rein kooperativen Straegien (in dieser Simulation nur *Dove*) am Anfang stark ab. Dadurch verlieren aber die ausbeuterischen Strategien auf längere Sicht gesehen ihre Basis, so dass sich die reziproken Strategien durchsetzen. Ein hoher Anteil reziproker Strategien (d.h. Strategien, die Wohlverhalten belohnen und Fehlverhalten bestrafen wie *TitForTat* und besonders *Grim*) bewirkt schließlich, dass erstens die ausbeuterischen Strategien sich nicht wieder erholen und zweitens ein gewisser Anteil rein kooperativer Strategien „im Windschatten“ der reziproken Strategien überleben kann.

Es ist durchaus charakteristisch, dass evolutionäre Entwicklung am Ende mit einem Mix von Strategien zum Stillstand kommt. *TitForTat*, *Dove* und *Grim* kooperieren immer miteinander, so dass die Unterschiede zwischen diesen Strategien unter Abwesenheit anderer Strategien gar nicht zum tragen kommen und keine Verschiebungen in der Bevölkerungsverteilung mehr bewirken können. Man kann die Situation auch so interpretieren, dass sich am Ende eine gemischte Strategie durchgesetzt hat, die zu ca. 77,5% *TitForTat*, 19,2% *Grim* zu und zu 3,3% *Dove* spielt. Übrigens ist das auch eine übliche Interpretation gemischter Strategien im evolutionären Zusammenhang: Eine gemischte Strategie kann man auch als eine gemischte Population

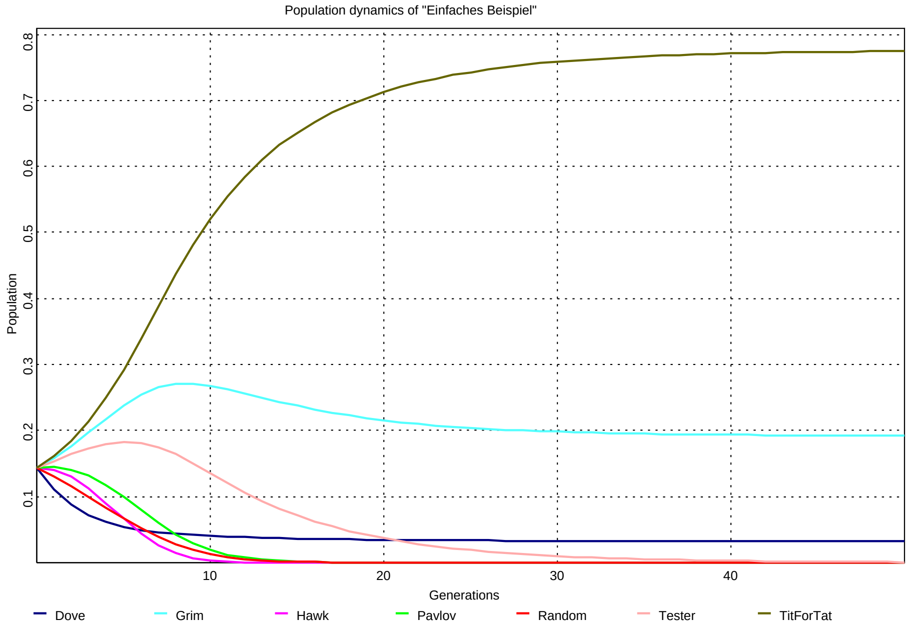


Abbildung 1: Beispiel einer evolutionären Simulation des wiederholten Gefangenendilemmas

reiner Strategien auffassen.

Bei evolutionären Computersimulationen stellt sich in besonderer Schärfe das Problem der *Modellkontingenz* (d.h. die Ergebnisse sind abhägig von der Ausgangssituation und den Modellparametern und damit kaum verallgemeinerbar).[27] Bloß auf Grund von Simulationsläufen, seien dies nun einzelne oder eine große Zahl von Simulationsläufen, lässt sich bestenfalls ein subjektiver Eindruck davon gewinnen, welche Strategien vorteilhaft sind und welche nicht.

Aussichtsreicher, da weniger kontingenzbehaftet, erscheint der Versuch einer mathematischen Charakterisierung vorteilhafter Strategien. Ähnlich wie in der gewöhnlichen Spieltheorie der Begriff des Nash-Gleichgewichts entwickelt wurde, um bestimmte Strategien bzw. Strategiekombinationen

[27]Axelrod glaubte aufgrund der detaillierten Analyse mehrfacher Simulationsläufe die Strategie *TitForTat* als eine besonders vorteilhafte Strategie auszeichnen zu können [1, S. 25ff, S. 29ff.]. Ken Binmore argumentiert jedoch überzeugend dagegen und zeigt, dass die vermeintliche Überlegenheit von *TitForTat* als theoretischer Befund nicht haltbar ist [3, S. 313]. (Empirisch bestätigt ist sie ohnehin nicht, siehe unten, Kapitel 10.3.2). Angesichts der außergewöhnlichen Popularität von Axelrods Ansatz spricht Binmore daher durchaus treffend von der „Tit for Tat Bubble“ [2, S. 194].

auszuzeichnen, gibt es auch in der evolutionären Spieltheorie diverse Gleichgewichtsbegriffe, durch die evolutionäre Strategien charakterisiert werden können. Der wichtigste davon ist der Begriff des „evolutionären Gleichgewichts“ bzw. der *evolutionär stabilen Strategien* (ESS). Als „evolutionär stabil“ charakterisiert man Strategien, die, wenn sie sich einmal in einer Population durchgesetzt haben, vor dem Eindringen von mutierten Strategien geschützt sind. Zur Charakterisierung von Strategien im wiederholten Gefangenendilemma-Spiel bietet sich allerdings eher der etwas schwächere Begriff der kollektiven Stabilität an. Im folgenden wird daher vorwiegend von kollektiver Stabilität die Rede sein.

Eine Strategie A gilt als „kollektiv stabil“ wenn kein einzelnes Individuum einer anderen Strategie B in eine Population, die nur aus Individuen der der Strategie A gebildet wird „eindringen“ kann. Eindringen kann B genau dann, wenn die Auszahlung, die B der Begegnung mit A erhält (formal: $V(B/A)$, wobei das V für „value“ steht, also den Wert des Spiels für Spieler B wiedergibt) größer ist, als die Auszahlung, die A gegen sich selbst erhält ($V(A/A)$), kurz „Eindringen“ wird durch die Ungleichung beschrieben:

$$V(B/A) > V(A/A)$$

Wenn diese Ungleichung erfüllt ist, dann wird ein einzelner B-Spieler nämlich eine höhere Durchschnittsauszahlung erhalten als die A-Spieler und sich damit stärker vermehren, so dass sich die B-Spieler schließlich in der A-Population ausbreiten.

Kollektiv stabil ist eine Strategie A nun genau dann, wenn keine andere Strategie B exiistiert, die in A eindringen kann, d.h. wenn

$$\forall_B \qquad V(B/A) \leq V(A/A)$$

Man kann nun leicht zeigen, dass die Strategie *TitForTat* kollektiv stabil ist, denn *TitForTat* erhält gegen sich selbst als Durchschnittspunktzahl den Kooperationsgewinn von 3 (bzw. R). Keine Strategie, die gegen *TitForTat* ausschließlich kooperiert, kann mehr als 3 (bzw. R) Punkte erhalten. Damit können aber höchstens noch solche Strategien in eine Population von *TitForTat*-Spielern eindringen, die gegen *TitForTat* nicht immer kooperieren. Wenn eine Strategie aber in irgendeiner Runde gegen *TitForTat* nicht kooperiert, dann wird sie in den folgenden Runden von *TitForTat* solange bestraft, bis sie eine Bestrafung „hinnimmt“, d.h. bis sie in einer der Runden, in der *TitForTat* bestraft, ihrerseits nicht defektiert. Dann erhält sie von der Runde, in der sie ausbeutet, zusammen genommen mit der Runde, in der sie die Bestrafung hinnimmt, eine Durchschnittsauszahlung von 5+0 (bzw. $T+S$), was kleiner als 3 (bzw. R) ist. (Gibt es dazwischen Runden wechselseitiger Defektion, so ist die Durchschnittsauszahlung von 1 (bzw. P) ohnehin kleiner als 3 (bzw. R).) Damit sinkt aber der Gesamtdurchschnitt $V(Eindringling/TFT)$ unter die Kooperationsauszahlung von R. Wegen $V(TFT/TFT) = R$ gilt also $V(Eindringling/TFT) < V(TFT/TFT)$. Mit anderen Worten eine Strategie, die gegen *TitForTat* irgendwann einmal nicht kooperiert, kann erst recht nicht in eine Population von *TitForTat*-Spielern eindringen. (Dieser Beweis gilt, so wie er geführt wurde, zunächst einmal für ein idealisiertes unendlich oft wiederholtes Gefangenendilemma. Man kann ihn aber auch leicht auf unbestimmt oft wiederholte endliche Spiele übertragen, sofern die Wahrscheinlichkeit, mit der nach jeder Runde das Spiel abgebrochen wird, klein genug (bezogen auf die Auszahlungsparameter in ihrem Verhältnis zueinander) gewählt wird, so dass – grob gesagt – die Chance, dass die Runde, in der defektiert wird, die letzte ist, nicht den zu erwartenden Schaden ausgleicht, falls sie es doch nicht ist.)

Aber ebenso ist auch die Strategie *Hawk* kollektiv stabil, denn jede andere Strategie kann gegen *Hawk* höchstens eine Durschnittspunktzahl von 1 (bzw. P) erzielen, was aber nicht mehr ist als *Hawk* gegen sich selbst erzielt. Wenn *Hawk* und *TitForTat* beide gleichermaßen kollektiv stabil sind, kann man dann noch eine dieser beiden Strategien bezüglich der ihrer Stabilität vor der anderen auszeichnen? Man kann: Bei der kollektiven Stabilität wird nur gefragt, ob ein einzelner Eindringling sich in einer Fremdpopulation ausbreiten kann. Aber wie verhält es sich, wenn eine kleine Gruppe von Eindringligen versucht, in eine Fremdpopulation einzudringen? Angenommen eine kleine Gruppe von *TitForTat*-Spielern versucht in eine Gruppe von *Hawk*-Spielern einzudringen. Dann ist $V(TFT/Hawk)$ geringfügig kleiner als $V(Hawk/Hawk)$, da TFT in der ersten Runde einen Kooperationsversuch wagt. Andererseits erhalten die TFT-Spieler untereinander die Kooperationsauszahlung R, die erheblich größer ist als die Defektionsauszahlung P, die die *Hawk*-Spieler untereinander erhalten ($V(TFT/TFT) \gg V(Hawk/Hawk)$). Dementsprechend könnte schon eine Minderheit von TFT Spielern eine höhere Durchschnittsauszahlung erhalten als die Mehrheitspopulation der *Hawk*-Spieler. Umgekehrt ist das nicht der Fall. Das bedeutet aber, dass eine Population von *Hawk*-Spielern nur relativ schwach gegen das Eindringen durch eine Gruppe von *TitForTat*-Spielern geschützt ist.[28]. Dominieren die *TitForTat*-Spieler aber erst einmal die Population, so hat umgekehrt eine Gruppe von *Hawk*-Spielern kaum eine Chance in die Population einzudringen. Es besteht also eine Asymmetrie zwischen reziproken und bösartigen Strategien, die sich zugunsten der

[28]Wieviele TFT-Spieler notwendig sind, um in eine Population von *Hawk*-Spielern einzudringen, hängt von der relativen Größe der Auszahlungsparameter und der durchschnittlichen Spiellänge ab.

reziproken Strategien auswirkt.

Der Begriff der kollektiven Stabilität hat die Schwäche, dass kollektiv stabile Strategien nicht unbedingt gegen das Eindringen von Mutationen geschützt sind, die gegen die Vertreter der Stammpopulation genauso gut abschneiden wie diese gegen sich selbst. Damit schließt die kollektive Stabilität einer Strategie z.B. nicht aus, dass ihre Population gegen die Ausbreitung degenerierender Mutationen geschützt ist. So könnte sich innerhalb einer Population von *TitForTat*-Spielern die Strategie *Dove* ungehindert ausbreiten, da keinerlei „Erhaltungsselektion" statt findet, durch die die „schwächeren" *Dove*-Spieler in einem Millieu von *TitForTat*-Spielern an der Ausbreitung gehindert würden. Aus diesem Grund ist insbesondere in der Biologie ein vergleichsweise stärkeres Konzept als das der kollektiven Stabilität üblich, nämlich des der *evolutionären Stabilität*.

> *Evolutionäre Stabilität*: Eine Strategie A ist evolutionär stabil, wenn für jede beliebige Strategie B gilt, dass entweder
>
> $$V(A/A) > V(B/A)$$
>
> oder
>
> $$V(A/A) = V(B/A) \qquad \wedge \qquad V(A/B) > V(B/B)$$

Für die Analyse des wiederholten Gefangenendilemma-Spiels erscheint dieser vergleichsweise stärkere Begriff jedoch nicht unbedingt geeignet, weil es dann äußerst schwierig wird, überhaupt noch eine Strategie zu konsturieren, die evolutionär stabil ist. Eine reziproke Strategie könnte gegenüber von *Dove*-Mutanten nur noch dann evolutionär stabil sein, wenn sie einen Mechanismus enthält, der die Abwesenheit des eigenen Bestrafungsmechanismus sanktioniert (wodzu dieser Mechanismus durch zufällige Defektion aber erst einmal ausgelöst werden muss). Aber nicht nur ausbleibende Bestrafungen müssten sanktioniert werden, sondern auch ausbleibende Bestrafungen von ausbleibenden Bestrafungen usf. Ob eine solche Stratgie wenigstens theoretisch denkbar ist, sei hier einmal dahin gestellt.

10.3.2 Die empirische Unanwendbarkeit spieltheoretischer Evolutionsmodelle

Das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas war lange Zeit (und ist möglicherweise immer noch) eines der beliebtesten Modelle der evolutionären Spieltheorie. Es sind Unmengen von Simulationstudien publiziert worden, die in der ein- oder anderen Form das wiederholte Gefangenendilemma durchspielen [16]. Wie steht es aber um die empirische Anwendung dieser Modelle? Sucht man nach erfolgreichen Anwendungsbeispielen auch nur irgendeiner dieser Simulationsstudien, so stellt man schnell fest, dass sie praktisch nicht existieren. Etwas mehr als 10 Jahre nach der Publikation von Axelrod's Buch [1] finden wir in der breit angelegten Meta-Studie eines Biologen [8], der den spieltheoretischen Ansatz sehr entschieden favorisiert, kein einziges greifbares Beispiel, das man ernsthaft als Bestätigung des Modells im empirischen Zusammenhang betrachten kann. Vor diesem Hintergrund muss es verwundern, wenn ein anderer Autor wiederum einige Jahre später in einem Forschungsbericht behauptet, dass es reichlich empirische Anwendungen des wiederholten Gefangenendilemmamodels in der Biologie gäbe [16]. Der einzige Beleg, den er dafür anführt, ist eine Experimentalstudie aus den 80er Jahren [18], wobei ihm entgeht, dass diese Studie der darauf folgenden wisenschaftlichen Diskussion nicht standgehalten hat. So entstehen Legenden in der Wissenschaft...

Wie kann es aber sein, dass es für ein Modell wie das des wiederholten Gefangenendilemmas, das in der Theorie so einleuchtend erscheint, kaum empirische Anwendungsbeispiele gibt. Um das zu verstehen muss man zwei unterschiedliche Niveaus der Anwendung von Modellen auf empirische Phänome unterscheiden. Die erste Stufe ist die des bloß metaphorischen Vergleichs. Die zweite und wichtigere Stufe ist die einer Anwendung im vollen Sinne, die mit einem Erklärungsanspruch verbunden ist.

Metaphorische Vergleiche lassen sich immer sehr leicht anstellen, und es ist nicht schwer im täglichen Leben, in der Wirtschaft, der Politik oder in der Natur etc. Vorgänge zu finden, die dem Modell des wiederholten Gefangenendilemmas irgendwie (!) ähneln. Aber bloß weil man irgendwelche Ähnlichkeiten zwischen dem Modell und bestimmten empirischen Vorgängen feststellt, kann man noch nicht ernsthaft behaupten, dass das Modell diese Vorgänge erklärt, denn es ist ja sehr wohl möglich, dass die empirischen Vorgänge in der Wirklichkeit ganz andere Ursachen haben als die analogen Vorgänge im Modell.

Damit ein Modell tatsächlich als Erklärung eines Phänomens betrachtet werden kann, müssen weitere Voraussetzungen erfüllt werden. Zum Beispiel ist es erforderlich sämtliche Eingangs- und Ausgangsparameter des Modells empirisch zu messen. Nur wenn man alle Parameter messen kann und wenn die gemessenen Ausgangsparameter mit dem vom Modell aus den gemessenen Eingangsparametern errechneten Ergebnissen übereinsimmen, kann man behaupten, dass das Modell den in Frage stehenden Vorgang erklärt. Vor allem müssen die Parameter mindestens so genau gemessen werden können, dass das Modell innerhalb der Messungenauigkeiten einigermaßen stabile Ergebnisse liefert. Andernfalls wäre eine Übereinstimmung der gemessenen mit den errechneten Parametern nur zufällig.

Nun besteht bei vielen spieltheoretischen Modellen das Problem darin, dass sich die Auszahlungsparameter einfach nicht zuverlässig messen lassen. Ganz besonders gilt dies für das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas, denn dieses Modell reagiert sensitiv auf Schwankungen der Eingangsparameter, d.h. welche Strategie sich evolutionär durchsetzt hängt sehr wesentlich unter anderem davon ab, welche Auszahlungsparamter man wählt. Eines der beliebtesten Standardbeispiele für die vermeintliche Logik der „Evolution der Kooperation“, das Wechselseitige Entlausen von Schimpansen („Grooming“), kann dieses Problem sehr anschaulich vor Augen führen. Um ihr Fell von Ungeziefer zu befreien, pflegen Schimpansen sich gegenseitig zu helfen. Die Entlausungssitzungen finden in der Regel in Paaren statt, wobei sich die Schimpansen abwechseln. Das Erscheinungsbild der Entlausungssitzungen legt die Annahme nahe, dass es sich dabei um ein evolutionär bedingtes reziprokes (also *TitForTat*-artiges) Kooperationsverhalten handelt. Dieses möglicherweise vorhandene reziproke Kooperationsverhalten ist natürlich noch durch andere Faktoren des Soziallebens von Schimpansen überlagert, so z.B. durch die Dominanzhierarchie unter den Tieren. Aber selbst wenn wir davon einmal absehen, stellt sich für die Anwendung unseres wiederholten Gefangenendilemmamodels ein unüberwindbares Problem: Wie soll man die Auszahlungsparameter messen? Da wir die fitness-relevante Auszahlung dieser Verhaltensweise im Modell voraussetzen, müssten wir, um das Model empirisch überprüfen zu können, irgendwie messen können, welche Auswirkungen ein wohlentlaustes Fell auf die Reproduktionsrate hat, und wir müssten auf der anderen Seite auch die Kosten (wiederum hinsichtlich der Reproduktionsrate) beziffern, die einem Affen entstehen, der einem anderen das Fell entlaust. Die Forschungen, die es in dieser Hinsicht tatsächlich gibt, sind bisher weit davon entfernt, die für die Überprüfung des wiederholten Gefangenendilemma- oder eines ähnlichen Modells erforderlichen Daten zu liefern. Und es ist sehr fraglich, ob dieses Ziel jemals erreicht werden kann.

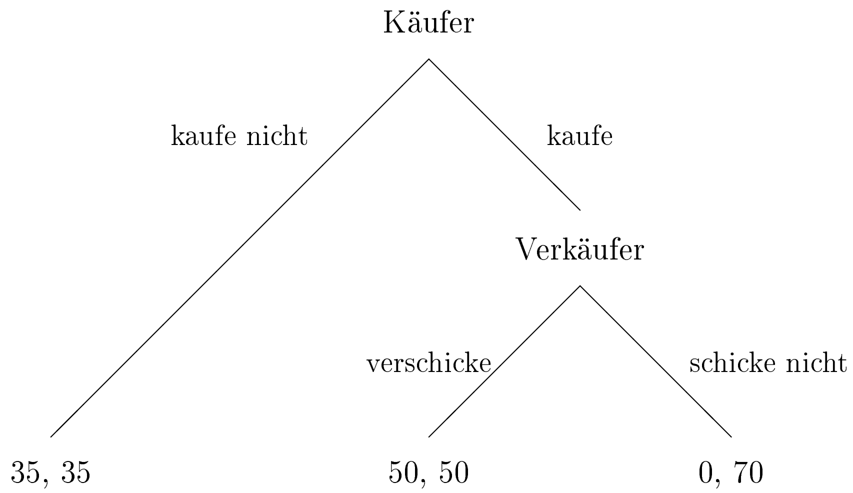
Nun könnte man sich auf den Standpunkt zurückziehen, dass auch eine metaphorische Verwendung des Modells immer noch eine Art von – allerdings sehr viel schwächerem – Erkenntnisgewinn darstellt. Das mag stimmen, nur ist ansichts des außerordentlich bescheidenen Erkenntnisziels eines bloßen metaphorischen Vergleichs der riesige Aufwand der für die Modellforschung getrieben wird, kaum noch vertretbar [13]. Insbesondere kann man nicht ernsthaft behaupten, dass durch die Untersuchung künstlich generierter Daten (von Computersimulationen) einen Beitrag zur Erforschung der Evolution von Kooperation geleistet werden kann, wenn man die Ergebnisse nicht auch einer empirischen Überprüfung unterzieht.

Aus heutiger Sich muss man das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas daher wohl vor allem als ein weiteres beschämendes Beispiel wirklichkeitsfremder Modellforschung und der Verselbstständigung einer technisierten Methodik betrachten, wie sie leider in der Konsequenz des szientistischen Paradigmas liegt, d.h. der naiven Überzeugung echte Wissenschaftlichkeit zeichne sich vor allem durch den Gebrauch mathematischer und technischer Methoden aus, und als sei nicht vielmehr die Wahl der Methode nach dem Erkenntnisgegenstand zu richten und ihr Einsatz dem empirischen Erkenntniszweck der Wissenschaft strikt unterzuordnen.

10.4 Ein Anwendungsbeispiel der Spieltheorie, das funktioniert: Vertrauen bei Internetauktionen

Um nun nicht derart pessimistisch zu schließen, soll zum Schluss wenigstens noch ein erforlgreicheres Beispiel der empirischen Anwendung spieltheoretischer Forschung vorgestellt werden, wenn es auch nicht gerade aus dem Bereich der evolutionären Spieltheorie stammt. Es handelt sich dabei um zwei Experimente, die im Rahmen einer umfangreicheren Studie über Vertrauen im Internethandel angesellt wurden [4], und die zeigen, wie man mit Hilfe spieltheoretischer Begriffe und einfacher spieltheoretischer Modelle menschliche Verhaltenstypen unterscheiden und empirisch untersuchen kann, auch wenn sich die der Spieltheorie traditionellerweise zu Grunde liegenden strengen Rationalitätsannahmen rasch als ungültig erweisen und die spieltheoretische Lösungstheorie und das Nash-Gleichgewicht in diesem Zusammenhang weniger hilfreich sind (außer eben als Beispiel dafür, wie Menschen sich gerade nicht verhalten).

Bei Internethandelsplattformen und Internetauktionen wie E-Bay haben die Transaktionen den Charakter von Vertrauensspielen: Der Käufer, der eine Ware ersteigert oder gekauft hat, überweist zuerst das Geld für die Ware. Sobald das Geld eingegangen ist verschickt der Verkäufer die Ware. Dabei muss der Käufer dem Verkäufer vertrauen, denn der Verkäufer könnte die Ware auch behalten, nachdem er das Geld schon bekommen hat. Umgekehrt hat der Verkäufer ein Interesse daran, dass ihm der Käufer traut. Denn sonst würde der Käufer gar nicht erst auf das Geschäft eingehen. Grafisch lässt sich das entsprechende Vertrauensspiel so darstellen.

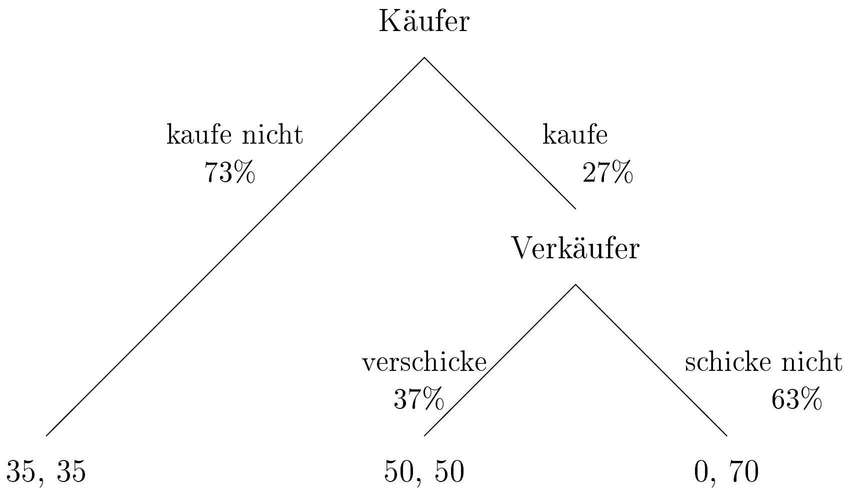


Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels [4]

Dabei gibt die erste Zahl die Auszahlung für den Käufer an und die zweite diejenige für den Verkäufer. In das Spiel geht, wie man sieht, die Annahme ein, dass beide einen Vorteil von der Transaktion haben. Findet sie statt erhält jeder eine Auszahlung von 50 statt nur 35, wenn keine Transaktion statt findet. Charakteristischerweise sind die Internetauktionen auf Internethandelsplattformen einmalige Vorgänge, d.h. derselbe Verkäufer und derselbe Käufer treffen höchstwahrscheinlich nicht wieder aufeinander. Außerdem finden sie mehr oder weniger anonym ohne direkten Kontakt statt. Genau diese Situation wurde im Experiment nachgestellt. Eine größere Anzahl von Probanden spielte das gegebene Vertraunsspiel über eine Computerschnittstelle jeweils ein einziges mal mit einem unbekannten Partner. Wer die Rolle des Käufers und wer die des Verkäufers zu übernehmen hatte, wurde dabei vorher zufällig ausgewählt. Die Teilnehmer bekamen anschließend einen Geldbetrag ausgezahlt, der proprtional zu den im Spiel gewonnen Punkten war. Anders als bei realen Internetplattformen wurde das Experiment zunächst ohne iorgend eine Art von Bewertungs- und Reputationsmechanismus durchgeführt. Auch bestand nach dem Experiment selbstverständlich keinerlei Möglichkeit, „unehrliche“ Verkäufer strafrechtlich zur Verantwortung zu ziehen.

Bevor wir nun auf die Ergebnisse des Experiments eingehen, sollten wir uns fragen, wie sich rationale Spieler im Sinne der Theorie verhalten würden. Da die Interaktion nur einmal stattfindet, würde ein rationaler nutzenmaximierender Verkäufer die Ware auf keinen Fall verschicken, da er 70 statt bloß 50 Punkte erhält, wenn er die Ware behält. Ein Käufer, der davon ausgeht, dass der Verkäufer sich rational vehrält, würde sich daher rationaler Weise gar nicht auf das Geschäft einlassen. Würden sich alle Probanden rational im Sinne der Theorie verhalten, und dies auch bei ihren Spielpartnern voraussetzen, dann dürfte im Experiment kein einziges Geschäft zu Stande kommen.

Wie demgegenüber der experimentelle Befund ausgefallen ist, zeigt die folgende Abbildung:



Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels [4]

Interessanterweise verhalten sich immerhin 37% der Verkäufer ehrlich, und 27% der Käufer sind bereit, einem Verkäufer zu vertrauen. Das Verhalten der Verkäufer ist unter keinen Umständen mehr mit dem Menschenbild des rationalen Nutzenmaximierers zu vereinbaren. Das Käuferverhalten könnte man dagegen noch gewaltsam für rational egoistisch erklären, wenn man 27% der Käufer unterstellt, dass sie davon ausgehen, dass die Verkäufer nicht egoistisch rational sondern ehrlich sind. Aber wenn man schon zugesteht, dass nicht alle Verkäufer sich rational egoistisch verhalten, warum sollte man bei den Käufern noch Deutungsanstrengungen unternehmen, nur um die Prämisse des rationalen Egoismus zu retten. Kurz, die einzig plausible Erklärung für das experimentelle Ergebnis besteht darin, dass es eben eine signifikante Abweichung vom rationalen Egoismus gibt.

Aber welche Gründe könnten zu dieser Abweichung führen? Denkbar wären unter anderem folgende Motive:

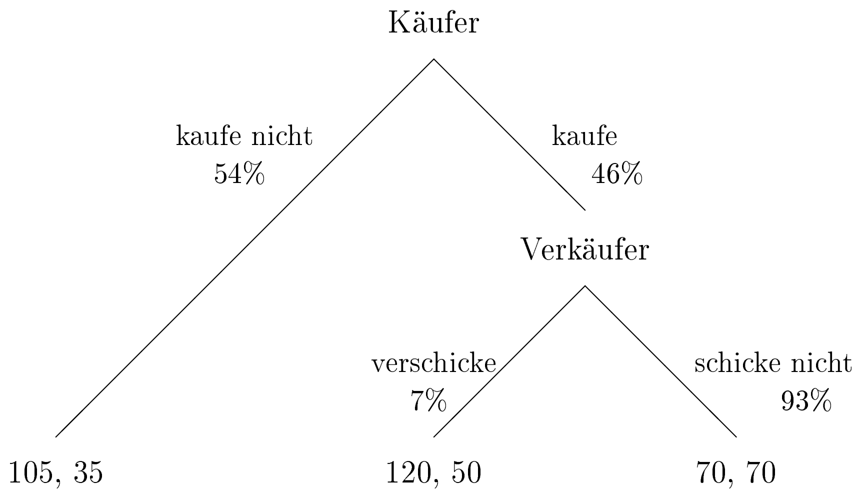
- Ein gewisser Anteil der Akteure handelt im Sinne *reziproker* Gerechtigkeitsvorstellungen. Präziser: Ein gewisser Anteil der Verkäufer handelt reziprozitätsorientiert und ein gewisser Anteil der Käufer erwartet Reziprozität vom Verkäufer.

- Wenigstens einige der Akteure handeln *effizienzorientiert*. Bei wechselseitiger Kooperation können Käufer und Verkäufer gemeinsam am meisten erwirtschaften.

- Ein gewisser Anteil der Verkäufer handelt *gleichheitsorientiert*, d.h. ein Ergebnis wird dann als gerecht empfunden, wenn es zu einer möglichst ausgeglichenen Verteilung führt. Für die Käufer kann Gleichheit alleine kein Motiv sein, da sie dieses Ziel ja auch ohne auf den Handel einzugehen erreichen könnten. Aber Gleichheit könnte neben z.B. einer schwachen Gewinnorientierung eine Rolle spielen.

- Der Vollständigkeithalber sollte auch *gewinnorientiertes* Handeln noch einmal erwähnt werden. Immerhin weicht ja jeweils nur eine Minderheit vom Gleichgewichtspfad ab.

Wie kann man aber überprüfen, welches dieser möglichen Motive das ausschlaggebende ist? Eine Möglichkeit besteht darin, das selbe Spiel mit leicht veränderten Auszahlungsparamtern noch einmal durchzuspielen (mit anderen Versuchspersonen, wie sich versteht). Bei dem folgenden Spiel wurde einfach auf alle Auszahlungen des Käufers ein Wert von 70 aufaddiert. Die strategische Situation (im Sinne der Spieltheorie) bleibt dabei genau dieselbe. Immer noch handelt es sich um ein Vertrauensspiel und immer noch besteht das Nash-Gleichgewicht darin, dass kein Handel statt findet. Interessanterweise ändert sich das Verhalten der Versuchspersonen aber schlagartig:



Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels [4]

Wie man sieht, ist die Zahl der ehrlichen Verkäufer auf einen kümmerlichen Rest von 7% zusammengeschrumpft. Gleichzeitig aber, und das ist vielleicht noch überraschender, ist die Zahl der willigen Käufer sehr deutlich auf 46% gestiegen. Unterstellt man, dass sich die Käufer auch nur halbwegs in die Verkäufer einfühlen können, dann hieße dies, dass sich ein großer Teil der Käufer auf den Handel nur einlässt, um dem Verkäufer Gelegenheit zu geben, dessen bevorzugtes Ergebnis herzustellen.

Was ist aber das bevorzugte Ergebnis? Egoistische Nutzenmaximierung taugt immer noch als Erklärung für die Mehrzahl der Käufer, aber wie kommt die Abweichung zu Stande, die noch größer ist als im ersten Experiment? Reziprozität scheidet als Motiv offensichtlich aus, da kaum einer der Verkäufer sich reziprok verhält. Dasselbe gilt für eine unterstellte kollektive Effizienzorientierung, die zu demselben Ergebnis führen müsste wie Reziprozität als Handlungsmotiv.

Die beste Erklärung für die Abweichung (wohlbemerkt nicht für das Handeln aller oder auch nur für den Durchschnittstypus) ist eine verbreitete Gleichheitsorientierung der Akteure, denn nur der Pfad Kaufen->Betrügen führt mit diesen Auszahlungen zu einem ausgeglichenen Ergebnis.

Was lernen wir nun aus alldem über die Spieltheorie? Das Beispiel zeigt, dass man spieltheoretische Modellvorstellungen, wie in diesem Fall das Vertrauensspiel auch dann noch fruchtbar einsetzen kann, wo menschliches Verhalten vom *homo oeconomicus* Modell abweicht. Spieltheoretische Modelle erlauben die begrifflich prägnante Beschreibung strategischer Probleme, und das spieltheoretische Experiment erlaubt es das tatsächliche Verhalten von Menschen mit dem Modell des rationalen Akteurs zu kontrastieren und bis zu einem gewissen Grade auch die Gründe (d.h. die Motive) für Abweichungen zu bestimmen.

Allerdings sind auch einige Einschränkungen zu beachten: So gilt, dass das, was im Experiment gezeigt wurde, zunächst einmal nur für die Experimentalsituation selbst. Ob und auf welche Realweltsituationen man den Experimentalbefund übertragen kann, bleibt zunächst eine durchaus offene Frage. Und auch nach welcher Methode man diese Frage angehen soll, ist durchaus nicht leicht zu beantworten, da man dazu ja nicht wiederum Experimente (ad infinitum) anstellen kann. Dass dieses Übertragungsproblem durchaus ernst genommen werden sollte, kann folgende Überlegung plausibel machen. Denkbar ist etwa, dass die signifikante Gleichheitsorientierung, die das 2.Experiment nahelegt, in gewisser Weise nur ein Artefakt der Experimentalsituation ist. Etwa so: Alle Teilnehmer fühlen sich im Experiment in einer Ausnahmesituation. Das stiftet eine gewisse Solidarität, die wiederum zu einem stärker gleichheitsorientierten Verhalten führt. In einer „realen“ Marktsituation wäre das möglicherweise ganz anders...

10.5 Aufgaben 9 (1. Juli)

1. Stellen Sie das Vertrauensspiel als Tabelle dar.

2. Zeige: Im 2-Personen Hirschjagdspiel gibt es kein gemischtes Gleichgewicht:

	Hirsch	Hase
Hirsch	5, 5	0,2
Hase	2,0	2,2

3. Zeige, dass im 2-Personen Spiel mit zwei Handlungsoptionen gilt:

   (a) Die beste Antwort auf eine reine Strategie ist immer eine reine Strategie, sofern zwischen den möglichen Antworten in reinen Strategien nicht Indifferenz herrscht.

   (b) Sei $(Z; S)$ ein Gleichgewicht der Strategien Z und S, und sei Z eine gemischte Strategie, dann muss auch S eine gemischte Strategie sein, es sei denn Spieler 1 () ist indifferent zwischen seinen möglichen reinen Antwortstrategien.

   (c) Sei $(Z; S)$ ein Gleichgewicht und Z eine gemischte Strategie, aber S eine reine Strategie, dann ist auch $(x; S)$ ein Gleichgewicht für jede beliebige reine oder gemischte Strategie x.

   (d) Gib ein Beispiel in Form einer Spielmatrix für den vorhergehenden Fall an.

4. Berechne das gemischte Gleichgewicht im Angsthasenspiel:

	Ausweichen	Gas geben
Ausweichen	0, 0	-5,5
Gas geben	5,-5	-100,-100

   Zusatzfrage: Wie wirkt es sich auf die Gleichgewichte aus, wenn man das Angsthasenspiel folgendermaßen abändert?

	Ausweichen	Gas geben
Ausweichen	0, 0	-5,5
Gas geben	5,-5	$-\infty$,$-\infty$

5. Zeige: Im wiederholten Gefangenendilemma mit den Parametern T,R,P,S = 5,3,1,0 beträgt die zu erwartende Auszahlung von *TitForTat* gegen die Strategie *Random* 2.25.

6. Welche Strategie ist im wiederholten Gefangenendilemma die beste Antwort auf *Random*?

7. Gib zwei Strategien A und B an, für die gilt:

   (a) Die direkte Begegnung von A und B geht immer zugunsten von B aus, d.h. $V(B/A) > V(A/B)$

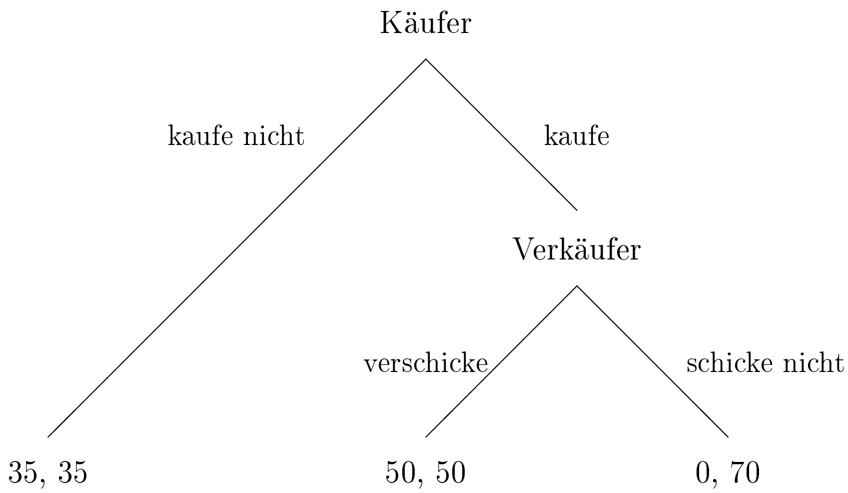
   (b) B kann trotzdem nicht in eine Population von A eindringen.

8. Zeige: Die Strategie *Tit For Two Tats* (Bestrafe erst bei zwei Defektionen) ist nicht kollektiv stabil. Es genügt dafür eine Strategie anzugeben, die in eine Population von *Tit For Two Tat*-Spielern eindringen kann.

9. Zeige: Die Strategie *Grim* (siehe Seite 171) ist kollektiv stabil aber nicht evolutionär stabil.

10. In welchem Verhältnis stehen die Begriffe der *kollektiven Stabilität* und der *evolutionären Stabilität* zu dem des Nash-Gleichgewichts?

11. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss der Verkäufer mindestens ehrlich sein, damit sich das Geschäft für den Käufer in dem folgenden Vertrauensspiel lohnt?



Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels [4]

11 Sozialwahltheorie

Am Ende dieser Vorlesung soll wenigstens noch eine flüchtige Einführung in das große Gebiet der Sozialwahltheorie gegeben werden. Bisher haben wir uns nur mit individuellen Entscheidungsträgern beschäftigt. Das betrifft sowohl die Entscheidungs- als auch die Spieltheorie (soweit wir sie vorgestellt haben), denn auch bei der Spieltheorie stellen wir uns die einzelnen Spieler als Personen mit vorher festgelegten, konsistenten Präferenzen vor. Für die Anwendung der Theorie ist es dabei weniger wichtig, ob die Akteure bzw. „Agenten“ tatsächlich einzelne Individuen sind, oder ob sie etwa Gruppen oder Körpserschaften sind. Entscheidend ist, dass sie über eine ganz bestimmte Präferenzrelation verfügen, die die Bedingungen für Präferenzrelationen erfüllt, also Ordnung, Transitivität etc. (siehe Kapitel 3.1, ab Seite 25). Die Sozialwahltheorie beschäftigt sich nun genau mit der Frage, wie eine Gruppe von Individuen kollektive Entscheidungen treffen kann, wenn man noch nicht von vornherein eine kollektive Präferenzrelation als gegeben betrachtet. Man könnte auch sagen, dass das Problem bzw. eines der Hauptprobleme der Sozialwahltheorie darin besteht, wie man individuelle Präferenzen auf kollektive Präferenzen abbilden kann. Um ein Problem handelt es sich insofern, als die individuellen Präferenzen einer Gruppe von Menschen höchst unterschiedlich beschaffen sein können, selbst wenn man einmal annimmt, dass jedes Mitglied der Gruppe über eine konsistente Präferenzrelation verfügt. Wie wir sehen werden, stellt es ein erhebliches Problem dar, daraus in sinnvoller Weise eine kollektive Präferenzrelation abzuleiten, die immer noch die Bedingungen einer wohlgeordneten Präferenzrelation erfüllt.

Die individuellen Präferenzen sämtlicher Individuen zusammengenommen, bezeichnet man auch als „*Präferenzprofil*“. Ein Präferenzprofil ist also eine Menge von individuellen Präferenzrelationen. Die Abbildung des Profils von individuellen Präferenzrelationen auf eine einzelne kollektive Präferenzrelation nennt man eine „soziale *Wohlfahrtsfunktion*“.

Was sich wie ein relativ technisches Problem anhört, hat Konsequenzen für die Frage, welche Entscheidungs- bzw. Abstimmungsprozeduren zum Treffen von Kollektiventscheidungen geeignet sind. Z.B. kann man damit die Frage untersuchen, ob die Entscheidung nach dem demokratischen Mehrheitsprinzip zu effizienten, gerechten und konseqeunten Kollektiventscheidungen führt. Dabei ist allerdings darauf hinzuweisen, dass die Sozialwahltheorie allein nur einen ganz bestimmten Blickwinkel auf solche Phänomene, wie das der demokratischen Mehrheitsentscheidung freigibt. Was dabei weitgehend ausgespart bleibt, sind sogenannte deliberative Prozesse, also diejenigen Vorgänge, in denen sich – in der ökonomistischen Sprache formuliert – die Präferenzen der Individuen in Folge von öffentlichen Diskussionen veränderen, aneinander anpassen oder sich dissozieren und in Lager aufteilen. Will man ein richtiges und vollständiges Bild von der Natur demokratischer politischer Entscheidungsprozesse gewinnen, so ist die Sozialwahltheorie allein dafür in hohem Maße unzureichend und sollte unbedingt durch andere Theorien, z.B. solche, die deliberative Prozesse zum Gegenstand haben, ergänzt werden. Zudem hat die Sozialwahltheorie – wie auch schon andere der im Rahmen dieser Vorlesung vorgestellten Theorien – in hohem Maße den Charakter einer theoretischen Spielerei ohne unmittelbaren Wirklichkeitsbezug, soll heißen: Zwischen den empirischen Problemen etwa demokratischer Entscheidungsfindungsprozesse und den in der Theorie erörterten Fragestellungen besteht oft eine nicht zu unterschätzende Distanz.

11.1 Zum Einstieg: Das Condorcet-Paradox

Der grundlegende Widerspruch, auf dem in der ein- oder anderen Form viele der Unmöglichkeitsbeweise der Sozialwahltheorie aufbauen, lässt sich beispielhaft am sogenannten Condorcet-Paradox erläutern. Angenommen, wir haben drei Individuen A,B, C, die in irgendeiner Weise über drei Alternativen x,y,z abstimmen wollen. Alle Individuen sind dabei gleichberechtigt. Ihre Präferenzen sind folgendermaßen verteilt:

A	B	C
z	x	y
x	y	z
y	z	x

Welche Alternative sollte gewählt werden? Jede Alternative steht einmal an erster, einmal an zweiter und einmal an dritter Stelle. Man kann also keine Alternative ohne Weiteres als die kollektiv beste auszeichnen, wenn man nicht eines der Individuen in ungerechter Weise bevorzugen will.

Das Problem lässt sich auch nicht einfach verfahrenstechnisch lösen. Denn wollte man zum Beispiel Stichwahlen durchführen, so würde im ersten Wahlgang jede Alternative die gleiche Stimmenzahl erhalten, so dass man keine Alternative für den zweiten Wahlgang ausschließen könnte. Wollte man paarweise Stichwahlen durchführen, so stellt sich die Schwierigkeit, dass das Ergebnis in kontingenter Weise von der Reihenfolge der Stichwahlen abhängt.

Die Schwierigkeit, vor der wir hier stehen, kommt dadurch zustande, dass die Präferenzen der Individuen zyklisch verteilt sind. In diesem Fall könnte man immerhin noch auf die Idee verfallen einfach zu losen. Dann hätte jeder noch die gleiche Chance. Aber nur im Ausnahmefall kann man für kollektive Entscheidungsfindungsprobleme eine so einfache und unkonventionelle Lösung finden. Das Problem kann sich nämlich auch in der Form stellen, dass bestimmte Abstimmungsverfahren vorgegeben sind (z.B. paarweise Stichwahlen), die sich unter „Normalbedingungen“ auch bewähren und als fair gelten können, aber bei bestimmten ungünstigen Präferenzverteilungen, Manipulationsmöglichkeiten eröffnen (siehe Übungsaufgabe 1).

11.2 Das sogenannte „Paradox des Liberalismus“

Nach diesem Einstieg gehen wir nun zunächst zu einem der einfacheren Beispiele der Sozialwahltheorie über, dem sogennanten „Paradox des Lieberalismus“ von Amartya Sen. (Vgl. für das Folgende [26]) Die Bezeichnung ist ein wenig unglücklich, denn es handelt sich dabei – wenn überhaupt – eher um ein Paradox der Demokratie als des Liberalismus. Hinter dem Namen verbirgt sich jedenfalls Folgendes: Um faire Kollektiventscheidungen über eine Menge von Alternativen zu treffen, soll eine „Verfassung“ verabschiedet werden, die ein entsprechendes Entscheidungsverfahren vorgibt, das folgenden Bedingungen genügt:

1. *Minimale Fairness*[29] (Prärogativrecht): Jeder soll das Recht haben, die Kollektiventscheidung für mindestens ein Paar von Alternativen festzulegen. Wer über welches Paar von Alternativen entscheiden darf, wird in der Verfassung festgelegt. Die Bedingung der „minimalen Fairness“ garantiert jedem, nicht vollständig übergangen zu werden.

2. *Unbeschränkter Bereich*: Jedes beliebige individuelle Präferenzprofil ist zugelassen (sofern es die Bedinungen einer wohlgeformten Präferenzrelation erfüllt). Diese Bedingung besagt einerseits, dass die Individuen völlig frei sind, ihre persönlichen Präferenzen zu wählen, und andererseits, dass die gesuchte Entscheidungsprozedur der Möglichkeit beliebig verteilter individueller Präferenzen Rechnung tragen muss. (Diese Voraussetzung ist nicht unbedingt realistisch, da sich die Präferenzen von Individuen typischerweise nach Gruppen, Parteien bzw. „Lagern“ aufteilen. Sie beschreibt eher Umstände, mit denen man im schlimmsten Fall rechnen müsste.)

3. *(Pareto-)Effizienz*: Wenn alle Individuen eine bestimmte Alternative einer anderen vorziehen, dann sollte auch nach dem Kollektiventscheidungsverfahren diese Alternative vor der anderen rangieren.

[29] Zuweilen wird diese Bedingung auch als „Bedingung des minimalen Liberalismus“ bezeichnet. Aber die Bezeichnung ist schon deshalb irreführend, weil „Liberalismus“ eigentlich meint, dass es bestimmte Dinge gibt, die überhaupt nicht kollektiv entschieden werden müssen, nicht aber, dass bei einem Kollektiventscheidungsverfahren jeder einmal zum Zuge kommen müsse.

Allen drei Bedingungen kommt ein gewisser Grad von Selbstverständlichkeit zu, d.h. man ist leicht geneigt zu verlangen, dass jede einigermaßen faire und sinnvolle Entscheidungsprozedur diese drei Bedingungen mindestens erfüllen sollte. Es lässt sich nun jedoch zeigen, dass es unmöglich ist, alle drei Bedingungen auf einmal zu erfüllen. Um das zu zeigen, gehen wir von dem einfachsten Fall aus, in dem wir es mit zwei Individuen und drei Alternativen zu tun haben. Die Individuen bezeichnen wir mit A und B, die Alternativen mit x, y, z. Nun soll in der „Verfassung" festgeschrieben werden, wer über welches Paar von Alternativen entscheiden darf. Wir nehmen an, dass das Individuum A über y und z und Individuum B über x und z entscheiden darf, d.h. wenn P die Menge der Alternativen bezeichnet, über die ein Individuum die „Prärogative" ausübt, dann gilt:

$$P_A = \{x, z\}$$

$$P_B = \{y, z\}$$

Die Unmöglichkeit eines Entscheidungsverfahrens, das alle drei Bedingungen erfüllt, ist dann bewiesen, wenn wir Präferenzen für A und B finden, mit denen keine eindeutige Kollektiventscheidung mehr getroffen werden kann. Dies ist aber für folgende Präferenzen der Fall:

$$A: \qquad y \succ x \succ z$$

$$B: \qquad z \succ y \succ x$$

Mit diesen Präferenzen kann keine der drei Alternativen als die beste gewählt werden, denn:

1. Aufgrund der Präferenzen von A, und da A die Prärogative über x und z ausübt, kann z nicht gewählt werden.

2. Aufgrund der Präferenzen von B, und da B die Prärogative über y und z ausübt, kann y nicht gewählt werden.

3. Aufgrund der Effizienzbedinungen und der Präferenzen beider, kann aber auch nicht x gewählt werden.

Damit ist gezeigt, dass es unmöglich ist, ein Entscheidungsverfahren zu finden, dass die Präferenzen von A und B unter Berücksichtigung der Fairness-, Beschränktheits- und Effizienzbedingung auf kollektive Präferenzen abbilden kann, da keine der möglichen Alternativen in der kollektiven Präferenzordnung an erster Stelle auftauchen dürfte.

Die Gültigkeit des Beweises hängt nicht davon ab, welche Prärogativen man wählt (Übungsaufgabe 2). Es ist aber sehr wohl entscheidend für den Beweis, dass die Prärogativen im vorhinein festgelegt werden, d.h. bevor etwas über die Präferenzen der Individuen bekannt ist (Übungsaufgabe 3).

Kann man aus diesem Beweis inhaltliche Schlussfolgerungen bezüglich der Demokratie bzw. der Möglichkeit und Fairness demokratischer Entscheidungsverfahren ziehen? Mit einiger Vorsicht kann wohl folgende Schlussfolgerung gezogen werden: Eine Idealvorstellung dergestalt, dass in der Demokratie die Interessen jedes Bürgers (ausgedrückt durch die Präferenzen) zumindest eine gewisse Berücksichtigung (ausgedrückt durch die Prärogative) finden können, lässt sich nicht unter allen Umständen (unbeschränkter Bereich und Effizienzgebot) halten.

Wie man sieht – aber dies ist ein Grundproblem – sind inhaltlich nur relative schwache (d.h. nahe an der Grenze zur reinen Binsenweisheit liegende) Schlussfolgerungen möglich. Denn, dass in der Demokratie nicht alle Interessen berücksichtigt werden (können), ist schon aus anderen, pragmatischen Gründen relativ offensichtlich. Zugleich ist aber jedem die Möglichkeit und damit auch die Chance gegeben, für die eigenen Interessen zu kämpfen. Dass diese Chancen höchst ungleich verteilt sind, stimmt leider ebenso, hängt aber weniger mit logisch-mathematischen Abbildungsproblemen als der innergesellschaftlichen Reichtums- Macht- und Einkommensverteilung etc. zusammen.

Aber auch wenn keine unmittelbaren starken demokratietheoretischen Schlussfolgerungen aus dem „Paradox des Liberalismus“ gezogen werden können, ist ein Verständnis der logischen Eigenschaften von Abstimmungs- bzw. Kollektiventscheidungsverfahren – neben den nicht minder wichtigen psychologischen Rahmenbedingungen – wichtig, wenn es um die Frage geht, welche Abstimmungsverfahren man für welchen Zweck heranziehen soll bzw. wie man sie gestalten sollte.

11.3 Der „Klassiker“ der Sozialwahltheorie: Satz von Arrow

Ein historischer Vorläufer des sogennanten „Paradox des Liberalismus“ und recht eigentlich der Klassiker der Sozialwahltheorie ist allerdings der „Satz von Arrow“. Das „Paradox des Liberalismus“ unterscheidet sich nur geringfügig davon. Da der Beweis von Arrows Theorem aber erheblich komplizierter ausfällt, wurde zunm Einstieg zunächst das sogennante „Paradox des Liberalismus“ behandelt.

Des Satz von Arrow zeigt – ähnlich wie Sens sog. „Paradox des Liberalismus“ – dass eine Abbildung individueller Präferenzen auf eine kollektive Präferenzordnung nicht mehr möglich ist, wenn man nur ein par „selbstverständliche“ Anforderungen an diese Abbildung stellt. Wenn wir dieses zunächst einmal mathematisch abstrakte Resultat dann auf demokratische Entscheidungsfindungsprozesse übertragen, dann besagt es, dass bestimmte normative Kriterien wie etwa 1) dass jeder eine faire Chance bekommen soll, 2) dass die Entscheidungsfindung effizient sein soll 3) dass die Entscheidungsprozedur auch bei höchst unterschiedlichen Meinungen noch funktioniert miteinander unvereinbar sein können. Da man dies den entsprechenden normativen Kriterien nicht unmittelbar ansieht, hat das Resultat schon einige Bedeutung, indem es uns auf einen möglichen Zielkonflikt aufmerksam macht. Wie bei beinahe allen Resultaten der Sozialwahltheorie kann man allerdings auch hier in Frage stellen, ob die abstrakt mathematische Formulierung die entsprechenden konkret-empirischen Zusammenhänge richtig erfasst.

Zum Anforderungskatalog, auf den sich der Satz von Arrow bezieht, gehören nun folgende Bedingungen:

1. *Diktaturfreiheit*: Es dürfen sich nicht in jedem Fall (d.h. bezüglich jedem Profil von individuellen Präferenzen) die Präferenzen von ein- und demselben Individuum durchsetzen.

   Diese Bedingung ist vergleichweise schwächer als die Bedingung der „minimalen Fairness“ im Falle des Paradoxes des Liberalismus, indem sie immer noch zulässt, dass einzelne Individuen völlig übergangen werden, solange nicht alle bis auf ein Individuum übergangen werden.

2. *Unbeschränkter Bereich*: Jedes beliebige individuelle Präferenzprofil, das die Bedinungen einer wohlgeformten Präferenzrelation erfüllt, ist zugelassen.

3. *(Pareto-)Effizienz*: Wenn alle Individuen eine bestimmte Alternative einer anderen vorziehen, dann sollte auch nach dem Kollektiventscheidungsverfahren diese Alternative vor der anderen rangieren.

4. *Unabhängigkeit von „irrelevanten“ Alternativen*: Wenn sich die Anordnung bestimmter Güter (x, y) durch die Bürger in einem gegebenen Präferenzprofil (P_1) nicht von der Anordnung in einem anderen Präferenzprofil (P_2) unterscheidet, dann sollte sich die Anordnung dieser Güter in der durch die soziale Wohlfahrtfunktion aus dem einen Profil gewonnenen Präferenzordnung nicht von der aus dem anderen Profil gewonnenen unterscheiden.

Diese Bedingung, die beim sog. „Paradox des Liberalismus“ nicht vorkommt, darf nicht mit der Pareto-Bedinung verwechselt werden. Bei der Bedinung der Pareto-Effizienz geht es darum, dass alle Individuen in ein- und demselben Präferenzprofil ein- und dieselbe Präferenz bezüglich zweier Güter haben. Hier geht es aber darum, dass die Präferenzen einzelner Individuen bezüglich bestimmter Güter, die sich von Individuum zu Individuum sehr wohl unterscheiden können, in *unterschiedlichen* Profilen genauso wiederkehren.

Mann könnte das Prinzip der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen auch so formulieren: Wenn dieselben Präferenzen in unterschiedlichen Präferenzprofilen eingebettet sind, darf dies keinen Unterschied in der Abbildung dieser Präferenzen durch die soziale Wohlfahrtsfunktion bewirken.

Der Beweis, dass keine Abbildung individueller auf kollektive Präferenzen möglich ist, die alle diese Bedingungen erfüllt, folgt Resnik [23, S. 186ff.]. Der Beweis wird so geführt, dass gezeigt wird, dass dann wenn die drei letzten Bedingungen erfüllt sind, die erste Bedingung nicht mehr erfüllt werden kann. Damit ist gezeigt, dass nicht alle Bedingungen zusammen erfüllt werden können, was dasselbe ist, wie zu sagen, dass es keine Abbildungsfunktion gibt, die alle aufgelisteten Bedingungen erfüllen kann.

Für diesen Beweis führen wir zunächst zwei weitere Definitionen ein:

1. Eine Menge von Individuuen ist *entscheidend für x über y* wenn die Wohlfahrtsfunktion $x \succ y$ liefert, sobald jedes Individuum aus dieser Menge x gegenüber y vorzieht.

   Anmerkungen:

   (a) Wenn eine Menge von Individuen „entscheidend“ für x über y ist, so muss noch lange nicht gelten, dass sie auch entscheidend für y über x ist.

   (b) Für jede Menge von Individuuen und jedes Paar von Alternativen gibt es wenigstens eine „entscheidende“ Menge. Aufgrund der Pareto-Bedingung ist für jedes Paar von Alternativen nämlich die Menge aller Individuen eine entscheidende Menge. (Sobald alle Individuen x der Alternative y vorziehen fordert sie, dass auch kollektiv $x \succ y$ gilt.)

2. Eine Menge von Individuen ist *beinahe entscheidend für x über y*, wenn die Wohlfahrtsfunktion $x \succ y$ liefert, sobald alle Individuuen aus dieser Menge x gegenüber y vorziehen *und* alle Individuen außerhalb dieser Menge y gegenüber x vorziehen.

Umgangssprachlich besagt Definition also, dass eine Menge von Individuen „beinahe entscheidend“ ist, wenn sie nur in dem Extremfall maximaler Opposition von außerhalb entscheidend ist, aber nicht in anderen Fällen. Es gilt daher, dass eine Menge von Individuen, die „entscheidend“ ist, immer auch „beinahe entscheidend“ ist, aber nicht umgekehrt.

Mit Hilfe dieser Begriffe können wir nun folgendes Lemma beweisen:

> **Lemma 1**: *Es existiert immer ein Individuum, das für irgendein Paar von Alternativen beinahe entscheidend ist.*

Beweis: Wie oben angemerkt existieren „entscheidende“ Mengen für jedes Paar von Alternativen. Da jede „entscheidende“ Menge immer auch „beinahe entscheidend“ ist, existieren für jedes Paar von Alternativen auch beinahe „entscheidende“ Mengen.

Wir setzten voraus, dass die Menge der Individuen und Alternativen endlich ist. Dann existiert wenigstens eine „beinahe entscheidende“ Menge (bezüglich irgend eines Paares von Alternativen), die keine echte Teilmenge enthält, die „beinahe entscheidende“ Menge (bezüglich irgend eines beliebigen Paares von Alternativen) wäre, denn: Man beginne mit irgend einer beliegigen „beinahe entscheidenden“ Menge. Hat diese Menge noch (nicht-leere) Teilmengen, die „beinahe entscheidende“ Mengen (bezüglich irgendeiner Alternative) sind, dann wähle man irgend eine dieser „beinahe entscheidenden“ Teilmengen und stelle für diese Teilmenge dieselbe Untersuchung an, solange bis man bei einer Menge angekommen ist, die keine echten Teilmengen mehr enthält, die ihrerseits „beinahe entscheidende“ Mengen irgendeines Paares von Alternativen sind.

Wir verfügen damit über eine „minimale Menge“, die „beinahe entscheidend“ bezüglich eines bestimmten Paares von Alternativen ist. Wenn wir zeigen können, dass diese „minimale Menge“ nur noch ein einziges Individuum enthält, dann haben wir das Lemma bewiesen. Dazu kann ein Widerspruchsbeweis geführt werden. Wir nehmen also an, es gäbe eine entsprechende „minimale beinahe entscheidende Menge“, die mehrere Individuen enthält und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Angenommen also, M sei eine „minimale beinahe entscheidende Menge“ für die Alternative x über y, die mehrere Individuen enthält. Man betrachte ein beliebiges Individuum J aus der Menge M. Da die Menge M mehr Individuen als nur J enthält, und da möglicherweise noch ein „Rest“ von Individuen existiert, die nicht zu M gehören, kann man folgende drei unterschiedlichen Gruppierungen betrachten: 1) Die Menge, die nur aus dem Individuum J besteht. 2) Die Menge, die aus den Individuen von M ohne

J besteht, kurz: $M - J$. 3) Der „Rest“, d.h. alle Individuen, die nicht zu M gehören.

Da jedes beliebige Präferenzprofil zugelassen ist („unbeschränkter Bereich“) und sich die Eigenschaft eine (minimale) „beinahe entscheidende“ Menge zu sein auf alle Präferenzprofile bezieht, muss sie sich auch bei jedem beliebigen einzelnen Präferenzprofil bewähren. Man nehme an, dass es mindestens drei Güter gibt und betrachte nun folgendes Präferenzprofil:

J	$M - J$	Rest
z	x	y
x	y	z
y	z	x

Quelle: Resnik [23], S. 188

Da M eine „beinahe entscheidende“ Menge für x über y ist und in diesem Präferenzprofil für alle Mitglieder von M gilt: $x \succ y$, und alle Nicht-Mitglieder gilt: $y \succ x$, so muss die Wohlfahrtsfunktion diesem Präferenzprofil kollektive Präferenzen zuordnen, bei denen $x \succ y$ gilt. Darüber hinaus muss die Wohlfahrtsfunktion natürlich auch festlegen, welche Beziehung ($\succ$, $\prec$ oder $\sim$) zwischen x und z zu gelten hat. Wir betrachten die drei Möglichkeiten im Einzelnen, und zeigen, dass jede davon zu einem Widerspruch führt. Dabei ist zu beachten, dass wir nicht ausgeschlossen haben, dass die Menge „Rest“ leer sein kann. Die folgenden Argumente funktionieren aber (wovon man sich leicht überzeugen kann) auch in dem Fall, dass die „Rest“-Gruppe leer ist.

1. Angenommen nach der Wohlfahrtsfunktion gilt für dieses Präferenzprofil $x \succ z$. Dann muss die Wohlfahrtsfunktion nach der Bedingung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen $x \succ z$ auch für alle anderen Präferenzprofile liefern, nach denen x und z für jedes Individuum in derselben Weise relativ zueinander geordnet sind wie in dem gegebenen Präferenzprofil. Damit liefert die Wohlfahrtsfunktion aber immer $x \succ z$, wenn für alle Individuen in $M - J$ gilt $x \succ z$ und für alle Individuen, die nicht in $M - J$ enthalten sind $z \succ x$. Damit ist $M - J$ aber „beinahe entscheidende“ Menge für x über z. Nach der Konstruktion von M hätte M als „minimale beinahe entscheidende Menge“ (für x über y) aber keine Teilmenge mehr enthalten dürfen, die noch „beinahe entscheidende“ Menge *irgendeines* Paars von Alternativen ist. Also liegt hier ein Widerspruch vor, so dass die Möglichkeit, dass die Wohlfahrtfunktion dem oben stehenden Präferenzprofil kollektive Präferenzen zuordnet, die $x \succ z$ enthalten, ausgeschlossen ist.

2. Angenommen, die Wohlfahrtsfunktion legt für dieses Präferenzprofil $x \sim z$ fest. Dann ergibt sich, da bereits $x \succ y$ gilt, dass auch $z \succ y$. Da J aber z gegenüber y vorzieht, während alle anderen Individuen y gegenüber z vorziehen, wäre nach dem gleichen Argument wie im 1.Fall J beinahe entscheidend für die z über y, was ebenfalls der Minimalität von M widerspricht. Damit scheidet die zweite Möglichkeit auch aus.

3. Angenommen, die Wohlfahrtsfunktion liefert $z \succ x$. Dann gilt wegen $x \succ y$ und der Transitivität der Präferenzrelation auch $z \succ y$. Dann liegt aber wiederum der Fall vor, dass bei dem oben angegebenen Präferenzprofil für J gilt: $z \succ y$, aber für alle anderen Individuen: $y \succ z$, woraus sich mit Hilfe der Bedingung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen wiederum ergibt, dass J „beinahe entscheidend" für $z \succ y$ ist, im Widerspruch zur Minimalität von M. Auch diese Möglichkeit scheidet aus.

Da alle Möglichkeiten zum Widerspruch führen, kann die Wohlfahrtsfunktion die individuellen Präferenzen nicht auf kollektive Präferenzen abbilden, sofern die minimale „beinahe entscheidende" Menge M noch mehr als ein Individuum enthält.

Das erste Lemma scheint alleine noch nicht viel zu besagen, denn von dem Individuum, aus dem die Menge M am Ende besteht, ist zunächst nur bewiesen, dass es lediglich beinahe entscheidend ist, und auch das nur für ein Paar von Alternativen. Ein zweites Lemma zeigt aber, dass weit mehr dahinter steckt:

> **Lemma 2:** *Ein Individuum, das für irgendein Paar von Alternativen beinahe entscheidend ist, ist entscheidend für jedes Paar von Alternativen.*

Beweis: Wir nehmen an, dass das Individuum J beinahe entscheidend für X über y ist. Es muss nun gezeigt werden, dass es dann auch entscheidend (und zwar nicht bloß *beinahe* entscheidend!) für alle Paare von Alternativen ist. Dies ist dann bewiesen, wenn wir zwei weitere Alternativen a und b in die Betrachtung einbeziehen und beweisen können, dass J in folgenden sieben Fällen entscheidend ist: 1) x über y; 2) y über x; 3) x über a; 4) a über x; 5) y über a; 6) a über y; 7) a über b.

Da a und b beliebig wählbar sind, schließt der Beweis automatisch („ohne Beschränkung der Allgemeinheit") alle weiteren Alternativen mit ein, die es außer x, y, a und b noch geben könnte. Gibt es außer x und y nur noch eine oder gar keine weiteren Alternativen, dann fallen nur einige der betrachteten

Fälle weg, und der Beweis gilt trotzdem. Aus Gründen der Konvenienz werden in dem folgenden Beweis die Fälle in einer anderen Reihenfolge behandelt (vgl. [23, S.190/191]). Nun zu den Fällen im Einzelnen:

1. Fall *x über a*: Wir betrachten das Präferenzprofil, in dem J die Alternativen x, y und a in der Reihenfolge $x \succ y \succ a$ ordnet, und in denen die anderen Individuen die Alternative y sowohl x als auch a vorziehen, wobei zwischen x und a jede mögliche Reihenfolge zugelassen sei.

   Da J nach Voraussetzung beinahe entscheidend für x über y ist, muss die Wohlfahrtsfunktion bei einem solchen Profil $x \succ y$ liefern. Da aber ebenfalls für alle Individuen $y \succ a$ gilt, muss auf Grund der Bedingung der Pareto-Effizienz auch die Sozialwahlfunktion $y \succ a$ für ein derartiges Präferenzprofil liefern. Da aber schon $x \succ y$ gilt, liefert die Sozialwahlfunktion aufgrund der Transitivität von Präferenzen auch $x \succ a$. Auf Grund der Bedingung der irrelevanten Alternativen gilt aber, dass die Wohlfahrtsfunktion $x \succ a$ für alle Präferenzprofile liefern muss, in denen x und a in derselben Weise relativ zueinander geordnet sind, wie in dem betrachteten Beispiel. In dem Beispiel hat J aber x vor a eingeordnet, während bei allen anderen Individuen die Ordnung beliebig war. Das bedeutet aber, dass die Wohlfahrtsfunktion $x \succ a$ liefert, sobald J die Ordnung $x \succ a$ festlegt. Damit ist J entscheidend (nicht bloß nahezu entscheidend!) für x über a.

2. Fall *a über y*: Wir betrachten das Präferenzprofil, in dem für J die Präferenz $a \succ x \succ y$ gilt, und in dem für alle anderen Individuen $a \succ x$ und $y \succ x$ gilt, d.h. in dem a und y der Alternative x vorgezogen werden, während die Reihenfolge zwischen a und x wiederum nicht festgelegt sein soll.

   Ganz analog wie im ersten Fall lässt sich dann zeigen, dass J entscheidend für a über y ist.

3. Fall *y über a*: Betrachtet sei folgendes Präferenzprofil: Für J gilt $y \succ x \succ a$; für alle anderen gilt $a, y \succ x$.

   Gemäß der Bedingung der Pareto-Effizienz liefert die Wohlfahrtsfunktion für dieses Profil $y \succ x$. Da J entscheidend ist für x über a, liefert sie auch $x \succ a$ und, wegen der Transitivität der Präferenzrelation schließlich auch $y \succ a$.

   Wiederum muss, wenn die Wohlfahrtsfunktion $y \succ a$ für ein Profil liefert, in dem J die Alternative y vor a stellt, während die Ordnung von y und a für die anderen Individuen nicht festgelegt ist, auf Grund der Bedingung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen die Wohlfahrtsfunktion $y \succ a$ bei allen Profilen liefern, die y und a in derselben Weise ordnen, d.h. bei allen Profilen, in denen für J gilt: $y \succ a$. Damit ist J aber entscheidend für y über a.

4. Fall *a über x*: Man betrachte zunächst das Profil, in dem für J gilt: $a \succ y \succ x$, während $y \succ x, a$ für die anderen Individuen gilt.

   Wir wissen bereits, dass J entscheidend für $a \succ y$ ist. Aufgrund der Bedingung der Paretoeffizienz liefert die Wohlfahrtsfunktion aber auch $y \succ x$. Analog zu den vorhergehenden Fällen können wir daraus mit Hilfe der Bedingung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen ableitent, dass J entscheidend für a über x ist.

5. Fall *x über y*: Wir betrachten das Profil, in dem für J gilt: $x \succ a \succ y$. Wir wissen bereits, dass J entscheidend für $x \succ a$ und ebenso für $a \succ y$ ist. Also muss die Wohlfahrtsfunktion für dieses Profil $x \succ y$ liefern. Analog zu den vorhergehenden Fällen lässt sich dann mit Hilfe der Bedingung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen schließen, dass J entscheidend für $x \succ y$ ist.

6. Fall *y über x*: Wie im vorhergehenden Fall, nur dass diesmal x und y vertauscht sind.

7. Fall *a über b*: Wir betrachten ein Profil, in dem für J gilt $a \succ x \succ b$. Analog zu dem vorhergehenden Fall, können wir dann zeigen, dass J entscheidend für a über b ist.

In jedem der Fälle ist J also „entscheidend“, womit das zweite Lemma bewiesen ist. Aus dem ersten und dem zweiten Lemma ergibt sich zusammengenommen der Satz von Arrow, der damit ebenfalls bewiesen ist.

Nachdem der „Satz von Arrow“ mathematisch bewiesen ist, stellt sich nun die eigentliche Frage, wie er inhaltlich beurteilt werden muss. Der Satz von Arrow scheint zu zeigen, dass es nicht möglich ist, aus individuellen Präferenzen kollektive Entscheidungen abzuleiten, die gleichermaßen effizient, vernünftig und (hinsichtlich der Berücksichtigung der unterschiedlichen individuellen Präferenzen) gerecht sind. Aber wie weit reicht diese Erkenntnis? Dass es bei der kollektiven Entscheidungsfindung Zielkonflikte zwischen Gerechtigkeitsansprüchen und Effizienzforderungen geben kann, wissen wir schon aus der politischen Lebenserfahrung. Dass sie – wie der Satz von Arrow nahelegt – unvermeidlich sind, ist eine wichtige Einsicht. Dennoch stellt sich die Frage wie relevant derartige logische Beweisführungen in der Praxis sein können. Immerhin mag in der politischen Praxis die Vereinbarung von Gerechtigkeits- und Effizienzansprüchen noch an vielen weiteren Hindernissen scheitern als bloß dem im Satz von Arrow erfassten logischen Abbildungsproblem. Und die Zielsetzung, Gerechtigkeits- und Effizienzansprüche *möglichst weitgehend* miteinander zu vereinbaren, wird durch den Satz von Arrow – Gott sei Dank! – keineswegs sinnlos.

Wie hilfreich und relevant der Satz von Arrow und die zahlreichen sich an ihn anschließenden Untersuchungen dabei sind, kann durchaus unterschiedlich bewertet werden. Donald Green und Ian Shapiro kommen in ihrer ebenso umfassenden wie kritischen Studie zu dem Ergebnis, dass die von Arrow inspirierte wissenschaftliche Literatur kaum relevante Ergebnisse zu Tage gefördert hat [12]. Dem widerspricht Müller [19], unter anderem mit dem Hinweis, dass die Erkenntnisse des entsprechenden Forschungszweiges zumindest für das Design und Verständnis von Wahl- und Abstimmungsmechanismen eine gewisse Relevanz haben müssten. Denn wenn wir ein bestimmtes Wahl- oder Abstimmungsverfahren vereinbaren, sollten wir dessen logische Eigenschaften besser gut verstehen.

Wir können diese Debatte im Rahmen dieser Vorlesung leider nicht mehr ausführlich behandeln. Soviel sollte jedoch deutlich sein: Mit dem Beweis bestimmter logischer oder mathematischer Theoreme allein ist es noch nicht getan. Danach fängt erst die – in einer gewissen Hinsicht viel kompliziertere – Interpretationsarbeit an.

11.4 Aufgaben 9 (15. Juli)

1. Gegeben seien drei Individuen A, B, C und drei Alternativen x, y, z. Die Präferenzen seien folgendermaßen verteilt:

A	B	C
z	x	y
x	y	z
y	z	x

   Angenommen, um die kollektive Entscheidungs zu treffen, welche Alternative gewählt werden soll, sind paarweise Stichwahlen vereinbart worden, und A ist zum Wahlleiter ernannt worden, mit dem Recht die Reihenfolge fest zu legen, in der über jeweils zwei Alternativen abgestimmt worden ist. In welcher Reihenfolge sollte A abstimmen lassen, damit die von A bevorzugte Alternative z mit Sicherheit gewinnt?

2. Zeige, dass die Gültigkeit des Beweises des „Paradox des Liberalismus“ (Abschnitt 11.2 auf Seite 191ff.) nicht davon abhängt, über welche Alternativen man den beiden Individuen A und B ihre Prärogative einräumt.

3. Zeige: Wenn umgekehrt zuerst die Präferenzen der Individuen festgelegt werden, und erst danach die Prärogative zugewiesen wird, dann ist es immer möglich Prärogativen zu finden, so dass die Konstruktion einer kollektiven Entscheidungsfunktion für zwei Individuen und drei Alternativen nicht mehr unmöglich wird.

12 Klausurvorbereitung und Klausur

12.1 Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Hier sind ein par Aufgaben von der Art, wie sie in der Klausur vorkommen werden.

12.1.1 Entscheidungen unter Unwissenheit

1. Betrachte folgende Entscheidungstabellen:

   Tabelle 1:

A_1	4	8	12	0
A_2	3	2	3	3
A_3	1	5	14	6
A_4	2	3	1	7

   Tabelle 2:

A_1	0	-1	2	5
A_2	-3	12	2	4
A_3	1	8	-2	6
A_4	2	5	1	0

   Löse beide Entscheidungstabellen:

   (a) nach der (lexikalischen) Maximin-Regel

   (b) nach der (lexikalischen) Minimax-Bedauerns-Regel

   (c) nach dem Indifferenzprinzip

   (d) nach der Optimismus-Pessimismus-Regel mit einem Optimismus-Index von 3/4

2. Welche der folgenden Nutzenfunktionen beschreiben jeweils denselben *ordinalen* Nutzen und welche denselben *kardinalen* Nutzen:

   (a)

Gut:	A	B	C	D	E	F
u_1:	3	2	5	8	1	4
u_2:	6	4	8	16	2	7
u_3:	7	4	13	22	1	10

   (b) $u_1(x) = 2x$ $\quad u_2(x) = -x$ $\quad u_3(x) = x^2$ $\quad u_4(x) = 5x^2 - 3$

12.1.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ein Patient, der kürzlich einen Urlaub in Zentralafrika verbracht hat, wird mit Verdacht auf Malaria in die Klinik eingeliefert. Es ist bekannt, dass etwa bei 0.5% derartiger Verdachtsfälle tatsächlich eine Malariaerkrankung auftritt. Die behandelnde Ärztin führt zunächst einen Antigen-Schnelltest durch. Dieser Schnelltest hat eine positiv-positiv

Rate von 80% und eine positiv-negativ Rate von 0.01%. Der Test fällt *negativ* aus.

Da der Schnelltest nicht besonders sensitiv ist (wie man an der niedrigen positiv-positiv Rate sieht), führt die Ärztin noch einen zweiten Test auf Basis einer Polymerase-Kettenreaktion durch. Dieser Test, der mit einer positiv-positiv Rate von 99,5% und einer positiv-negativ Rate von 0.3% sehr viel zuverlässiger ist, fällt positiv aus.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Ärztin davon ausgehen, dass der Patient an Malaria erkrankt ist?

2. Die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit wird wie folgt definiert:

   (a) Es gibt eine endliche Menge von Elementarereignissen: Ω. (Beispiel: Beim Würfeln $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

   (b) Jedes Ereignis ist durch eine Menge E charakterisiert, die Teilmenge von Ω ist: $E \subseteq \Omega$. (Beispiel: Das Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln, wird durch die Menge $E = \{2, 4, 6\}$ beschrieben.)

   (c) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist definiert als die Anzahl der Elemente der Ereignismenge („günstige Fälle") geteilt durch die Anzahl der Elementarereignisse („mögliche Fälle"). Wenn $|M|$ die Anzahl der Elemente der Menge M beschreibt, dann ist die Wahrscheinlichkeit p also definiert durch: $p(E) := \frac{|E|}{|\Omega|}$.

   Beweise, dass die Laplac'sche Wahrscheinlichkeit die kolmogorowschen Axiome erfüllt:

   (a) Axiom: $\forall_{E \subset \Omega} \quad p(E) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad p(E) \geq 0$

   (b) Axiom: $p(\Omega) = 1$

   (c) Axiom: $\forall_{E,F \subset \Omega} \quad E \cap F \neq \emptyset \Rightarrow p(E \cup F) = p(E) + p(F)$

3. Zeige, dass aus den drei kolmogorwschen Axiomen, die *Monotonie* von Wahrscheinlichkeiten folgt:

$$\forall_{E,F \subset \Omega} \qquad E \subset F \Rightarrow p(E) \leq p(F)$$

12.1.3 Entscheidungen unter Risiko

1. In Amerika ist eine Grippewelle ausgebrochen. Experten rechnen damit, dass die Grippewelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% auch Deutschland erreicht. Wenn sie Deutschland erreicht, dann erkrankt

ein Anteil von 15% der Bevölkerung. Wird die Grippe nicht behandelt, so sterben 3% der Erkrankten.

Die Gesundheitsministerin erwägt nun, ein breit angelegtes Impfprogramm für die gesamte Bevölkerung durchführen zu lassen. Wird die Impfung frühzeitig verabreicht, so senkt sie das Erkrankungsrisiko auf 2%. Allerdings ist die Impfung nicht ganz ohne Risiko, denn es kommt – geheim gehaltenen Zahlen zufolge – bei 0.2% der geimpften Personen zu schweren Komplikationen, die zum Tod führen.

Wenn die Grippe bereits ausgebrochen ist, kann die Gesundheitsministerin immer noch die Entscheidung treffen, eine Impfung durchführen zu lassen, falls das nicht schon vorher geschehen ist. Allerdings ist die Impfung zu diesem späteren Zeitpunkt nicht mehr so effektiv. Sie senkt das Erkrankungsrisiko dann nur noch auf 10% bei gleichem Risiko von Komplikationen.

Aufgaben:

(a) Stelle das Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum dar.

(b) Sollte die Gesundheitsministerin eine frühzeitige Durchführung des Impfprogramms anstreben?

(c) Angenommen es hätte im Vorfeld eine öffentliche Diskussion über die Risiken des Impfprogramms gegeben, so dass die Durchführung des Impfprogramms zu einem frühen Zeitpunkt, als noch nicht klar war, ob sie Deutschland überhaupt erreicht, politisch nicht durchsetzbar war. Angenommen weiterhin, die Grippewelle hat Deutschland schließlich dennoch erreicht und der Ruf nach einer schleunigen Massenimpfung wird laut. Sollte die Gesundheitsministerin jetzt doch noch das Impfprogramm durchführen?

2. Für eine auf einer Menge von Lotterien definierte Präferenzrelation gilt neben den üblichen Ordnungsgesetzen von Präferenzrelationen u.a.:

   (a) *Bedingung der höheren Gewinne*: Für beliebige Lotterien x,y und L^* und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt:

      i. $L^* \succ x$ genau dann wenn $L(a, L^*, y) \succ L(a, x, y)$.

      ii. $L^* \succ y$ genau dann wenn $L(a, x, L^*) \succ L(a, x, y)$.

   (b) *Reduzierbarkeit zusammengesetzter Lotterien*: Für jede zusammengesetzte Lotterie der Form $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$ gilt $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y)) \sim L(d, x, y)$ mit $d := ab + (1 - a)c$.

Zeige allein mit Hilfe dieser beiden Bedingungen (und der Ordnungsgesetze für Präferenzrelationen):

(a) Es kann *nicht* gelten: $L(a, x, x) \succ x$

(b) Es kann *nicht* gelten: $x \succ L(a, x, x)$

3. Nimm weiterhin folgende Bedingungen als gegeben an (ergibt sich aus der vorhergehenden Aufgabe): Für alle Wahrscheinlichkeiten a und alle Lotterien x gilt: $L(a, x, x) \sim x$

   Zeige allein mit dieser und den Bedingungen aus der vorhergehenden Aufgabe: Wenn B ein bestes Grundgut ist, dann kann es keine Lotterie $L(a, x, y)$ geben für die gilt: $L(a, x, y) \succ B$

12.1.4 Spieltheorie

1. Löse das folgende Spiel durch sukkzessive Dominanz (Gib dazu in der richtigen Reihenfolge die zu streichenden Zeilen- bzw. Spaltenstrategien an):

	S_1	S_2	S_3	S_4
Z_1	4	2	0	14
Z_2	11	7	1	12
Z_3	9	6	4	5
Z_4	3	4	2	8

2. Gegeben seien diese beiden Spiele:

Spiel A

	S_1	S_2
Z_1	2, 1	0,0
Z_2	-1,-2	1,3

Spiel B

	S_1	S_2
Z_1	0,0	-1,1
Z_2	1,-1	-2,-2

   Aufgaben:

   (a) Bestimmte zu jedem Spiel:

      i. die *reinen* Nash-Gleichgewichte (sofern vorhanden).

      ii. die *gemischten* Nash-Gleichgewichte (sofern vorhanden).

   (b) Bestimme den Erwatungswert der Spiele für jeden Spieler in den gemischten Gleichgewichten.

12.2 Die Klausur

Aufgabe: Entscheidungen unter Unwissenheit

Lösen Sie nach der Minimax-Bedauerns-Regel. Stellen Sie dazu die Bedauernstabelle auf und geben Sie dann an, welche drei Handlungen A_1, A_2 oder A_3 gewählt werden sollte.

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	3	7	500	4
A_2	200	100	3	50
A_3	150	60	2	25

Aufgabe: Entscheidungsbäume

Eine Person steht vor einem Entscheidungsproblem, das durch den Entscheidungsbaum *auf der letzten Seite* dargestellt wird:

1. Sollte die Person an dem weiter rechts liegenden der beiden Entscheidungsknoten besser „Handlung A" oder „Handlung B" wählen?

2. Wie groß ist der Erwartungswert von „Alternative 1" (am ersten Entscheidungsknoten von links)?

3. Sollte die Person „Alternative 1" oder „Alternative 2" wählen?

(Nehmen Sie dabei an, dass die Person sich rational verhält und den Wert von zufälligen Ereignissen immer nach dem Erwartungsnutzenprinzip berechnet.)

Aufgabe: Nash-Gleichgewichte

Gegeben sei folgendes Zwei-Personen Spiel:

	S_1	S_2
Z_1	1, 1	2, 0
Z_2	0, 2	4, 4

1. Geben Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte des Spiels an.

2. Berechnen Sie das *gemischte* Nash-Gleichgewicht. Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zeilenspieler im gemischten Gleichgewicht Z_1 spielt, und mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spaltenspieler im gemischten Gleichgewicht S_1 spielt.

Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz

Ein Bergbau-Unternehmen möchte in Sibieren Gold abbauen. Experten schätzen, dass in dem dafür vorgesehenen Gebiet mit einer Wahrscheinlichkeit von **30%** reiche Goldvorkommen zu finden sind. Bevor das Unternehmen jedoch eine Abbau-Konzession von der Regierung erwirbt, hat es sich das Recht vorbehalten, Probegrabungen durchzuführen. Falls tatsächlich Goldvorkommen vorhanden sind, dann liefern die Probegrabungen mit **95%** Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis. Allerdings liefern sie mit **10%** Wahrscheinlichkeit auch dann ein positives Ergebnis, wenn in Wirklichkeit kein Gold vorhanden ist.

Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann noch davon ausgegangen werden, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabungen ein *negatives* Ergebnis liefern? Stellen Sie zur Lösung der Aufgabe die entsprechende Rechnung mit Hilfe des Bayes'schen Lehrsatzes auf, und rechnen Sie dann die Lösung aus.

Aufgabe: Beweise

1. Es seien x und y zwei Güter oder Lotterien mit $x \not\sim y$. Für welche Wahrscheinlichkeit b gilt dann: $L(a, x, y) \equiv L(b, y, x)$? Mit anderen Worten: Für welchen Wert von b sind die beiden Lotterien über dieselben Güter, aber in umgekehrter Reihenfolge identisch?

2. Die *Bedingung der höheren Gewinne* besagt, dass für beliebige Lotterien x,y und z und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt: $x \succ y$ genau dann wenn $L(a, x, z) \succ L(a, y, z)$. (Anders gesagt: Eine Lotterie wir dann vorgezogen, wenn man mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf der *ersten* Stelle einen höheren Gewinn erzielen kann, sofern der Gewinn auf der zweiten Stelle derselbe ist.)

   Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Bedingung der höheren Gewinne auch auf der zweiten Stelle gilt, d.h. dass für beliebige Lotterien x,y und z und jede beliebige Wahrscheinlichkeit a gilt: $x \succ y$ genau dann wenn $L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$.

   (Die Gültigkeit der Bedingung der höheren Gewinne auf der ersten Stelle und Ihr Ergebnis der ersten Aufgabe dürfen Sie dabei voraussetzen, aber *nicht* den Erwartungsnutzen!)

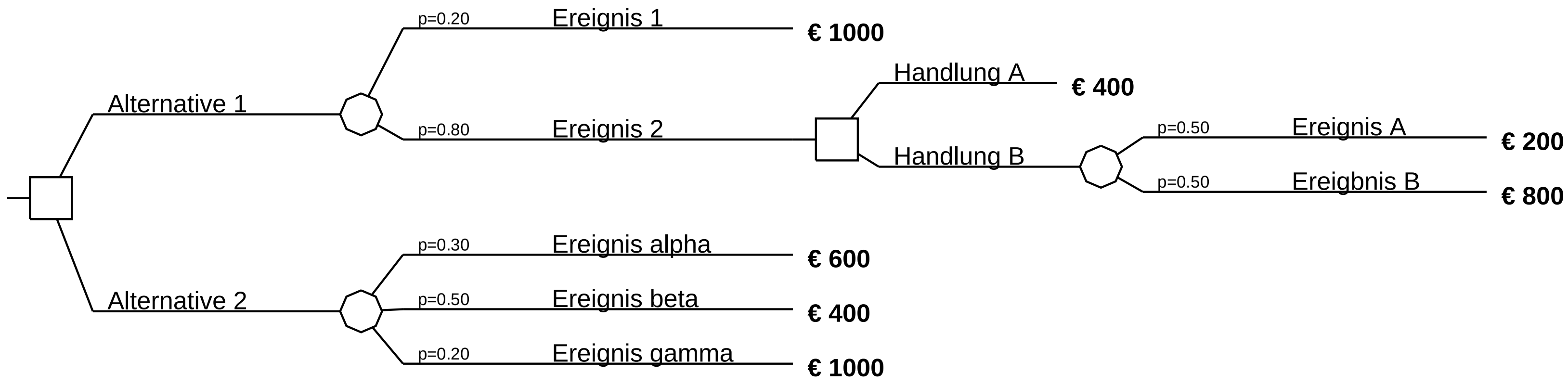


Abbildung 2: Der Entscheidungsbaum zu Aufgabe 12.2.

12.3 Die Lösung

Aufgabe: Entscheidungen unter Unwissenheit

Bedauernstabelle:

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	***197***	93	0	46
A_2	0	0	*497*	0
A_3	50	40	*498*	25

Lösung: A_1 sollte gewählt werden, da bei A_1 der maximale Gewinn, der entegehen könnte, mit 197 kleiner ist als bei A_2 mit 497 und A_3 mit 498.

Entscheidungsbäume

1. Für den Erwartungswert der „Handlung B“ gilt: $EW = 0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 800 = 500$ €. Da die „Handlung A“ nur 400 € liefert, würde eine rational handelnde Person die „Handlung B“ wählen.

2. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Personen von den beiden Handlungen des rechten Entscheidungsknotens die bessere wählt. Damit hat „Ereignis 1“, wenn es eintritt, einen Wert von 500 € (siehe die erste Aufgabe). Der Erwartungswert der „Alternative 1“ des linken Entscheidungsknotens berechnet sich dann wie gehabt: $EW = 0.2 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 500 = 600$ €

3. Um diese Frage zu beantworten, muss nur noch der Erwartungswert von „Alternative 2“ berechnet werden: $EW = 0.3 \cdot 600 + 0.5 \cdot 400 + 0.2 \cdot 1000 = 580$ €. Da die „Alternative 1“ einen höheren Erwartungswert hat, sollte „Alternative 1“ gewählt werden.

Nash-Gleichgewichte

1. Die beiden reinen Nash-Gleichgewichte sind (Z_1, S_1) und (Z_2, S_2). Weder der Zeilen- noch der Spaltenspieler kann sich im Gleichgewicht durch einen Wechsel seiner Strategie noch verbessern, wenn der andere Spieler seine Strategie beibehält.

2. Ansatz: Ein gemischtes Gleichgewicht kann nur dann vorkommen, wenn der jeweils andere Spieler bezüglich der gemischten Gleichgewichtsstrategie seines Gegenüber indifferent zwischen seinen reinen Strategien ist. Sei a die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zeilenspieler die erste seiner beiden Strategien Z_1 spielt. Dann errechnet sich

die Auszahlung, die der Spaltenspieler erhält, wenn er die Strategie S_1 spielt nach:

$$V(S_1) = a \cdot 1 + (1-a) \cdot 2$$

Und die Auszahlung, die er erhält, wenn er S_2 spielt, ist:

$$V(S_2) = a \cdot 0 + (1-a) \cdot 4$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + (1-a) \cdot 2 &= (1-a) \cdot 4 && (12.1)\\ -a + 2 &= 4 - 4a && (12.2)\\ 3a &= 2 && (12.3)\\ a &= \frac{2}{3} && (12.4) \end{aligned}$$

Im gemischten Gleichgewicht wird der Zeilenspieler also mit 2/3 Wahrscheinlichkeit Z_1 spielen und mit 1/3 Wahrscheinlichkeit Z_2. Wegen der Symmetrie des Spiels spielt der Spaltenspieler mit genau denselben Wahrscheinlichkeiten, nämlich mit 2/3 Wahrscheinlichkeit S_1 und mit 1/3 Wahrscheinlichkeit S_2.

Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz

Sei p das Ereignis, dass die Probegrabung erfolgreich ausfällt und g das Ereignis, dass Gold vorhanden ist. Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabung negativ ausfällt, d.h. $P(g|\neg p)$. Nach dem Bayes'schen Lehrsatz gilt:

$$P(g|\neg p) = \frac{P(\neg p|g)P(g)}{P(\neg p|g)P(g) + P(\neg p|\neg g)P(\neg g)}$$

Aus der Aufgabenstellung geht unmittelbar nur hervor, dass $P(g) = 0.3$, $P(p|g) = 0.95$ und $P(p|\neg g) = 0.1$. Alle anderen benötigten Werte muss man aus diesen gegebenen Werten berechnen, also:

$$P(\neg g) = 1 - P(g) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(\neg p|g) = 1 - P(p|g) = 1 - 0,95 = 0,05$$

$$P(\neg p|\neg g) = 1 - P(p|\neg g) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$P(g|\neg p) = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,7} = 0,023256$$

Die Lösung lautet also, dass nur noch mit ca. 2,3% Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden kann, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabung negativ ausfällt.

Aufgabe: Beweise

1. $L(a, x, y) \equiv L(b, y, x)$ wenn $b = 1 - a$. Begründung: Wenn $b = 1 - a$, dann kann man in beiden Lotterien mit genau denselben Gewinnchancen dieselben Gewinne bekommen. Damit sind die Lotterien aber identisch.

   Anmerkung: Man kann in diesem Fall schon deshalb nicht mit dem Erwartungsnutzen argumentieren, weil damit höchstens die Indifferenz zwischen beiden Lotterien gezeigt werden kann, aber noch nicht ihre Identität. (Wenn der Erwartungsnutzen von einem Apfel für eine bestimmte Person derselbe ist wie der von einer Birne, dann ist die Person zwischen Apfel und Birne indifferent, aber deshalb ist ein Apfel noch lange keine Birne!)

2. Nach dem ersten Teil der Aufgabe ist die Lotterie $L(a, z, x)$ identisch mit der Lotterie $L(1 - a, x, z)$ und die Lottiere $L(a, z, y)$ identisch mit der Lotterie $L(1 - a, y, z)$.

   Nun gilt aber: Für jedes a mit $0 \leq a \leq 1$ liegt der Wert $1 - a$ wieder in dem Intervall von 0 bis 1. Dann gilt aber nach der Bedingung der höheren Gewinne auf der ersten Stelle (Voraussetzung):

   $$x \succ y \Leftrightarrow L(1 - a, x, z) \succ L(1 - a, y, z)$$

   Aufgrund der oben festgestellten Identität gilt aber ebenfalls:

   $$L(1 - a, x, z) \succ L(1 - a, y, z) \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

   Damit gilt insgesamt:

   $$x \succ y \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

   q.e.d.

   Anmerkung: Wichtig ist, dass der Beweis so geführt wird, dass klar ist, dass die Formel am Ende auch tatsächlich für alle a gilt!

13 Literatur

Literatur

[1] Robert Axelrod. *Die Evolution der Kooperation.* R. Oldenbourg Verlag, deutsche Übersetzung, 5. auflage (2000) edition, 1984.

[2] Ken Binmore. *Game Theory and the Social Contract I. Playing Fair.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts / London, England, fourth printing (2000) edition, 1994.

[3] Ken Binmore. *Game Theory and the Social Contract II. Just Playing.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts / London, England, 1998.

[4] Gary E. Bolton, Elena Katok, and Axel Ockenfels. Trust among internet traders: A behavioural economics approach. *Analyse und Kritik*, 26:185–202, 2004.

[5] Karl Bosch. *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.* viewweg Verlag, Braunschweig, 7. auflage (zuerst: 1976) edition, 1999.

[6] Nancy Cartwright. *The Dappled World. A Study of the Boundaries of Science.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[7] Gary W. Cox. The empirical content of rational choice theory. a reply to green and shapiro. *Journal of Theoretical Politics*, 11(2):147–169, 1999.

[8] Lee Alan Dugatkin. *Cooperation among Animals.* Oxford University Press, 1997.

[9] John Dupré. *Human Nature and the Limits of Science.* Oxford University Press, Oxford, 2001.

[10] Jakob Fritz. Experimentelle untersuchung zum framing – effekt in der entscheidungsforschung: Ein vergleich zwischen laborexperimenten und einer datenerhebung im internet. Master's thesis, 2002.

[11] Donald Gillies. *Philosophical Theories of Probability.* Routledge, 2000.

[12] Donald P. Green and Ian Shapiro. *Pathologies of Rational Choice Theory. A Critique of Applications in Political Science.* Yale University Press, New Haven and London, 1994.

[13] Peter Hammerstein. Why is reciprocity so rare in social animals? a protestant appeal. In Peter Hammerstein, editor, *Genetic and Cultural Evolution*, chapter 5, pages 83–94. MIT Press in cooperation with Dahlem University Press, Cambridge, Massachusetts / London, England, 2003.

[14] John Harsanyi. *Can the Maximin Principle Serve as a Basis for Morality? A Critique of John Rawls's Theory*, chapter IV, pages 37–63. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1980.

[15] Rafaela Hillerbrand. *Technik, Ökologie und Ethik.* mentis, Paderborn, 2006.

[16] Robert Hoffmann. Twenty years on: The evolution of cooperation revisited. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Volume 3, No. 2, 2000.

[17] Mark Kaplan. *Decision Theory as Philosophy.* Cambridge University Press, 1996.

[18] Manfred Milinski. Tit for tat in sticklebacks and the evolution of cooperation. *nature*, 325, January:433–435, 1987.

[19] Deniss C. Mueller. *Public Choice III.* Cambridge University Press, 2003.

[20] Roger B. Myerson. *Game Theory. Analysis of Conflict.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, fifth printing (first: 1991) edition, 2002.

[21] Roger Penrose. *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe.* Vintage Random House, London, 2004.

[22] John Ralws. *Eine Theorie der Gerechtigkeit.* suhrkamp, Frankfurt, 1971.

[23] Michael D. Resnik. *Choices. An Introduction to Decision Theory.* University of Minnesota Press, 5th ed. (1st: 1987) edition, 2000.

[24] Gerhard Schurz. *Einführung in die Wissenschaftstheorie.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2006.

[25] Ian Shapiro. *The Flight from Reality in the Human Sciences.* Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

[26] Hartmut Kliemt und Bernd Lahno. *Methoden der Moralwissenschaften. Teil 1. Nicht-strategische Modelle der Moralwissenschaften. Kapitel 2. Individuelle und Kollektive Wertordnungen.* unveröffentlichtes Vorlesungsskript, 2005.